G2 base — Linda

Titolo nota — 09/09/2019

Isometrie
Omotetie
Inversione circolare

# ISOMETRIE

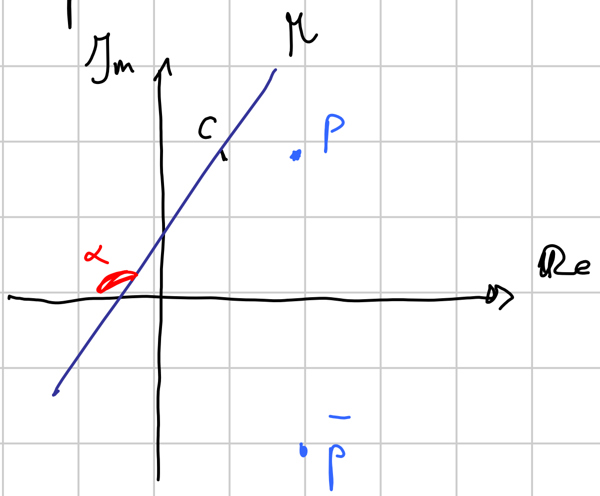
Conservano distanze e forme
Angoli mantengono la stessa misura

- Traslazione
  Definita da un vettore $\vec{v}$
  $$P \to P + \vec{v}$$

- Rotazione
  Serve centro $C$, angolo $\alpha$ tra 0 e 360
  Senso antiorario
  In complessi:
  Se $C$ = origine $\quad z \to z e^{i\alpha}$
  Altrimenti $\quad z \to (z - c) e^{i\alpha} + c$

- Riflessione
  Definita con una retta $r$.
  Ogni punto va nel suo simmetrico rispetto ad $r$

In completo



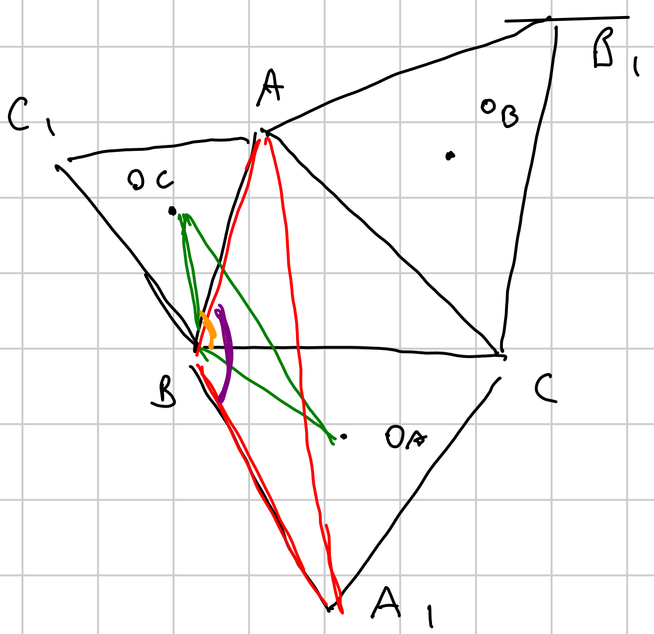

$$z \longrightarrow (z-c) \longrightarrow (z-c)\,e^{i\alpha} \longrightarrow \overline{(z-c)\,e^{i\alpha}}$$

↓ sposto l'origine ↓ ruotato r ↓ coniugo

$$\longrightarrow \overline{(z-c)\,e^{i\alpha}} \cdot e^{-i\alpha} + c$$

$$\longrightarrow \overline{(z-c)}\,e^{-2i\alpha} + c$$

• Esercizio 1 : Teorema di Napoleone




Ten: $\Delta O_A O_B O_C$ è equilatero

Consideriamo rotazione di centro $B$ di $30^\circ$

$BA_1 \to BO_A$

$AB \to BO_C$

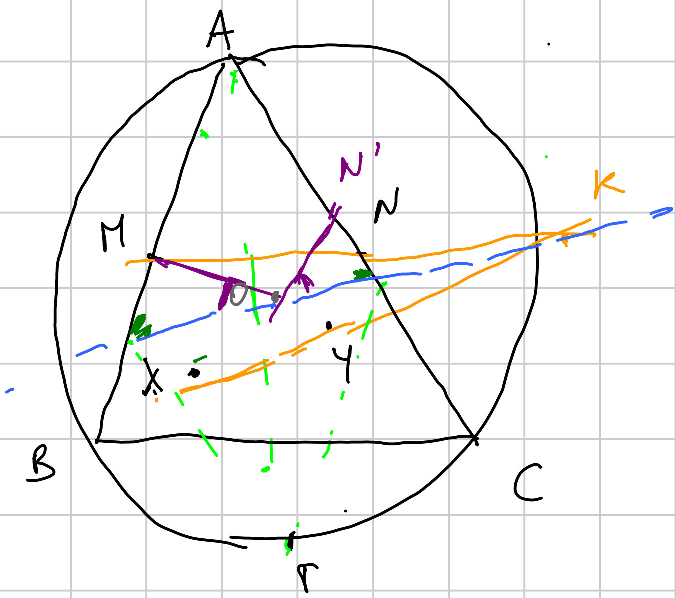
$\triangle ABC_1$, $BCA_1$ sono equilateri

$BA = BO_C\sqrt{3}$

$BA_1 = BO_A\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad AA_1 = O_AO_C\sqrt{3}$ e si chiude

• Esercizio 2 ISL 2013 G2




$M$ pto medio $AB$

$N$ pto medio $AC$

$T$ pto medio arco $BC$ (non $A$)

