SENIOR 2019 Combinatoria 1 - Basic

Titolo nota 05/09/2019

- Gara con 5 atleti $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$
- Classe 10 alunni, ne scelgo 3. Quanti modi?

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} \qquad (10-3)! = 7!$$

- CANE quanti sono gli anagrammi? $4!$
- NONNA Quanti sono?

$5!$

$$6 \left[\begin{array}{l} N_1\ O\ N_2\ N_3\ A \rightarrow 5! \\ N_2\ O\ N_1\ N_3\ A \\ N_2\ O\ N_3\ N_1\ A \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ci sono $3!$ copie di NONNA

Totale sono $\frac{5!}{3!}$

- 1 1 1 2 2 2 2 2 tre 1 e cinque 2

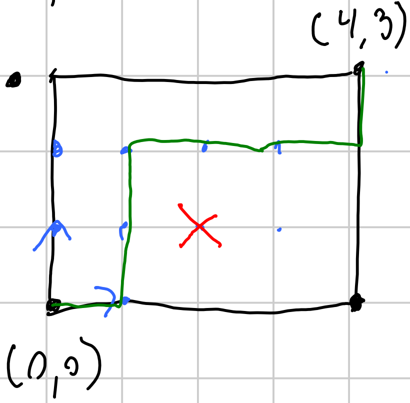
Quanti sono gli anagrammi che
1) FINISCONO PER 2
2) NON CI SONO due 1 consecutivi?

Sol $1 \rightarrow 1$ X NO

$1 \rightarrow 2$

$$\underbrace{12}_{A}\ \underbrace{12}_{A}\ \underbrace{12}_{A}\ \underbrace{2}_{B}\ \underbrace{2}_{B}$$

Sono $\frac{5!}{3!\,2!}$



3×4 Percorsi sugli spigoli

QUANTI sono?

D D D D A A A $\qquad \dfrac{7!}{4!\,3!}$

D A A D D D A

Sub domanda: Quanti sono quelli che NON passano per (2,1)?

$\dfrac{7!}{4!\,3!}$

PERCORSI
- NON PASSANO ??
- PASSANO

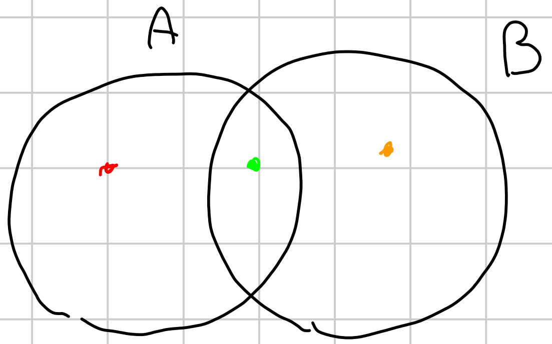
$(0,0) \to (2,1) \to 3$

$(2,1) \to (4,3) \to \binom{4}{2}$

TOT $3 \cdot \binom{4}{2} = 18$

NON PASSANO $= \dfrac{7!}{4!\,3!} - 18$

PRINCIPIO di INCLUSIONE - ESCLUSIONE



So quanti oggetti in A

" " " in B

Quanti ce ne sono in $A \cup B$?

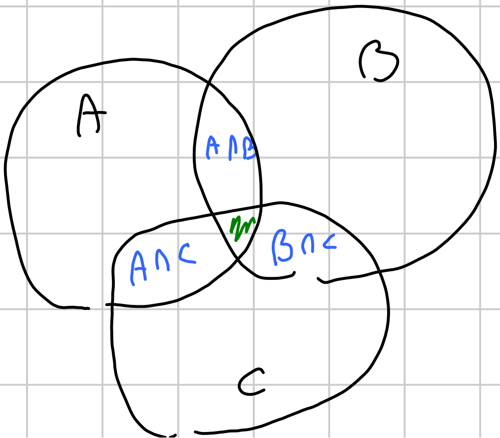
$|A| + |B|$

1 volta

1 volta

2 volte

$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$m = A \cap B \cap C$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

• Quante sono le permutazioni di $\{1,2,3,4\}$ senza punti fissi?

