A3 - basic

Note Title 9/10/2019

- successioni
- funzionali

PROB 1
$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + \underbrace{8n}_{f(n)} \end{cases}$$

$$a_{n+1} = K a_n + f(n) =$$

$$= K(K a_{n-1} + f(n-1)) + f(n)$$

$$= K^2 (K a_{n-2} + f(n-2)) + K f(n-1)$$

$$+ f(n) =$$

$$= K^3 a_{n-2} + K^2 f(n-2) + K f(n-1)$$

$$+ f(n)$$

$$= \ldots \overset{\text{claim}}{=} K^{n+1} a_0 + \underline{\sum_{i=0}^{n} K^i f(n-i)}$$

Sol: $a_0 + \sum_{i=0}^{n} 8i = a_0 + 8 \sum_{i=0}^{n} i$

$$= 8\,\frac{n(n+1)}{2} \qquad + a_0$$

PROB 2

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 15 \\ a_{n+2} = 15\, a_{n+1} + 16\, a_n \end{cases}$$

Dimostra che esistono infiniti k t.c.
$269 \mid a_k$

$$\begin{cases} x_0,\ x_1 \\ x_{n+1} = a\, x_n + b\, x_{n-1} \end{cases}$$

$P(x) = x^2 - a x - b = 0$

radici : ξ, η

(1) Se $\xi = \eta$

(2) Se $\xi \neq \eta$

$$(2) \quad x_n = A\xi^n + B\eta^n$$

$$(1) \quad x_n = A\xi^n + Bn\xi^n$$

$$\xi^n \overset{\shortparallel}{} \eta^n$$

A, B si ricavano usando x_0, x_1

Sol: nel nostro caso

$$P(x) = x^2 - 15x - 16 = (x-16)(x+1)$$

$$\xi = 16, \quad \eta = -1$$

$$x_n = A\,16^n + B(-1)^n$$

$$\begin{cases} x_0 = A + B \\ x_1 = 16A - B \end{cases} \Rightarrow A = B = 1$$

$$x_n = 16^n + (-1)^n = 2^{4n} + (-1)^n$$

$$\underset{\downarrow \text{ primo}}{\underline{269}} \mid x_k = 2^{4k} + (-1)^k$$

verrei $\begin{cases} (-1)^k \equiv -1 \pmod{269} \\ 2^{4k} \equiv 1 \pmod{269} \end{cases}$

- k dispari
- $2^{268} \equiv 1$

Per $k = 67$ ho $4 \cdot 67 = 268$

Allora mi basta prendere k dispari e multiplo di 67

Oss: $\begin{cases} x_1, \dots, x_k \\ c_k x_{m+k} + c_{k-1} x_{m+k-1} + \dots + c_1 x_{m+1} + c_0 x_m = 0 \end{cases}$

Poly caratteristico

- $P(x) = c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0 = 0$

- Trovo le radici: $\xi_1, \dots, \xi_k$
- Se le radici sono a 2 a 2 distinte allora

$$x_n = A_1 \xi_1^n + \dots + A_k \xi_k^n$$

- Se le radici non fossero tutte distinte dovrei aggiungere dei fattori $1, n, n^2, \dots$

PROB 3

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = 5\, a_{n+1} - 6\, a_n + \underline{7}^n \end{cases}$$

$$a_{n+2} - 5\, a_{n+1} + 6\, a_n = 7^n = 7 \cdot (7^{n-1})$$

$$= 7 \cdot (a_{n+1} - 5\, a_n + 6\, a_{n-1})$$

$$a_{n+2} - 12\, a_{n+1} + 41\, a_n - 42\, a_{n-1} = 0$$

Poly caratteristico:

$$x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = (x-2)(x-3)(x-7)$$

$$\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 3, \quad \xi_3 = 7$$

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C \cdot 7^n$$

$$a_0 = A + B + C = 0$$
$$a_1 = 2A + 3B + 7C = 1$$
$$a_2 = 2^2 A + 3^2 B + 7^2 C = \dots$$

PROB 4

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}\, a_{n+1} + n!}{a_n} \end{cases}$$

Dimostra che a_n è intero $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underline{a_{n+3}\, a_n - a_{n+2}\, a_{n+1}} = n! = n \cdot (n-1)!$$

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$
$a_4 = 3$
$a_5 = 8$
$a_6 = 15$
$a_7 = 48$
$a_8 = 105$

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}\, a_{n+1} + n!}{a_n}$$

Claim: $a_n \mid n!$
$a_n \mid a_{n+2}$

1	$\cdot 2$	1	$\cdot 3$
2	$\cdot 4$	3	$\cdot 5$
8	$\cdot 6$	15	$\cdot 7$
48		105	

Claim 2: $a_n = (n-1)\, a_{n-2}$

Dim: INDUZIONE (GENERALIZZATA)

