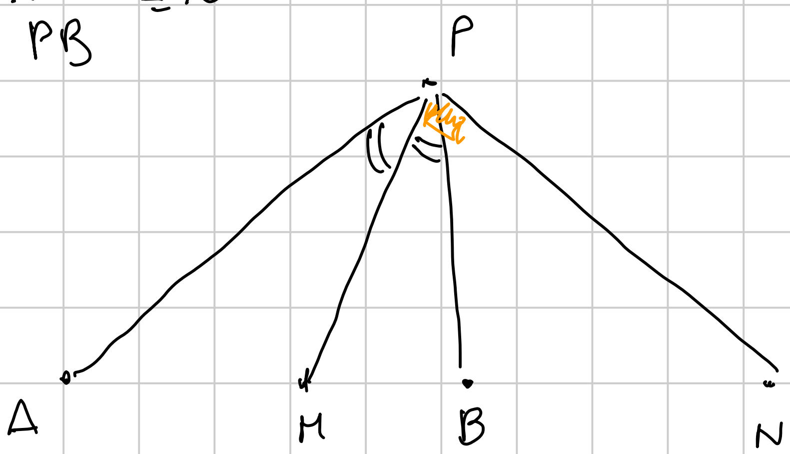
G3 basic Linda

Titolo nota 10/09/2019

$\boxed{\text{APOLLONIO}}$

Dati 2 punti distinti A, B e dato $r \in \mathbb{R}^+$ $(r \neq 1)$ trovare il luogo dei punti P tali che

$$\frac{AP}{PB} = r$$



Prendiamo M, N sulla retta AB tali che

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = r$$

Prendiamo P tale che $\frac{PA}{PB} = r$

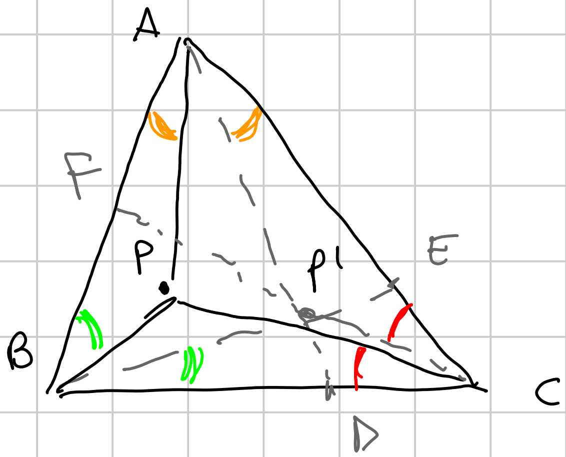
$$\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AN}{NB}$$

$\angle MPN = 90^\circ \Rightarrow P \in$ circonf diametro MN

Esercizio per casa:
Dato ΔABC e dette $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ le circonferenze di Apollonio di ΔABC. (Γ_A passa per A e $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$)
dimostrare che $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ hanno un asse radicale.

$\boxed{\text{CONIUGATO ISOGONALE}}$

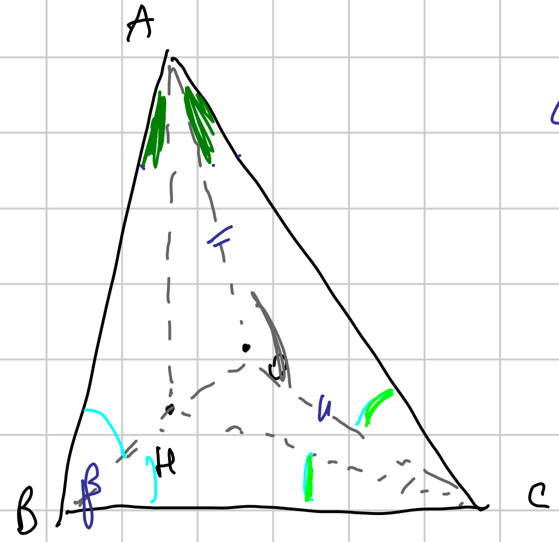


ΔABC, punto P.
$D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$
Tesi: AD, BE, CF concorrono (in P').

P' è il coniugato isogonale di P

Come si dimostra? Ceva trigonometrico

Fatto noto: Dato ΔABC, siano H il suo ortocentro e O il suo circocentro.
Allora H e O sono coniugati isogonali