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Tutte $= 4!$

- $\boxed{0 \text{ punti fissi}}$?
- 1 punto fisso
- 2 " "
- 3 " "

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \quad \text{NO}$$

$$\underset{1\,pt}{4! - 4\cdot 3!} + \underset{2\,pt}{\binom{4}{2}\cdot 2} - \underset{3\,pt}{\binom{4}{3}\cdot 1} + \binom{4}{4}$$

1 pt fisso: 4 scelte per il punto fisso, $3!$ per gli altri tre

[In generale $n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \dots$]

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

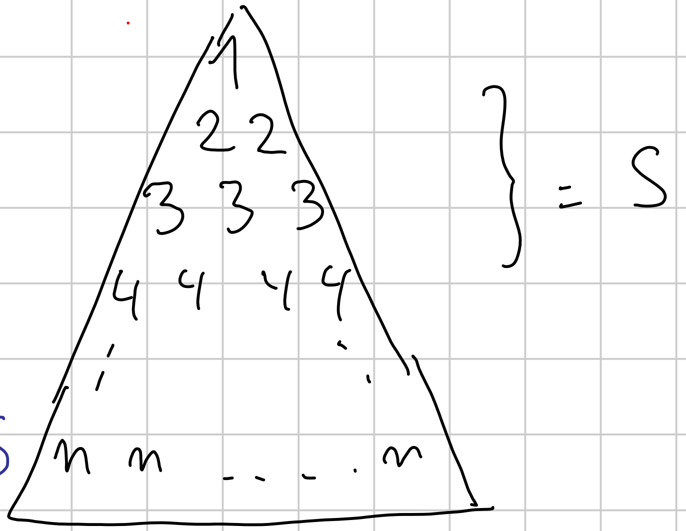
$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 + n = S \\ n + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1 = S \end{array}\right\} = 2S$$

$n+1 \quad n+1 \quad \dots \quad n+1 = n(n+1)$

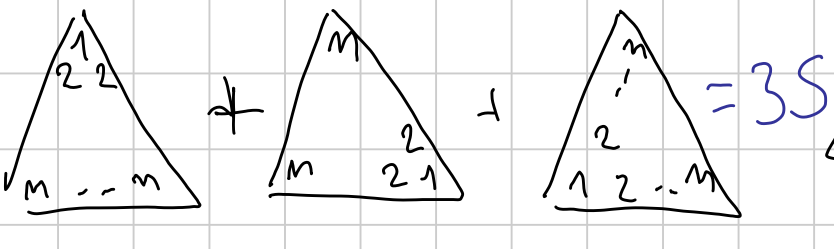
$2S = n(n+1)$ $\qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$

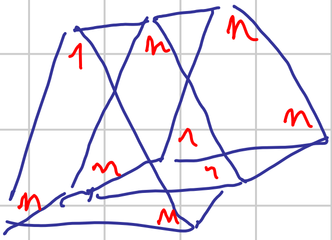
DOUBLE COUNTING

• $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$



3 copie ruotate





$1 + n + n = 2n + 1$

1	n	n
↓	↓	↓
2	n	n-1

$2 + N + N - 1 = 2N + 1$

per tutte le sfere, la somma è $(2N+1) \times \frac{N(N+1)}{2} = 3S$

NUMERO di Caselle

$$\Rightarrow S = \frac{n(N+1)(2N+1)}{6}$$

• $\sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} K =$ 1) Modo algebrico $K \cdot \binom{N}{K} = \frac{N!}{\cancel{K!}\,(N-K)!} \cdot \cancel{K}$ $(K-1)!$ $= N \binom{N-1}{K-1}$

2) Combinatoria

Gruppo di N persone, volete scegliere una squadra
Sia scelto un CAPITANO nella squadra

1) Scelgo la squadra → Scelgo il capitano

K persone $\binom{N}{K} \cdot K = \binom{N}{K} \cdot K$

Totale $= \sum_{K=1}^{N} \binom{N}{K} \cdot K = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} \cdot K$

2) Scelgo il capitano → scelgo la squadra

n modi Rimangono N-1 persone

↳ 2^{N-1}

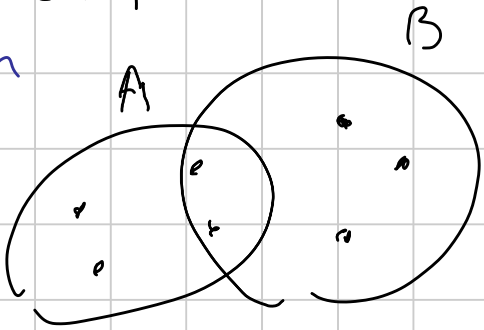
$N \cdot 2^{N-1}$

$$\sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} K = N \cdot 2^{N-1}$$

• X insieme con n elementi. Y = sottoinsiemi di X

$$\sum_{A,B \in Y} |A \cup B| = ?$$

(A,B)
(B,A)