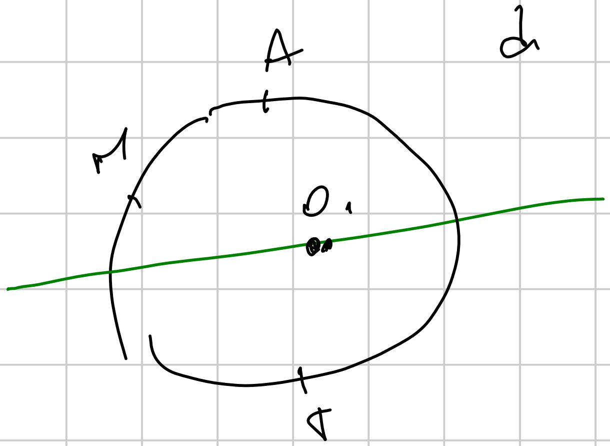
Tesi: $AK = KT$

$X = \odot AMT \cap$ asse di $AC$

$Y = \odot ANT \cap$ asse di $AB$

Idea sensata: simmetria rispetto all'asse di AT

O sta sull'asse di AT
Dove va retta OM? Va in retta ON!
(Considero N' su AC tale che ON' sia la simmetrica di OM...)

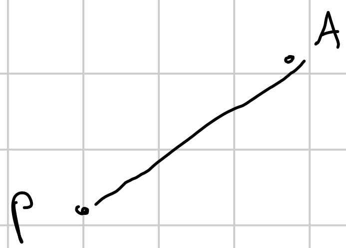



⊙AMT va in se stessa
⊙ANT va in se stessa

M va in X
N va in Y $\Rightarrow$ l'intersezione tra MN e XY sta sull'asse di AT ✓

## OMOTETIE

Definire con un centro C e fattore $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$




$A \to A'$
Se $\lambda > 0$ A' sta su semiretta PA
Altrimenti sull'altra semiretta

