SENIOR 2019 – C2

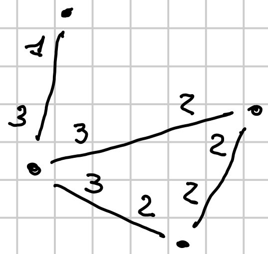
Titolo nota 07/09/2019

GRAFI E DOUBLE COUNTING

Un grafo è insieme di vertici e archi

A ogni vertice è associato un grado = numero di archi uscenti

- Quanto fa $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2S$ perchè sommando i gradi conto ogni arco due volte



- Quanto fa $\sum_{v \in V} \deg^2(v)$?

La somma delle etichette fa $\sum \deg^2(v)$

Ma è anche $\sum_{s \in S} (\deg u + \deg v)$

Dimostrare che esistono solo 5 solidi platonici.

- V vertici
- S spigoli
- F facce
- d grado di ogni vertice
- e lati di ogni faccia

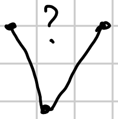
- $F + V = S + 2$
- $dV = 2S$
- $Fe = 2S$

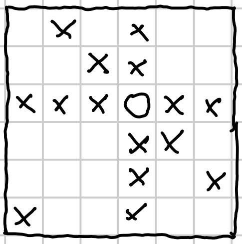
Sostituisco $\frac{2S}{e} + \frac{2S}{d} = S + 2 \Rightarrow \frac{1}{e} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$

Grafo con $12K$ vertici, $\deg = 3K+6$

Per ogni coppia N che stringono la mano a entrambi.

Trovare i K possibili

Sol. Contare #  $= Q$



$$Q = \binom{12k}{2} N = 12k \binom{3k+6}{2}$$

$$12k-1 \mid (3k+6)(3k+5)$$

$$12k-1 \mid 175 \quad \Rightarrow \quad k=3$$

PIGEONHOLE

Se $N+1$ piccioni vengono messi in N casette, allora una casetta ha due piccioni (almeno).

Generalizzata: se ho numeri (anche reali) con media m, allora $\exists$ elemento $\geq m$

Grafo qualsiasi. Esistono due vertici con lo stesso grado.

Supponiamo n vertici, $\deg v = 0, \dots, n-1$

Se ho un vertice di grado $n-1$, allora nessuno ha grado 0.

Concludo con PH.

Abbiamo n città, collegate da strade di lunghezza diversa. Ci sono r strade.

Esiste un percorso lungo $\geq \frac{2r}{n}$ composto da strade di lunghezza crescente.

Sol. Piazziamo n ciclisti, uno per città. Al primo passo, scambiamo i ciclisti sulla strada più corta.
Poi scambiamo quelli sulla seconda più corta, ecc..

In totale hanno percorso $2r$ strade, quindi $\exists$ ciclista che ne ha percorse $\geq \frac{2r}{n}$

1. In una gara ho m candidati e n giudici. Ogni giudice valuta ogni candidato come PASS o FAIL. ($n \geq 3$ dispari)

Ogni coppia di giudici è d'accordo su al più k candidati

Mostrare $$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$$

2. (*) n punti sul piano. Per ogni coppia, $\exists$ pto equidistante.
ma per ogni terna non esiste un punto equidistante dai tre

Per quali n è possibile?

3. (*) 20 città, collegate da 18 linee aeree, ognuna visita ciclicamente 5 città. Per ogni città passano almeno 3 aerei.
Per ogni coppia di città ho ≤ 1 aereo che le collega direttamente
Mostrare che da ogni città si può raggiungere ogni altra.

4. 72 stagisti che fanno il TI. Ognuno risolve ≥ 1 problema.

$\exists$ insieme di problemi $\neq \emptyset$. # stagisti che li risolvono è pari.

5. Calcolare $\displaystyle\sum_{d \mid n} \varphi(d)$

6. Grafo, ogni vertice di grado 3. Parto da un vertice e svolto a sx, poi a dx, ... Allora torno alla città iniziale

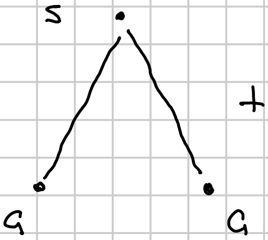
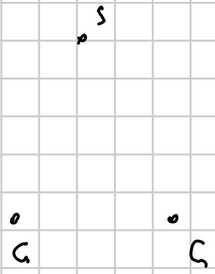
7. Un giocatore di scacchi ha 77 giorni per prepararsi per un torneo. Gioca almeno 1 partita al giorno, ma in totale ≤ 132.

$\exists$ set di giorni consecutivi in cui gioca esatt. 21 partite.

8. 5 punti blu nel piano a coord. intere. $\exists$ un segmento con estremi blu che contiene un punto a coord. intere.