$|A \cup B| = 7$

(A, B, e)

dove e è un elemento che sta in A o in B

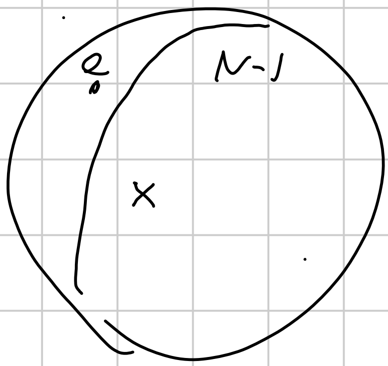
CONTO QUESTE TERNE

Fisso A,B e faccio variare e

• Fisso e, faccio variare A e B

$n \cdot 4^{n-1} \cdot 3$ → $e \in A$ o B o $A \cup B$

$n \cdot (2\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdots(2\cdot2)$



IMO 2008 N° 5

n, k interi, $k \geq n$ e $k-n$ è pari

Ci sono 2n lampade numerate da 1 a 2n, inizialmente spente

Ho k mosse, e voglio accendere/spegnere le lampade

configurazioni finali in cui 1, 2, ... n ACCESE

n+1, n+2 ... 2n SPENTE

A = il numero di possibili sequenze di mosse in cui le lampade n+1 ... 2n NON VENGONO MAI TOCCATE

B = il numero TOTALE di possibili sequenze di mosse

$N=3$ 1 2 3 4 5 6 — 1, 2, 2, 3, 5, 2, 5 — NON va bene per A

$K=7$ — 1 2 1 3 3 1 3

Quanto vale $\frac{B}{A}$?

• Siccome $B > A$. Cerchiamo di legare le mosse di B e quelle di A

1, 2, 2, 3, 5, 2, 5, 6 — B → Mossa di A

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{matrix}$$

$a \to N+a$

5 ↓ 2, 5 ↓ 2, 6 ↓ 3

1, 2, 2, 3, 2, 2, 2

1, 5, 2, 3, 2, 5, 2 poteva averlo generato!

dato una sequenza di A, quante sono le mosse di B che la generano?

1 1 . 2 2 ... n n

$c_1 = \#$ mosse su 1

$c_2 = \#$ .. 2

c_N

• Oss c_i è dispari

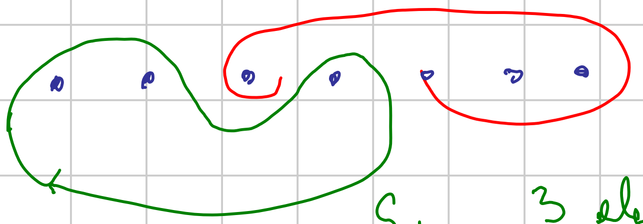
$N+1 \to 1$

c_1 1 1 1 1..1

Procedimento inverso: scelgo degli 1, li faccio diventare $N+1$

• Cerchiamo i sottoinsiemi di c_1 elementi con cardinalità pari

Totale sottoinsiemi è 2^{c_1}



S_2 4

S_1 3 elementi

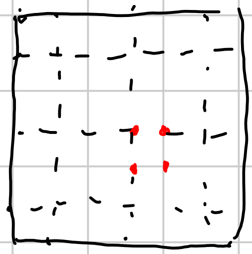
$\#$ sottoinsiemi dispari $= \#$ sottoinsiemi pari

$\Rightarrow 2^{c_1 - 1}$

Totale $2^{c_1-1} \cdot 2^{c_2-1} \cdot 2^{c_3-1} \cdot \ldots \cdot 2^{c_N-1} = 2^{\sum c_N - N} = 2^{K-N}$

ESERCIZI

1) Quanti sono i percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$ che non passano per il quadrato $(3,2), (3,3), (4,2), (4,3)$

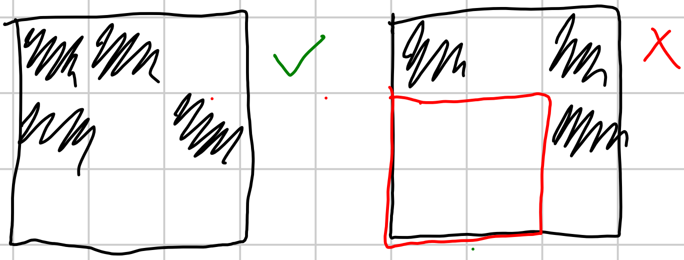


2) Quanti sono gli anagrammi di "CAPANNA" senza due A consecutive?