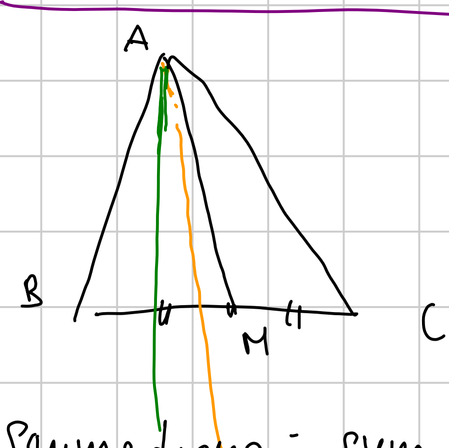
Conservano parallelismo e angoli

Non conservano lunghezze e aree

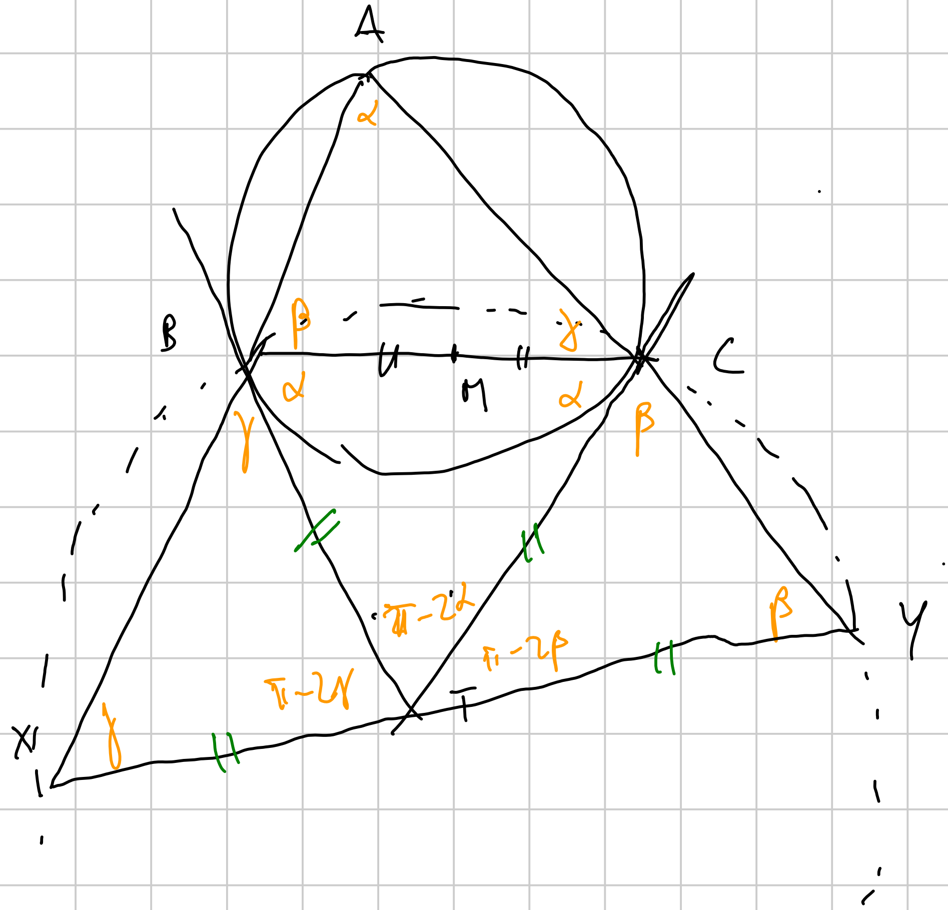
$A'B' = |\lambda| AB$

Aree: fattore $\lambda^2$

• Esercizio 3: lemma della simmediana




Simmediana: sym AM wrt bisettrice di $\angle BAC$

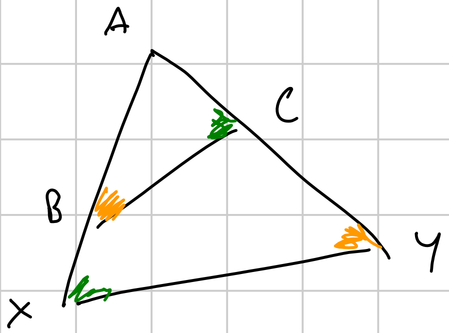



Tesi: AT è A-simmediana di $\Delta ABC$

$3\pi - 2(\alpha+\beta+\gamma) = \pi$

Dimostriamo che X, T, Y sono allineati

Antiparallele




$\Rightarrow$ BC, XY sono antiparallele

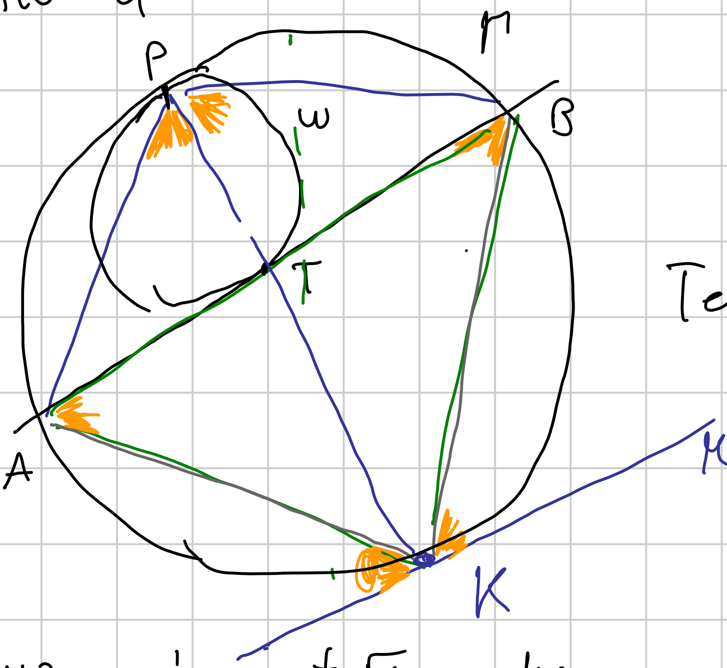
Simmetria wrt bisettrice di $\angle BAC$, Omotetia fattore $\frac{AC}{AX}$

$X \to C$

$Y \to B$

$\Gamma \to$ punto medio $BC$

• Esercizio 4




$\Gamma, \omega$ tangenti in $P$

$AB$ tange $\omega$ in $T$

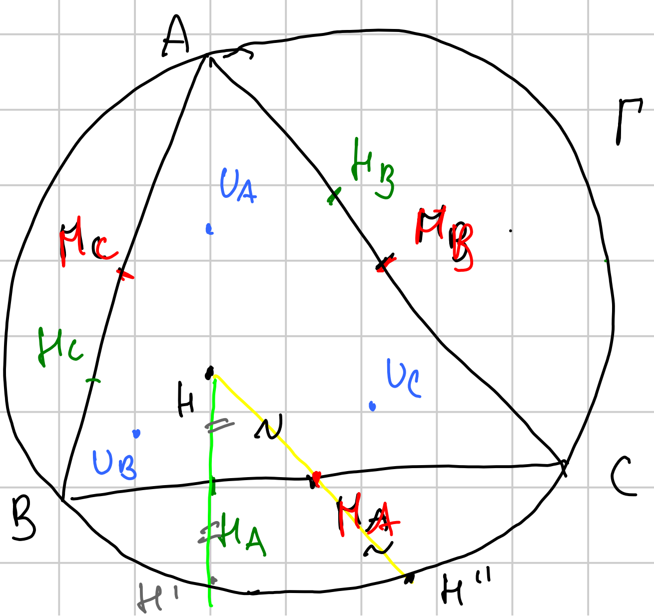
Tesi: $\angle APT = \angle TPB$

Facciamo un'omotetia che manda $\omega$ in $\Gamma$

$\frac{\text{raggio } \Gamma}{\text{raggio } \omega}$

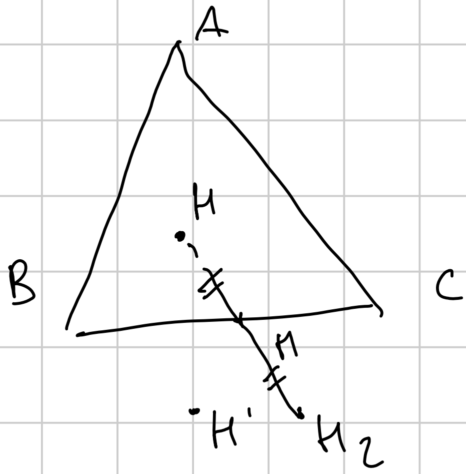
Dove va $AB$?