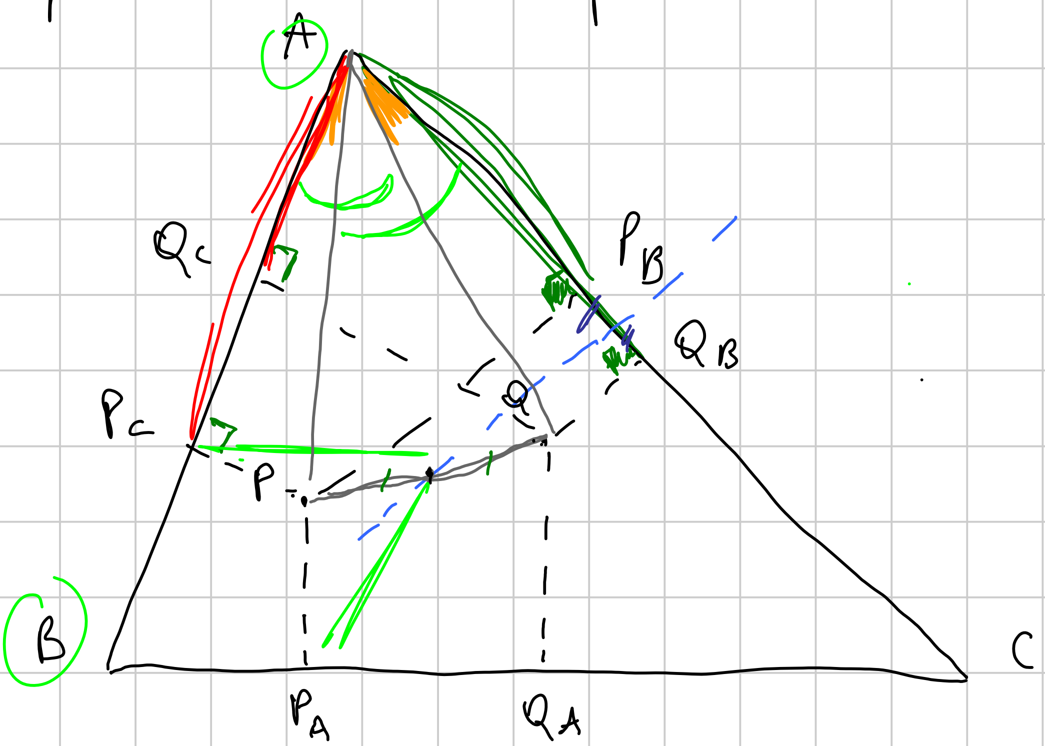
$\angle BAH = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\angle COA = 2\beta$

$\Rightarrow \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$

- Esercizio

Sia P un punto interno ad ΔABC e sia Q il suo coniugato isogonale. Allora le proiezioni di P sui lati di ΔABC e le proiezioni di Q sui lati di ΔABC stanno su una stessa circonf di centro il pto medio di PQ



$\Delta P_cAP \sim \Delta QAQ_B$, $\Rightarrow \dfrac{AP_c}{AQ_B} = \dfrac{AP}{AQ}$

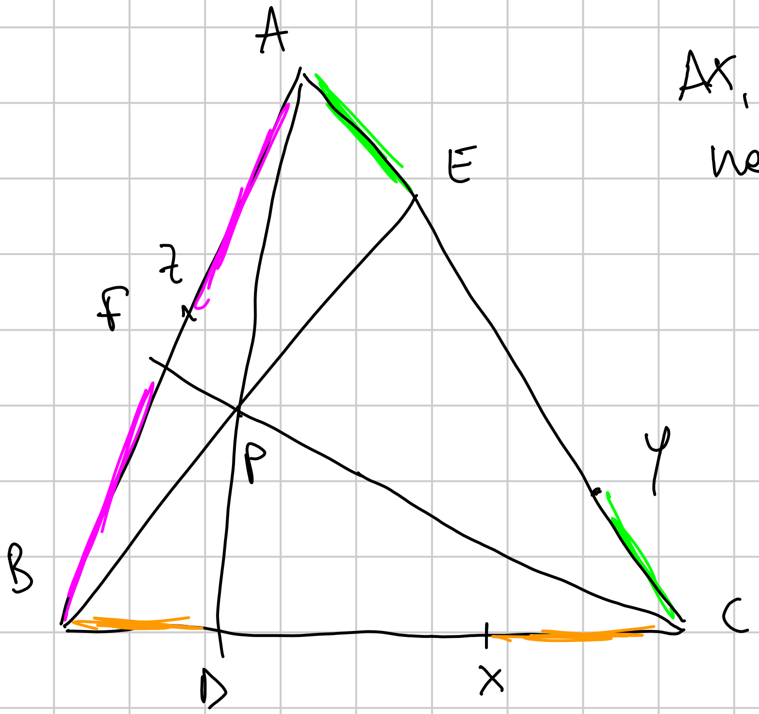
$\Delta Q_cAQ \sim APP_B$ $\Rightarrow \dfrac{AQ_c}{AP_B} = \dfrac{AQ}{AP}$

$$\frac{AP_C}{AQ_B}\cdot\frac{AQ_C}{AP_B} = \underbrace{\frac{AP}{AQ}\cdot\frac{AQ}{AP}}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad AP_C \cdot AQ_C = AQ_B \cdot AP_B$$