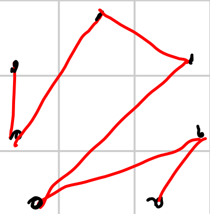
3) Quanti sono i numeri che scritti in base 10, hanno n cifre ordinate in modo debolmente crescente?

1 1 3 4 4 8 9 9 ✓   1 3 5 2 ✗   0 3 8 9

4) C'è un quadrato 3×3 colorato di bianco e nero. Quante colorazioni ci sono senza un sottoquadrato 2×2 bianco?



5) Ci sono n punti nei vertici di un poligono regolare. Quante sono le spezzate che non si intersecano che li congiungono tutti?



6) Quante sono le funzioni suriettive da $\{1, 2, 3 \ldots n\}$ a $\{1, 2, 3\}$?

7) Quanto fa $\sum_{K=0}^{N} K(N-K) = ?$

8) $X = \{1, 2, \ldots n\}$, Y = sottoinsiemi di X con esattamente 2 elementi

$\sum_{A \in Y} \min(A) = ?$

9) X ha n elementi, Y = tutti sottoinsiemi di X.

Calcolare $\sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A\cap B\cap C|$.

10) TF SENIOR 2016
Al test finale ci sono 8 problemi facili e 4 medi
Tutti i concorrenti risolvono 11 problemi
Per ogni coppia di problema facile - problema medio scrivo il numero di studenti che hanno risolto entrambi
32 coppie, sommo questi numeri e ho 256.
Quanti studenti hanno fatto il test?

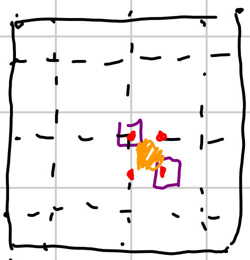
11) Dimostrare $\sum_{i=0}^{K}\binom{a}{i}\binom{b}{K-i}=\binom{a+b}{K}$

12) Torneo di scacchi, ogni giocatore incontra esattamente una volta tutti gli altri. Una vittoria conta 2 punti, pareggio 1 punto e sconfitta 0.
A fine torneo, risulta che metà dei punti di ogni giocatore è fatta contro gli ultimi 10 della classifica.
(Vale anche per i giocatori tra gli ultimi 10, metà dei punti è fatta contro gli altri 9)
Determinare il numero di giocatori del torneo.

CORREZIONE

1)

(6,6)



(0,0)

Vogliamo vietare solo (3,3) e (4,2)

Tutti, (3,3), (4,2)