<u>Feuerbach</u>

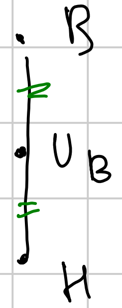


$M_A, M_B, M_C$ punti medi dei lati
$H_A, H_B, H_C$ piedi delle altezze
$H$ ortocentro
$U_A$ pto medio $AH$ e ciclici

Esiste una circonferenza per
$M_A \; M_B \; M_C \; H_A \; H_B \; H_C \; U_A \; U_B \; U_C$




$H'$ sym di $H$ wrt $BC$ $\Rightarrow$ $H' \in \odot ABC$
$H_2$ sym di $H$ wrt $M$ $\rightarrow$ $H_2 \in \odot ABC$




Omotetia centro $H$ fattore 2
$U_A \rightarrow A$
$U_B \rightarrow B$
$U_C \rightarrow C$
$H_A, H_B, H_C$ vanno nei simmetrici di $H$ wrt lati
$M_A, M_B, M_C$ vanno nei simmetrici di $H$ wrt punti medi lati

tutto questo sta su $\Gamma$

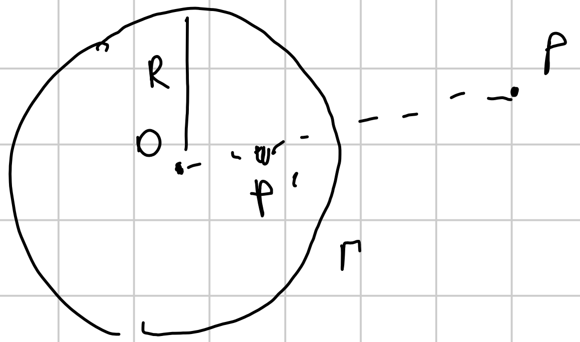
Esercizio: mostrare che centro della circonf Feuerbach è pto medio di $OH$

## INVERSIONE CIRCOLARE

Definita con una circonferenza
( ci serve un centro di inversione e un raggio )

Ogni punto $\setminus$ {centro} $\rightarrow$ altri punti
(tutto tranne il centro)

Vediamo dove va il punto $P$




$OP \cdot OP' = R^2$

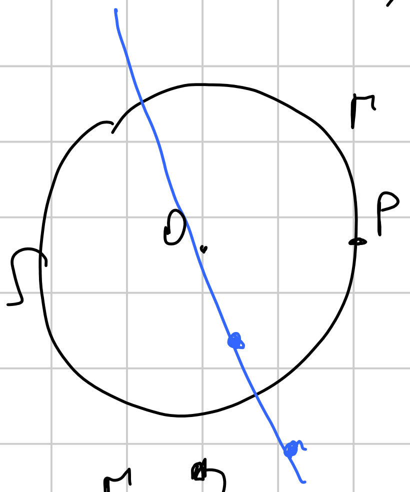
$OP' \cdot OP'' = R^2$

$P \rightarrow$ punto $P'$ sulla semiretta $OP$
tale che $OP \cdot OP' = R^2$

Quello che sta dentro a $\Gamma$ va fuori, quello che sta fuori va dentro

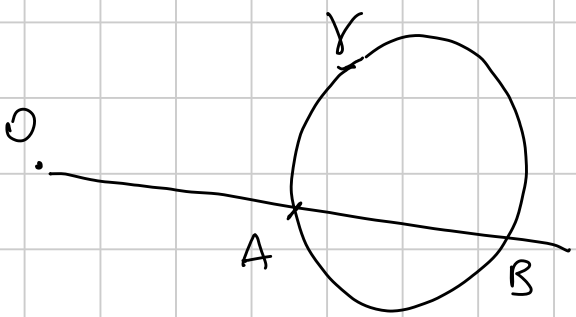
In complessi se il centro è l'origine

$$z \to \frac{R^2}{\bar{z}}$$



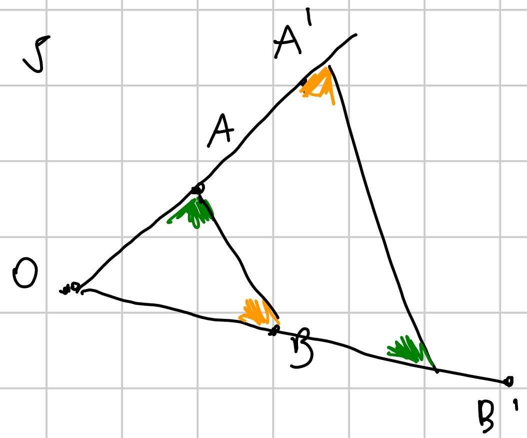

- Γ Ω
- rette passanti per O → rette passanti per O
- rette non passanti → circonferenze per O
- circonferenze per O → rette non per O
- circonferenze non per O → circonferenze non per O

Fatto utile: circonf. γ resta invariata per inversione se $\text{pow}_\gamma O = R^2$




$$\text{pow}_\gamma O = OA \cdot OB$$

- Esercizio 5




Trovare A'B' in funzione di OA, OB, AB, R (ho invertito centro O, raggio R)

$\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} OA \cdot OA' = R^2 \\ OB \cdot OB' = R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$
$\Rightarrow AA'B'B$ è ciclico

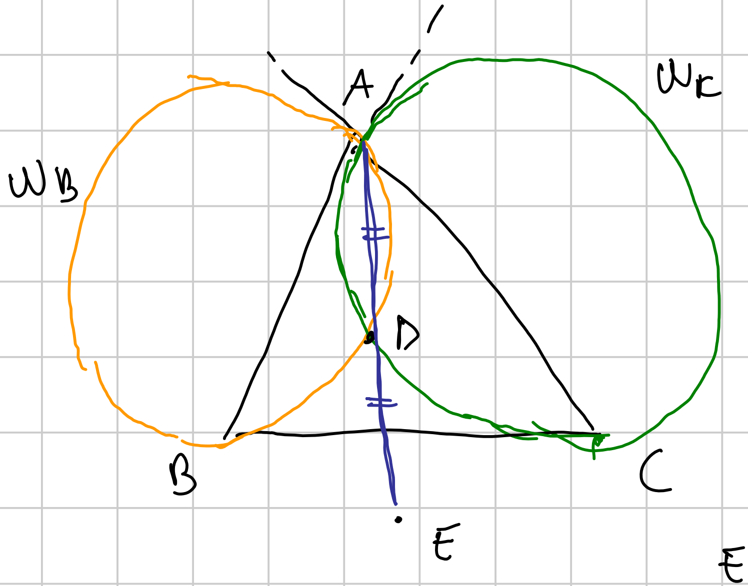
$\rightarrow$

$\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{R^2}{OB \cdot OA}$$

$$\Rightarrow \quad A'B' = \frac{R^2}{OB \cdot OA} \cdot AB$$

• Esercizio 6 (Allenamenti EGMO 2019 - 6°)