9. Stanza di area 5, 9 tappeti di area 1. $\exists$ due tappeti che si sovrappongono $\geq 1/9$

SOLUZIONI

1. $\#$  $+ \#$  $= Q$ $\qquad n = 2r+1$

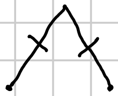
$$Q \leq k\binom{2r+1}{2}$$

Fisso studente di grado d $\quad \binom{d}{2} + \binom{n-d}{2}$

Il caso peggiore è $d = r, r+1$

$$Q \geq m\left[\binom{r}{2} + \binom{r+1}{2}\right]$$

Combinando le 2 si ottiene la tesi.

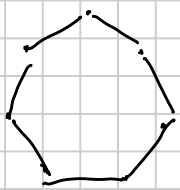
2. Contiamo $\#$  $= Q$

$$Q \geq \binom{n}{2}$$

Fissiamo un punto. $\forall$ distanza ci sono ≤ 2 punti distanti d.

$$Q \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor n$$

Ma la parte intera non può abbassare il valore! n dispari!

Poligono 

3. $n = \#$ componente piccola $\qquad a = \#$ aerei in quella comp.

$$3n \leq 5a \leq \frac{n(n-1)}{2} \implies n \geq 7$$

$\boxed{6n \leq 10a \leq n(n-1)}$ (n dispari) $\qquad 6n \leq 10a \leq n(n-2)$ (n pari)

$n = 7$ NO $\qquad n = 8$

$n = 9 \quad a = 6, 7 \qquad n = 10 \quad a = 6, 7, 8$ NO

$n = 11 \quad a = 7, 8, 9, 10, 11$

Ma il caso $n=9$ lo escludiamo: $a=7$ per tornare con $n=11$

Il sottografo ha 36 archi al massimo, e ho 35 tratte. I vertici dell'arco in meno sono di grado dispari

4. Contiamo coppia insieme di problemi — stagista che li risolve

S = stagisti $\quad P$ = Problemi

$$\sum_{s\in S} 2^{R(s)} = \sum_{A\subseteq P} S(A) = 72 + \sum_{A\neq\emptyset} S(A) \Rightarrow \exists A : S(A) \text{ pari.}$$

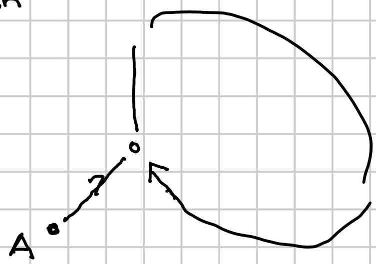
5. $\sum_{d\mid n} \varphi(d)$ $\qquad \varphi(d) = \#\left\{k\le n : (k,n) = \frac{n}{d}\right\}$

Infatti, $\quad$ se $(a,d)=1$ e $a\le d \Rightarrow a\frac{n}{d}\le n$ e $\left(a\frac{n}{d}, n\right) = \frac{n}{d}$

Ma ogni elemento lo conto 1 volta!

$$\sum_{d\mid n}\varphi(d) = n$$

6.



Una posizione è l'arco orientato su cui sono e in due direzione sto per svoltare. Riesco a risalire a ritroso!

Quindi a un certo punto sono in una posizione in cui sono già stato!

Considero la prima volta per cui accade: se non fosse il primo arco, considero la posizione precedente a entrambe e ho un altro duplicato.

7. $f(n)$ il numero di partite fino al giorno n.

$$f(1),\dots,f(77),\ f(1)+21,\ f(2)+21,\ \dots,\ f(77)+21$$

Sono numeri tra 1 e 153, ma sono 154!

Ce ne sono due uguali $\rightarrow \square$

8. Supponiamo di avere $(a,b) - (c,d)$

Ho un punto a coord intere sse $MCD(a-c, b-d) \neq 1$

In particolare, è vero se $a \equiv c \ (2)$ e $b \equiv d \ (2)$

Ma ho solo 4 possibilità per un punto (mod 2) $\Rightarrow$ esistono due punti con la stessa parità

9. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa.

Il primo tappeto occupa area 1.
Il secondo occupa area nuova $> \frac{8}{9}$

Il terzo occupa area $> \frac{7}{9}$

$\vdots$

Il nono occupa area $> \frac{1}{9}$

In totale ho coperto > 5 pavimento, assurdo.

Altra soluzione (che poi è la stessa)

Ho area totale dei tappeti $= 9$; quindi ho ≥ 4 u.d.t. coperte.

Per ogni unità di area coperta, considero la coppia (tappeto padrone dell'area, tappeto scoperto)

$$\sum_{\text{coppie}} \text{overlap} \geq 4$$

Le coppie sono 36 $\qquad \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$