$$\binom{12}{6} - \binom{6}{3}\binom{6}{3} - \binom{6}{2}\binom{6}{2}$$

2) Anagrammi di CAPANNA

2 liberi

_ A _ A _ A _

$\geq 1 \quad \geq 1$

Le posizioni sono 10

CPNN $\frac{4!}{2} = 12 \rightarrow$

_ _ _ _ $= 4$

2 1 1 0, 0 1 1 2, 1 1 1 1 $\rightarrow 3$

1 2 1 0, 1 1 2 0 $\rightarrow 4$

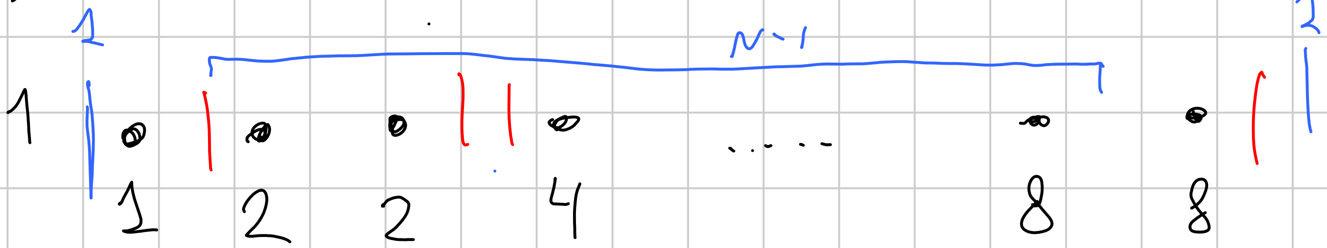
0 1 2 1, 0 2 1 1,

0 2 2 0 $\rightarrow 1$

0 3 1 0   0 1 3 0 $\rightarrow 2$

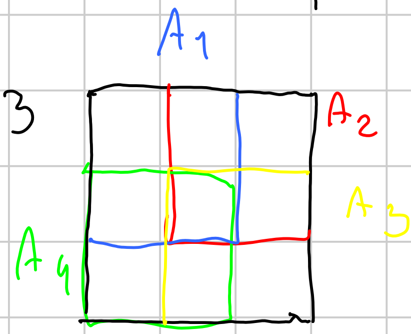
$$\binom{4}{2} + 4 = 10$$

3) Numero di n cifre "debolmente crescenti"



8 stanghette   N palline $\binom{N+8}{8}$

4) 3×3



Bianco / Nero

$A_1 \dots A_4$ 4 quadrati

A_1 è bianco, ... A_4 è bianco

E_1, E_2, E_4

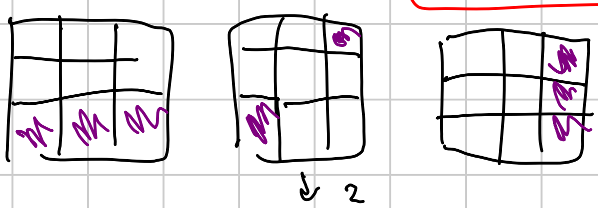
Totali

$$2^9 - (4 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^3) + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1$$

$|E_1|$ = colorazioni con A_1 bianco $= 2^5$

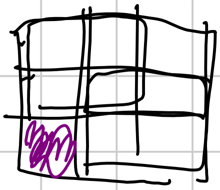
$|E_1 \cap E_2|$, $|E_1 \cap E_3|$, $|E_1 \cap E_4|$

2^3

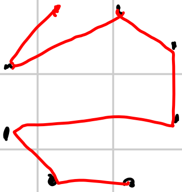


2^2

$|E_1 \cap E_2 \cap E_3|$



5) Spezzate lunghe $N-1$ tra N punti

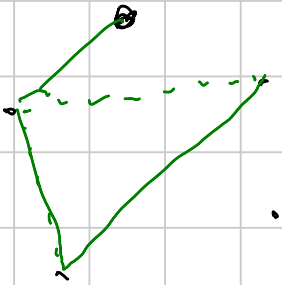


Origine $\to$ N modi

1° arco ha 2 possibilità

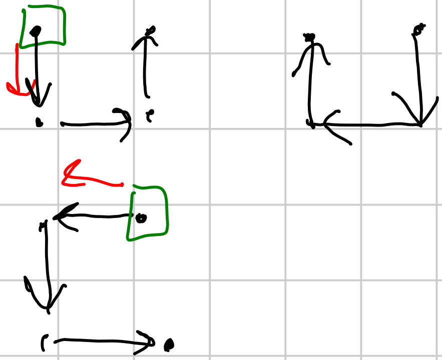
2° arco ... 2 "

⋮

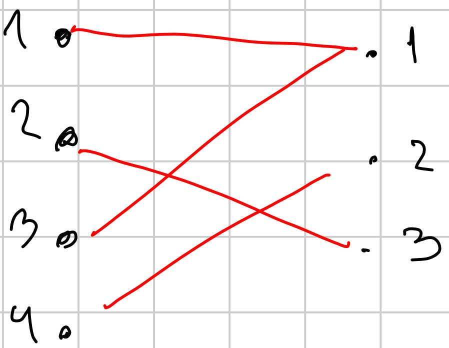


$N-2$° arco	2 poss
$N-1$°	1 poss

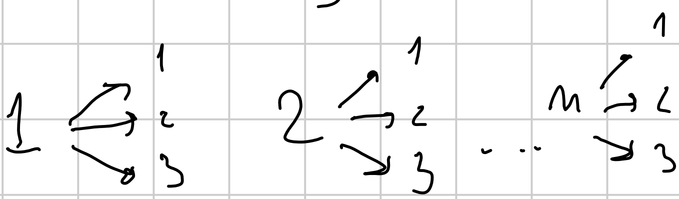
$$\frac{N \cdot 2^{N-2}}{2} \text{ scelte} = N \cdot 2^{N-3}$$