$\omega_B$ per B tange AC in A

$\omega_C$ per C tange AB in A

$\{A, D\} = \omega_B \cap \omega_C$

E : sym A wrt D

Ten: $E \in \odot ABC$

Invertiamo in A con raggio AD

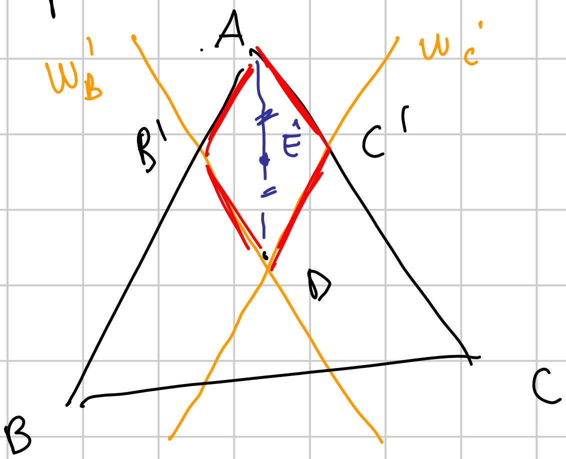
$B \rightarrow B'$ sulla retta AB

$C \rightarrow C'$ sulla retta AC

D ↺

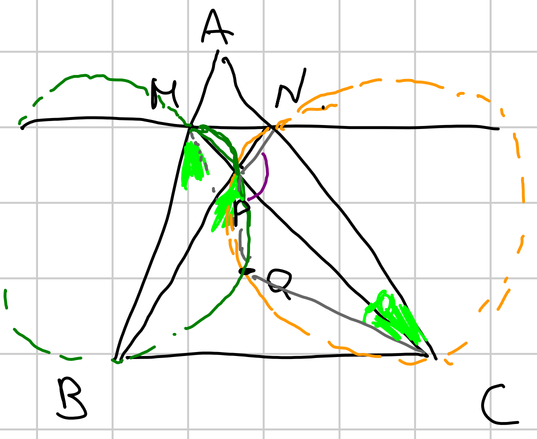
$E \rightarrow E'$ pto medio AD $\qquad AE' = \frac{1}{2} AD \Rightarrow AE' \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot 2AD$

$w_B \to$ parallela ad $AC$ per $D$
$w_C \to$ parallela ad $AB$ per $D$.




B', C', E allineati, da cui la tesi

• Esercizio – BMO 2009-2 (Esercitazione Senior ...)




$MN \parallel BC$

Tesi: $\angle BAP = \angle QAC$

Inversione + simmetria: raggio $\sqrt{\beta\gamma}$ $\left(\sqrt{AB \cdot AC}\right)$, centro $A$
simmetria wrt bisettrice di $\angle BAC$

Angle chasing! $AMQC$ ciclico per angoli verdi
$ANQC$ ciclico analogamente

Inversione + simmetria → wrt bisettrice di $\angle BAC$

↳ centro $A$, raggio $\sqrt{AB \cdot AN}$

$\triangle ABC \sim \triangle AMN \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AN} \Rightarrow \underline{AB \cdot AN = AC \cdot AM}$

Quindi $B \to N$, $N \to B$
$C \to M$, $M \to C$

- $\odot AMQC \to BN$
- $\odot ANQB \to CM$

$\Big\} \Rightarrow Q \to BN \cap CM = P$

---

1) [Teorema di Vecten]

Si costruiscano ~~sui~~ esternamente ai lati di $\triangle ABC$ i quadrati di lato $AB, AC, BC$.
Dimostrare che i centri dei quadrati formano triangolo equilatero.

2) Sia $\triangle ABC$ un triangolo, $\omega$ la circonferenza inscritta tangente ~~a~~ $BC$ in $D$. Sia $T$ il diametralmente opposto di $D$ in $\omega$.
Sia $E$ il simmetrico di $D$ rispetto al punto medio di $BC$.
Dimostrare che $A, T, E$ allineati.

3) [Tolomeo] (se non lo fai sei un babbeo!)

Sia $ABCD$ un quadrilatero, allora

$$AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

e l'uguaglianza se e solo se $ABCD$ ciclico

[hint: inverti in $D$ con raggio arbitrario]

4) [TF Senior 2013]

Sia $\triangle ABC$ un triangolo, sia $D$ l'ulteriore intersezione tra la circonferenza per $C$ e tangente ad $AB$ in $A$ e la circonferenza per $B$ e tangente ad $AC$ in $A$.

Sia $E$ il punto sulla retta $AB$ $(\neq A)$ tale che $BA = BE$.

Sia $F$ l'ulteriore intersezione tra $AC$ e $\odot ADE$.

