SENIOR 2019 - C3 Basic

Titolo nota 09/09/2019

INVARIANTI

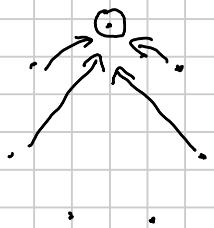
Abbiamo un problema in cui c'è una posizione che si evolve con delle mosse.

Un invariante è una quantità che non cambia.

Es.

n-agono regolare, una pedina su ogni vertice. Per quali n si possono spostare tutte su un vertice, dove una mossa è muovere una moneta in senso orario e una in senso antiorario.

n dispari



si risolve

Idea: $\sum$ posizioni $\pmod n$ non cambia

All'inizio è $\frac{n(n-1)}{2}$, alla fine è 0

MONOVARIANTE

E' una quantità che (de)cresce sempre

Es Alberto e Barbara giocano. Ci sono n pile di monete,

- togliere una moneta
- dividere una pile in due pile.

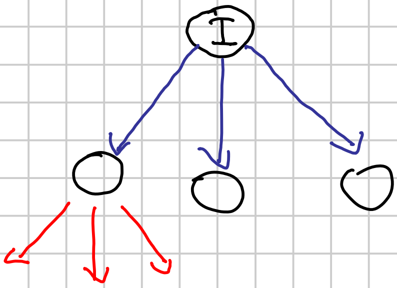
Dimostrare che il gioco finisce.

Idea: $M = 2\#\text{monete} - \#\text{pile} \geq 0$

GIOCHI

- Un gioco è a informazione perfetta
- Un gioco è a somma zero quando le somme dei punteggi è 0.

<u>Teorema</u> Ogni gioco a informazione perfetta e a somma zero ammette un punteggio finale tale che
- ogni giocatore può raggiungere indipendentemente da cosa fanno gli altri.



$\boxed{\text{Es}}$ (IMO 2018 - 4)

Scacchiera 20x20, Alessandra e Bobo che piazzano a turno dei cavalli bianchi e neri risp.

Alessandra non può mettere un cavallo in una casella "minacciata" da un cavallo del <u>suo</u> colore

Trovare il massimo num. di cavalli che può piazzare A $\forall$ strategia di B

- Alessandra può metterne almeno 100.

Alessandra piazza tutto sul bianco. Anche se Bobo occupa a sua volta le bianche, 100 cavalli li riesce a piazzare

-

1	5	6	2
3	7	8	1
4	8	7	3
2	6	5	1

Ogni volta che A muove su una casella, B muove su quella corrispondente

1 oppure 8
2 oppure 7
3 oppure 6
4 oppure 5

Tassello con 4x4.

1. Abbiamo $\{8,10,15\}$ e una mossa è

$$a,b \longmapsto \frac{3a-4b}{5}, \frac{4a+3b}{5}$$

È possibile raggiungere $\{12,13,14\}$? Oppure ottenere $\{x,y,z\}$
$|12-x| \leq 1$, $|13-y| \leq 1$, $|14-z| \leq 1$?

2. Su un n-agono ci sono pedine. Nel primo vertice 1, nel secondo 2, ..., nell'ultimo n, la mossa è orario + antiorario

In quali vertici si possono portare tutte?

3. Abbiamo 2019 carte, da un lato bianche e da un altro nere. Sono in fila. Scelgo 50 carte consecutive, quella a sx bianca, e capovolgo tutte. Dimostrare che dopo finite mosse non si può più muovere.

4 In un pentagono traccio le diagonali, e piazzo una lampadina in ogni intersezione tra lati e/o diagonali,

Scelgo un segmento e cambio stato a ogni lampadina.

Si può portarle da tutte accese a tutte spente?

5. A e B giocano. Alla lavagna c'è scritto un numero intero positivo n

A turno, diminuiscono n di un valore a scelta tra 1, ..., K.

Trovare chi vince al variare di n, K. (vince chi arriva a 0)

6. Abbiamo i numeri 1 2 ... 100 in fila, A turno, A e B piazzano +, −, · negli spazi vuoti. Mostrare che A

- può ottenere un numero pari
- // // // // dis//

7. Scacchiera n×n, A e B piazzano a turno cavalli in modo che non siano minacciati da nessun avversario. Perde chi non può più muovere. Chi vince?

8. I numeri da 0 a 256 scritti sulla lavagna. A ne cancella 128, B ne cancella 64, ... B ne cancella 1. B paga |differenza| ad A. Se A e B sono fortissimi, quanto paga B?

SOLUZIONI

1. $x^2+y^2+z^2$ è invariante. All'inizio è 389, alla fine è tanto.
Per il secondo punto, alla fine $\geq 11^2+12^2+13^2 > 400$

2. Usiamo come invariante $\sum_m p(m) \pmod n$

All'inizio è $\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{k\cancel{n}(n+1)}{2}$

$6 \mid (n+1)(2n+1-3k)$

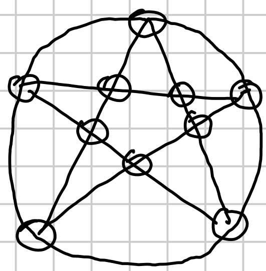
Supponiamo che l'invariante sia soddisfatto
Usiamo una moneta per portare a posto le altre
L'invariante garantisce che l'ultima moneta vada a posto.

3. Associo alle bianche 1 e alle nere 0

$$\sum_{i=1}^{2019} 2^{2019-i} n(i)$$

Questo è monovariante

In generale, posso trovare n-upla di quantità. Se mostro che la prima quantità che cambia decresce, allora a un certo punto finisco

4  # lampadine centrali accese (mod 2)

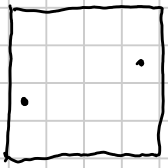
5. Se un giocatore toglie a, l'altro toglie $k+1-a$
Se $k+1 \mid n$, allora B può vincere
Altrimenti, A toglie in modo da lasciare a B un multiplo di $k+1$

6. Ogni dispari tranne 1 ha due spazi vicini

Se vuole ottenere un pari, piazza · tra 1 e 2. Altrimenti mette +

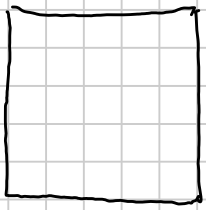
A questo punto A mette un · vicino al numero dispari su cui ha agito B.

7. n pari.



Vince B. Metto in modo diametralmente opposto

n dispari



Vince A. Piazza il cavallo in quella centrale e poi come prima.

Bonus. Farlo con alfieri al posto dei cavalli.

8. Idea: A cancella i numeri uno sì e uno no.
B cancella tutti i più alti

Se uno scrive le mosse viene 16

- $\exists$ una strategia di A $\forall$ strategia di B $\quad u \geq 16$
- $\exists$ una strategia di B $\forall$ strategia di A $\quad u \leq 16$

- A cancella i numeri in modo alternato

  In questo modo, min(differenze) almeno raddoppia.

- Idea: divido l'intervallo a metà: c'è una metà con meno numeri cancello quella metà: il max delle differenze dimezza ogni volta (almeno).