6) Funzioni suriettive da $\{1 \ldots n\}$ a $\{1,2,3\}$



$f^{-1}(1) = \{1,3\}$



$|\text{Funzioni}| = 3^n$

E_1 = funzioni che non prendono 1

E_2 = " 2

E_3 = " 3

$|E_1| = 2^N$

$|E_1 \cap E_2| = 1$

$3^N - \sum |E_i| + \sum |E_i \cap E_j| - \boxed{\sum E_1 \cap E_2 \cap E_3}$ X

$$\boxed{3^N - 3 \cdot 2^N + 3 \cdot 1}$$

7) $\sum_{k=0}^{N} k(N-k) =$

①  $= 3S$

$(1+1+(N-1))$ per somme $\quad \frac{(N-1)N}{2} \cdot (N+1) = 3S$

② $\bullet \quad \bullet \quad \boxed{\bullet}_{k+1} \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \qquad (N+1)$

Scelgo centrale, scelgo uno a sx e uno a dx

$K \qquad N-K$

$$\sum_{K=1,\,0}^{N-1,\,N} k(N-k) = \binom{N+1}{3}$$

8) Y = Sottoinsiemi di 2 elementi $\qquad 1 \quad 2 \quad \overbrace{3 \quad 4 \quad \dots \quad n}^{N-2}$

$$\sum_{A \in Y} \min(A) = \underset{\min(A)}{1} \cdot \underset{\#\text{ Sottoinsiemi con MIN} = 1}{(N-1)} + 2 \cdot (N-2) + 3 \cdot (N-3) + \dots = \sum_{K=1}^{N} K(N-K)$$

9) $|X| = n, \quad Y = \mathcal{P}(X)$

$$\sum_{(A,B,C) \in Y^3} |A \cap B \cap C| =$$

$$\sum_{A,B,C,e} 1 = \sum_{A,B,C} \underbrace{\sum_e 1_{\boxed{e \in A,B,C}}}_{\text{"}|A \cap B \cap C|\text{"}} = \sum_e \sum_{A,B,C} 1_{\boxed{A,B,C \ni e}} = 8^{N-1}$$

Conto le quaterne $\boxed{(A, B, C, e)}$ con $e \in A \cap B \cap C$

Fisso e → ho $N-1$ elementi da distribuire tra A, B, C

$$(2 \cdot 2 \cdot 2)^{N-1}$$

$\in A$ $\in B$ $\in C$

o no o no o no

Totale $N \cdot 8^{N-1}$

N: scelte per e

8^{N-1}: scelte per gli altri

$$\sum |A \cup B| \qquad (A, B, e)$$

$e \in A$ ma non in B

$e \in B$ " A

$e \in A, B$

10) 8 prob facili, 4 medi. Tutti hanno risolto 11 prob.

$$256 = \sum_{F,M} \# \text{ studenti che l'hanno risolto} = \sum_{F,M,s} \text{ t.c. studente } s \text{ ha risolto } F,M$$

Tipo 1 $7+4$ → 28 coppie

Tipo 2 $8+3$ → 24 coppie

x = studenti di tipo 1, y di tipo 2

$$28x + 24y = 256$$

$$7x + 6y = 64 \qquad \text{(Equazione di Bezout)}$$

$$7 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 28 + 36 = 64 \qquad x = 4,\ y = 6 \qquad TOT = 10$$

11) $$\sum_{i=0}^{K} \binom{a}{i}\binom{b}{K-i} = \binom{a+b}{K}$$

a $\square$ $\square$ b scelgo K

a maschi, b femmine

Quanti sottogruppi di K persone ci sono?