Dimostrare $AC = AF$

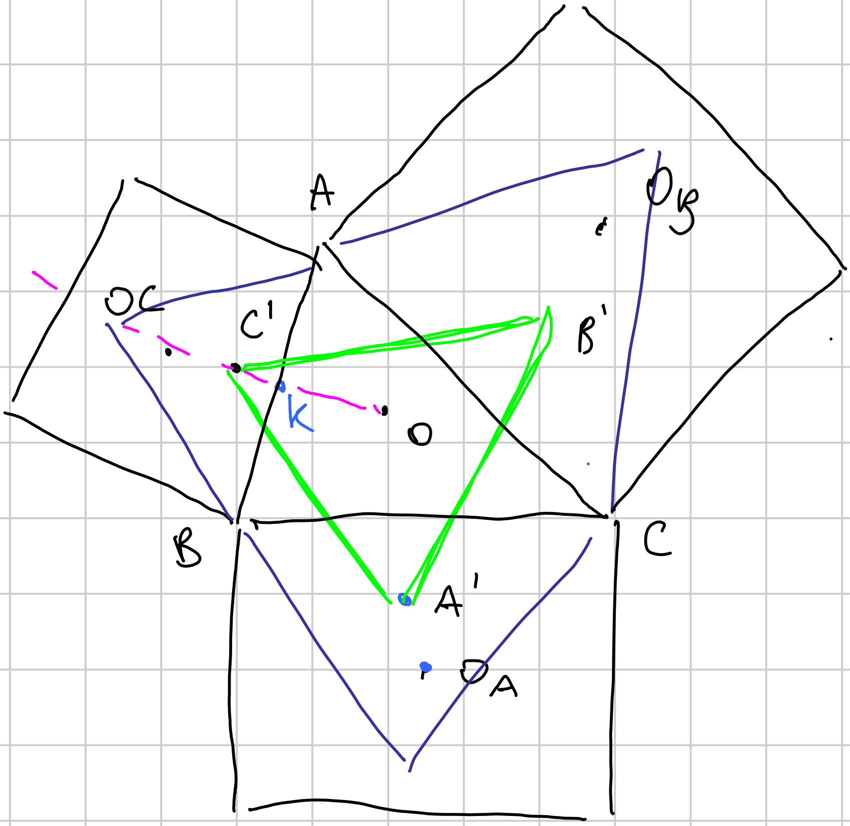
5) [EGMO 2016 - 4]

2 circonf con lo stesso raggio $\omega_1$ e $\omega_2$ si intersecano in $X_1$ e $X_2$.

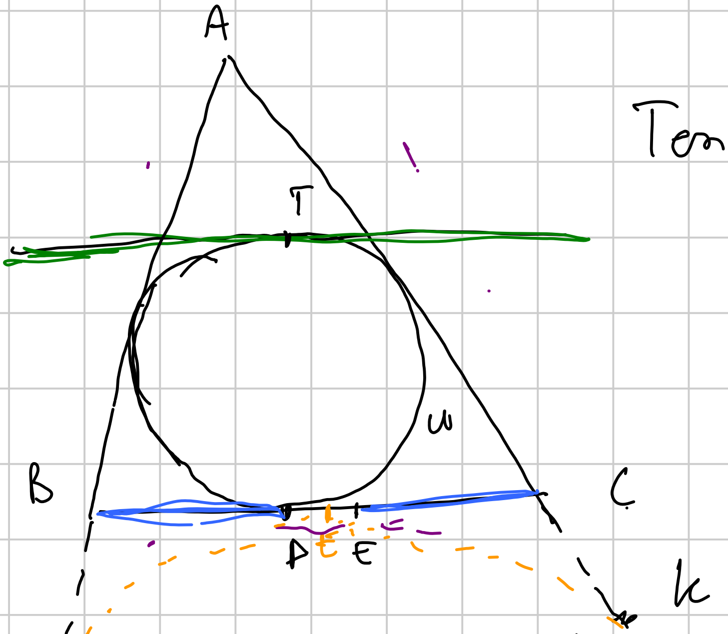
Si prende una circonf $\omega$ tangente esternamente a $\omega_1$ in $T_1$ e internamente a $\omega_2$ in $T_2$

Dimostrare che $X_1T_1$ e $X_2T_2$ si intersecano su $\omega$

1)




2)




Tesi: A, T, E allineati

$CK = AK - AC$

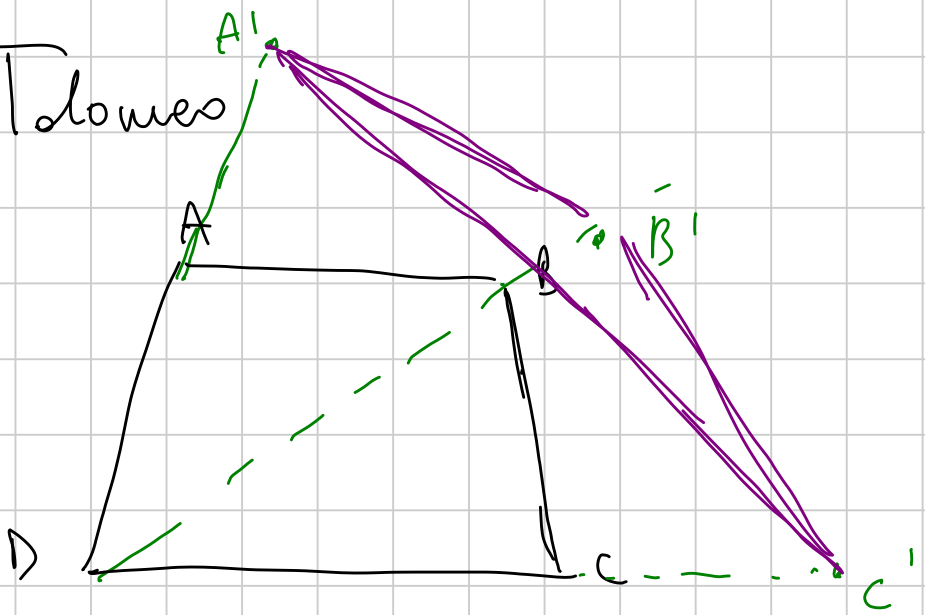
E è il punto di tangenza dell'A-excerchio con BC