P.B. $a_3 = 2 \cdot 1$
$a_4 = \dots$

P.I. Suppongo $a_{i+2} = (i+1)\, a_i$
$\forall i \leq n-1$

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}\, a_{n+1} + n!}{a_n} =$$

$$= \frac{(n+1)\, a_n\, a_{n+1} + n!}{a_n} =$$

$$= (n+1)\, a_{n+1} + \underline{\frac{n!}{a_n}} =$$

$$a_{n+1}\, a_n = n\, a_{n-1} \cdot (n-1)\, a_{n-2} =$$

$$= \dots = n!$$

(si dim. per induzione)

$$\frac{n!}{a_n} = a_{n+1}$$

$$= (n+1)\, a_{n+1} + a_{n+1} = (n+2)\, a_{n+1}$$

$\square$

PROB 5 $\quad a_{n+1} = a_n^2 - 2$

e a_0 fissato in $[0,1]$

$x^2 - 2 = x \quad \rightsquigarrow \quad x_1, x_2$

$$x_1 = x_1^2 - 2$$

$$a_{n+1} = x_1^2 - 2 = x_1$$

$$a_{n+1} - x_1 = a_n^2 - 2 - x_1$$
$$a_{n+1} - x_2 = a_n^2 - 2 - x_2$$

$$\frac{a_{n+1} - x_1}{a_{n+1} - x_2} = a$$

$$\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$$

$$b_n = \cos(2^n \vartheta)$$

$$b_{n+1} = \cos(2 \cdot 2^n \vartheta) = \dots = 2b_n^2 - 1$$

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

$$b_n = \frac{a_n}{2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{2} = 2\frac{a_n^2}{4} - 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

$$a_n = 2b_n = 2\cos(2^n \vartheta)$$

ϑ? lo ricavo usando a_0

FUNZIONALI

PROB 6: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

• $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f(0) \cdot \lfloor f(0) \rfloor$

$\Rightarrow$ (1) $f(0) = 0$

(2) $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

(2) $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \quad \forall x$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = c = \text{cost} \quad \text{e} \quad \lfloor c \rfloor = 1 \Rightarrow c \in [1,2)}$$

da verificare

(1) $f(0) = 0$

$x = y = 1$

$f(1) = f(1) \lfloor f(1) \rfloor$

(1.1) $f(1) = 0$

(1.2) $\lfloor f(1) \rfloor = 1$

(1.1) $f(1) = 0$

$x = 1 \Rightarrow \boxed{f(y) = 0} \quad \forall y$

soluzione (da verificare)

(1.2) $\lfloor f(1) \rfloor = 1$

$y = 1 \Rightarrow f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$

$x = 2, \; y = \frac{1}{2}$

$f(1) = f(2) \cdot \lfloor f(\frac{1}{2}) \rfloor =$

$= f(2) \cdot \lfloor f(0) \rfloor = 0$

$\Rightarrow f(1) = 0$ ↯

PROB 7 $\quad f(2a) + 2f(b) = \underline{f(f(a+b))}$

dove $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

Sol : $b = 0 \qquad f(f(a)) = f(2a) + 2c$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel$

$a = 0 \qquad \boxed{f(f(a)) = 2f(a) + c}$

$$\boxed{f(2a) = 2f(a) - c}$$

OSS: $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) =$

$= f(f(b+a)) = f(2b) + 2f(a)$

$\underbrace{f(2b) - 2f(b)}_{\substack{\shortparallel \\ \text{costante}}} = f(2a) - 2f(a)$

$\cdot\ a = 0 \implies \text{costante} = - f(0)$

$2f(a+b) + c \overset{\circ}{=} f(f(a+b)) =$

$= f(2a) + 2f(b) \overset{\circ}{=}$

$$= 2(f(a) + f(b)) - c$$

$$\Rightarrow f(a+b) - c = f(a) + f(b) - 2c$$

$$f(a+b) - c = [f(a) - c] + [f(b) - c]$$

$$g(x) = f(x) - c$$

$$\Rightarrow g(a+b) = g(a) + g(b)$$

EQUAZIONE DI CAUCHY!

$$\Rightarrow g(x) = Kx$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = kx + c}$$

Sostituisco nell'espressione iniziale e trovo i valori di K e di $c = f(0)$

- $K = 2$ e c qualunque
- $K = 0$ e $c = 0$

$$f(n+1) = f(n) + c$$

PROB 9 $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(y f(x+y) + f(x)) = 4x + 2y f(x+y)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluzione:

- $y = 0 \implies f(f(x)) \overset{\circledast}{=} 4x$

e $4x$ è biettiva

$f(4x) \overset{\circ}{=} f(\underbrace{f(\overbrace{f(f(x))}))} \overset{\circ}{=} 4 f(x)$

$\implies f(0) = 0$

OSS:
- Se $f \circ g$ è iniettiva $\implies g$ è iniettiva
- Se $f \circ g$ è suriettiva $\implies f$ è sur.
- Se $f \circ g$ è biettiva $\implies g$ è iniettiva, f è sur.