0 Mondi e K femmine $\binom{a}{0}\binom{b}{k}$ MODI

1 Ma e K-1 F $\binom{a}{1}\binom{b}{k-1}$

2 M K-2 F $\binom{a}{2}\binom{b}{k-2}$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{a}{i}\binom{b}{k-i} = \binom{a+b}{k}$$

12) N giocatori

$V \to 2$
$P \to 1$
$S \to 0$

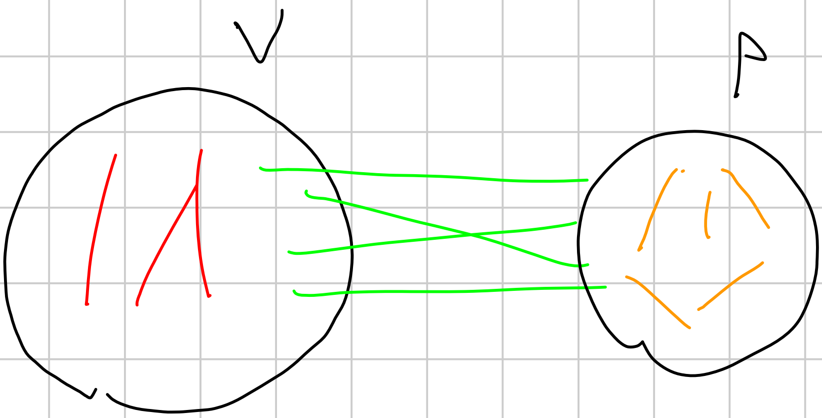
Gli ultimi 10 della classifica (Perdenti) i punti N-10 vincenti.

Quanto vale N.

a_i = punti che fa contro i P

b_i = punti che fa contro i V

$a_i = b_i$



= +

$S_1 = \sum_{i \text{ perdente}} a_i$

$S_2 = \sum_{i \text{ VINC}} b_i$

$S_1 = S_2$

$A_1 = \sum_{\text{VINCENTI}} a_i$

$A_1 = A_2$

$A_2 = \sum_{\text{PERDENTI}} b_i$

OSS $2+0 = 1+1 = 2$

$\binom{N}{2}$ partite 2 punti

$$\sum_{\text{TOTAL}} \text{PUNTI} = \binom{N}{2}\cdot 2 = N(N-1)$$

$$\sum_{P-P} \text{punti} = \binom{10}{2}\cdot 2 = 90$$

Somma punti perdenti vs perdenti

$$\sum_{V-V} \text{punti} = \binom{N-10}{2}\cdot 2 = (N-10)(N-11)$$

$$\sum_{P-V} \text{punti} = 10(N-10)\cdot 2 = 20(N-10)$$

$$= \underbrace{\sum \text{punti che guadagnano i } P}_{S_2} + \underbrace{\sum \text{punti che guadagnano i } V}_{A_2} = S_2 + A_2 = S_1 + A_1$$

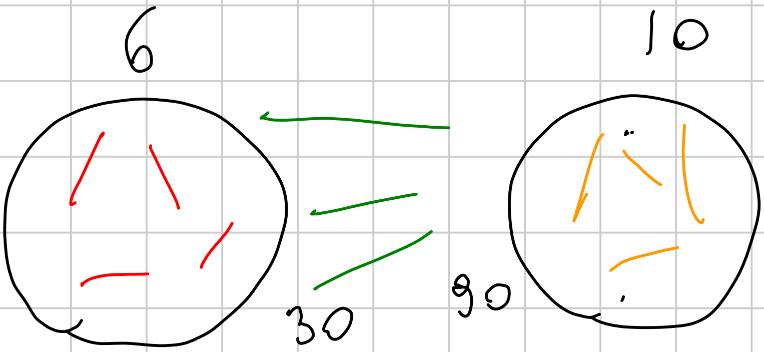
$$S_1 = \binom{10}{2}\cdot 2 \qquad S_2 = \binom{N-10}{2}\cdot 2$$

$$20(N-10) = 90 + (N-10)(N-11)$$

$$N^2 - 21N + 110 + 90 = 20N - 200$$

$$N^2 - 41N + 400 = 0 \qquad N = \frac{41 \pm \sqrt{1681-1600}}{2} = \frac{41\pm 9}{2} \begin{cases} 25 \\ 16 \end{cases}$$

N=16 IMPOSSIBILE (N=25 SI PUÒ FARE)



$S_1 = 90$

$A_1 = \binom{6}{2}\cdot 2 = 30$

• $N = 25$ trovata una configurazione!

Problema x CASA

N intero, $2 \nmid N$, $3 \nmid N$

C'è un N-agono regolare i cui vertici sono colorati con

3 colori. Il numero di vertici di ogni colore è dispari

- Dimostrare che esiste un triangolo isoscele con vertici di colore diverso