$$BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

$$E'C = \frac{BC + AB - AC}{2} = \frac{BC + AB + AC}{2} - AC$$

Idea: omotetia che manda ω in A-excerchio (l'immagine di T in quest' omotetia è E) $\Rightarrow$ A, E, T sono allineati

3) Tolomeo




Tesi è $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot DC$

Inversione in D

$$A'C' \leq A'B' + B'C',$$

con uguaglianza sse $A', B', C'$ allineati
sse ABCD ciclico

$\boxed{O \equiv D}$

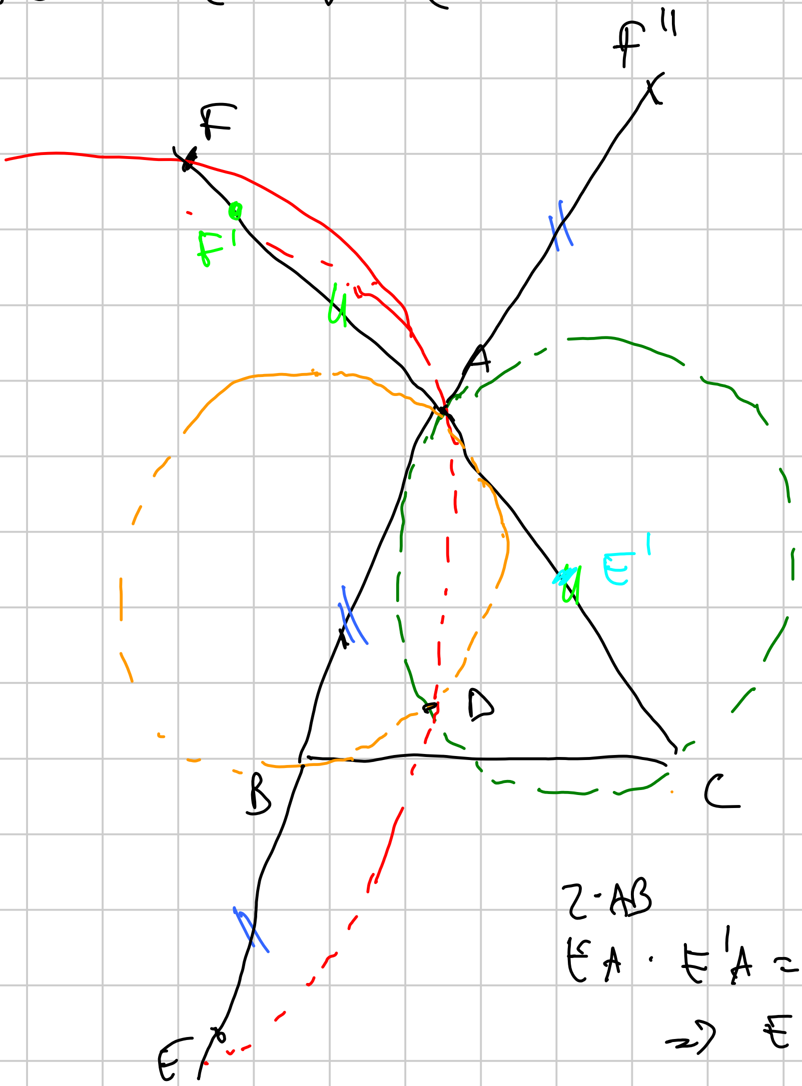
$$A'C' = \frac{R^2}{OA \cdot OC} \cdot AC$$

$$A'B' = \frac{R^2}{OB \cdot OA} AB$$

$$B'C' = \frac{R^2}{OB \cdot OC} \cdot BC$$

Sostituisco e viene

4)