$\implies f$ è biettiva

- $x = 0, y = 1 \qquad f(f(1)) = 2 f(1)$

$ \overset{\shortparallel}{4 \cdot 1}$

$$2f(1) = 4 \Rightarrow f(1) = 2$$

$$f(2) = f(f(1)) = 4 \quad (*)$$

$$f(4) = 8$$

- $x = 1 - y \Rightarrow$

$$f(2y + f(1-y)) = 4 - 4y + 4y = 4$$

$(*)$ $2y + f(1-y) = 2$

$$\Rightarrow f(1-y) = 2(1-y)$$

Preso $x = 1 - y$ si ha $\boxed{f(x) = 2x}$

da verificare

ESERCIZI

1 Trova tutte le possibili $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
t.c. $f(x + f(y)) = f(x) + y$

2 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 7a_n + 1 \end{cases}$ Trova il minimo n t.c. $30 \mid a_n$

3. $\begin{cases} b_0, b_1 \in \mathbb{Z} \\ b_{n+1} = (n+1) b_n - n b_{n-1} \end{cases}$
Dimostra che per ogni $k \geq 3$ intero, per n abbastanza grande, b_n costante modulo k

4.
In quante parole di 20 lettere, generate da a, b, c, compare la lettera a un numero pari di volte?

5. $f(x) + 2f(xy) = f(x + 2xy)$, $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
trova f

6. Sia (a_n) progressione aritmetica non costante t.c. $\exists m > 1$ con
$$a_m + a_{m+1} = a_1 + \dots + a_{3m-1}$$
Dimostra che a_n non contiene termini nulli

7. Trova tutte le $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, y, z, k \in \mathbb{R}$ si abbia

(a) $x f(x, y, z) = z f(z, y, x)$

(b) $f(x, ky, k^2 z) = k f(x, y, z)$

(c) $f(1, k, k+1) = k+1$

E. 1 $\quad f(x + f(y)) = f(x) + y$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

- $x = 0 \implies \underline{f(f(y)) = f(0) + y} = \underbrace{c + y}_{\text{biettiva}}$

$\implies f$ biettiva

- $x = y = 0 \quad \cancel{f}(f(0)) = \cancel{f}(0)$

$f(0) = 0$

Dati x, z, $\exists y$ t.c. $y = f(z)$

$$f(x + f(f(z))) = f(x) + f(z)$$

$$\parallel$$

$$f(x + z) = f(x) + f(z)$$

$\Rightarrow f$ è cauchy

$$\begin{cases} b_0, b_1 \in \mathbb{Z} \\ b_{n+1} = (n+1) b_n - n b_{n-1} \end{cases}$$

Se $b_i \equiv b_{i-1} \equiv c \pmod{k}$

$b_{i+1} \equiv (i+1) \cdot c - i \cdot c = c$

$n = k$: $b_{k+1} \equiv b_k$

4 Sia x_n il numero cercato (il numero di parole di n lettere t.c. ...)

$x_{n+1} = 2 \cdot x_n + (y_n) \cdot 1$

y_n: parole di lunghezza n con un numero disp. di a.

parole totali di length n è

$x_n + y_n = 3^n$

$$y_n = 3^n - x_n$$

$$x_{n+1} = 2x_n + 3^n - x_n = x_n + 3^n$$

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = x_0 + \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

E.5 $\quad f(x) + 2f(xy) = f(x + 2xy)$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

- $x = y = 0 \implies f(0) = 0$
- $x \cdot y = z \quad \left(y = \frac{z}{x} \right)$

$$f(x) + 2f(z) = f(x + 2z)$$

- $x = -z$

$$f(-z) = -f(z)$$

- $x = -2z \qquad f(2z) = 2f(z)$
- $y = 2z$

$$f(x) + f(y) = f(x) + f(2z) =$$
$$= f(x) + 2f(z) =$$
$$= f(x + 2z) =$$

$$= f(x+y)$$

E.6 $\exists m \geq 2$ t.c.

$$a_m + a_{m+1} = a_1 + \dots + a_{3m-1}$$

PROG. ARITM

$$a_k - a_{k-1} = d \qquad (d \text{ RAGIONE})$$

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$$

$$[a_1 + (m-1)d] + [a + md] =$$

$$= \frac{(3m-1)(a_1 + a_{3m-1})}{2} \quad 2a$$

$\Rightarrow$

$$3a = (9m+2)d$$

$$d = -\frac{6a}{9m+2}$$

$$a_{m+1} = a + md =$$

$$= a\,\frac{(9m+2+6m)}{9m+2} =$$

$9m + 2 + 6m - 3(3m + 2m) + 2$

$\square$