$R = \sqrt{AB \cdot AC}$

$AB = BE$

Teor: $AF = AC$

$2 \cdot AB$

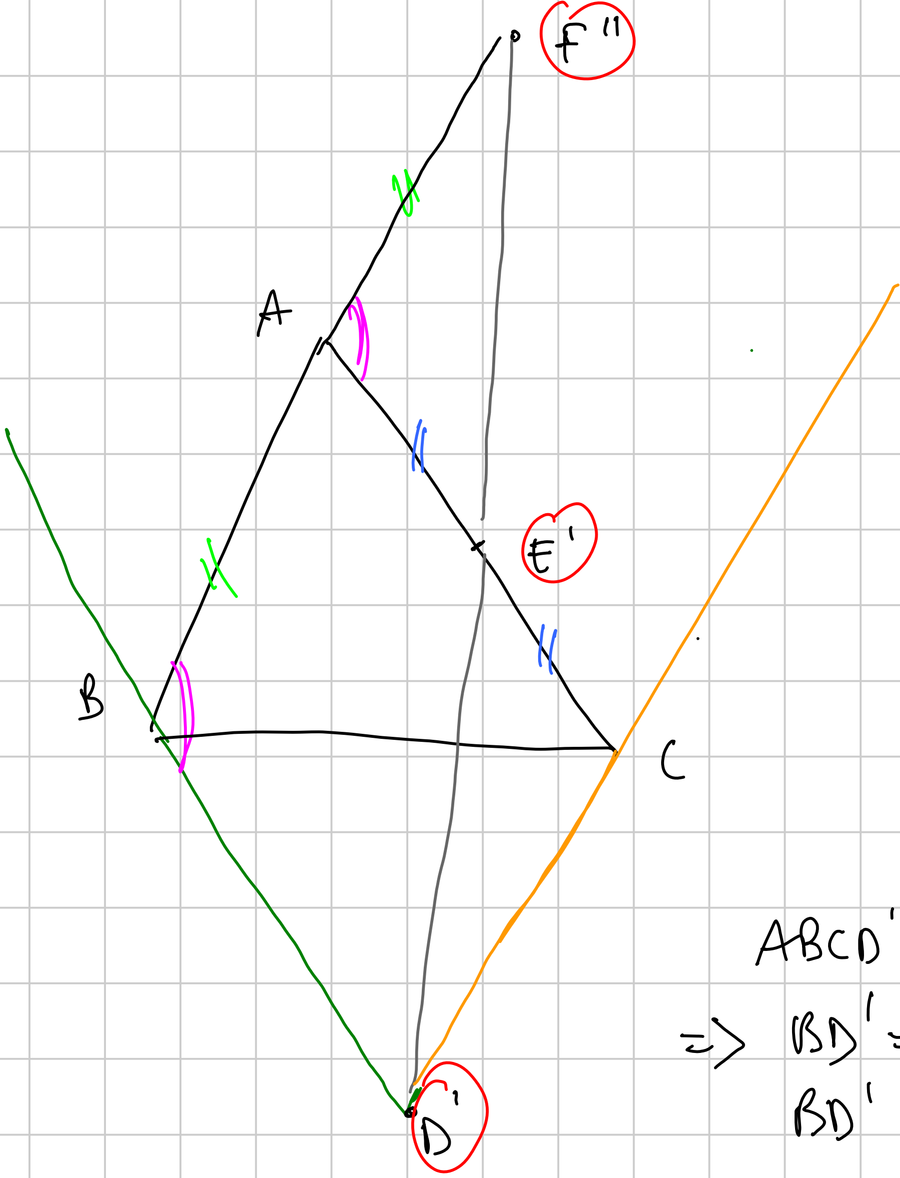
$EA \cdot E'A = AB \cdot AC$

$\Rightarrow E'A = \frac{AC}{2}$

F' il simmetrico di C rispetto ad A

Inversione centro A, $R = \sqrt{AB \cdot AC}$ + simmetria rispetto bisettrice di $\angle BAC$

B e C si scambiano




ABCD' parallelog

$\Rightarrow BD' = AC$

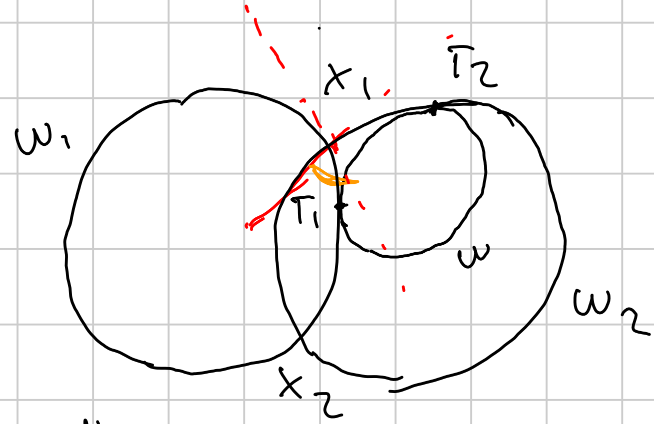
$BD' = 2\,AE'$

$\triangle BD'F'' \sim \triangle AF''E'$

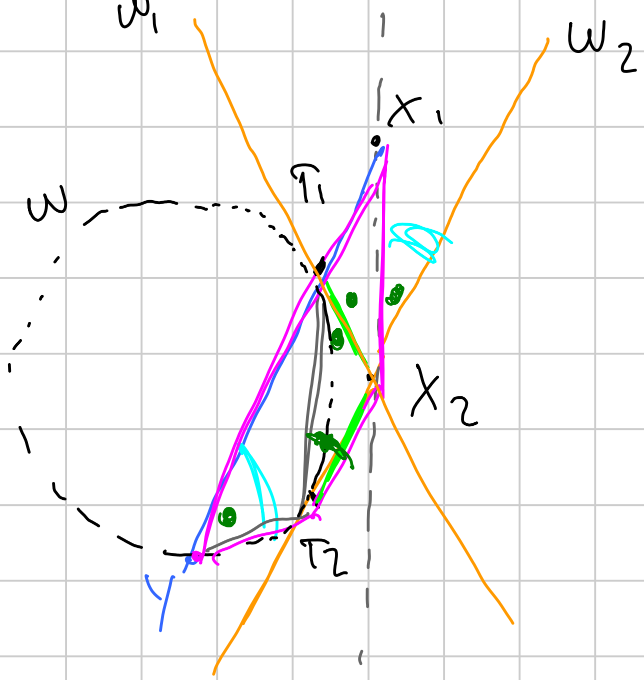
$\Rightarrow \angle E'F''A = \angle DF''A$

da cui l'allineamento.

5) EGMO 2016 - 4




Tesi :
$X_1T_1 \cap X_2T_2 \in \omega$




Tesi $\Leftrightarrow$

$X_1 Y T_2 X_2$
è ciclico

$$\angle X_2T_2T_1 + \angle T_2T_1X_2 = 2 \cdot$$