Quindi $P_C Q_C P_B Q_B$ ciclico

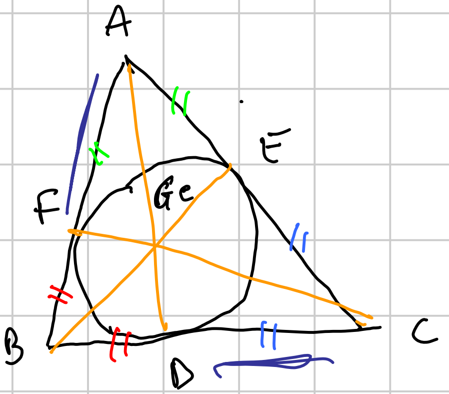
$\boxed{\text{CONIUGATO ISOTOMICO}}$

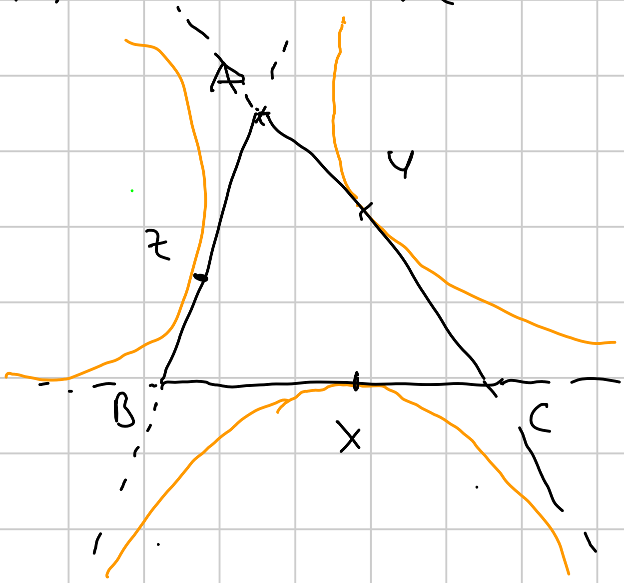


AX, BY, CZ concorrono nel coniugato isotomico di P

$$\frac{\overset{XC}{\overset{\shortparallel}{BD}}}{DC}\cdot\frac{CE}{\underset{YC}{EA}}\cdot\frac{AF}{\underset{FZ}{FB}} = 1$$

PUNTO DI GERGONNE - PUNTO DI NAGEL





AD, BE, CF concorrono nel punto di Gergonne

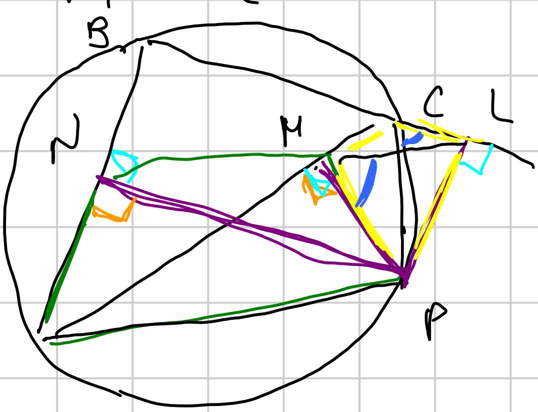
AX, BY, CZ concorrono nel punto di Nagel

Fatto: Gergonne e Nagel sono coniugati isotomici
Dobbiamo mostrare $BD = CX$, $AE = CY$, $AF = BZ$

$$BD = \frac{AB + BC - AC}{2}$$

RETTA DI SIMSON

ABCP ciclico. Facciamo le proiezioni di P sulle rette dei lati di ΔABC (M, N, L).
Allora M, N, L allineati.



Mostreremo che
$\angle NMP + \angle PML = 180$

APCB è ciclico $\Rightarrow$ $\left|\begin{array}{l}\angle PAB + \angle PCB = 180° \\ \angle PAN + \angle PCB = 180°\end{array}\right.$

APMN ciclico $\Rightarrow$ $\angle PAN + \angle PMN = 180°$

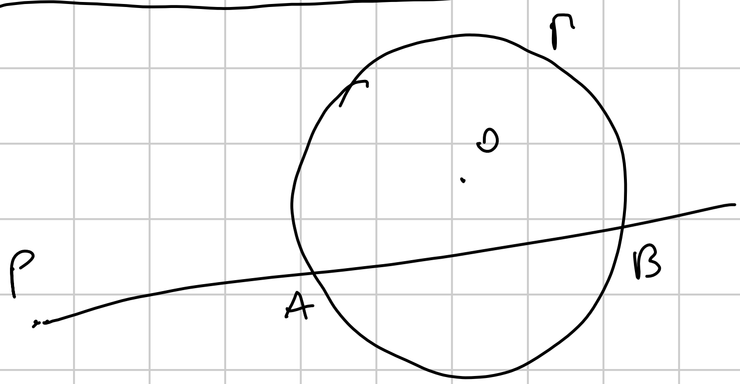
$$\boxed{\angle PCB = \angle PMN}$$

$$\boxed{\angle PML = \angle PCL = 180 - \angle PCB}$$

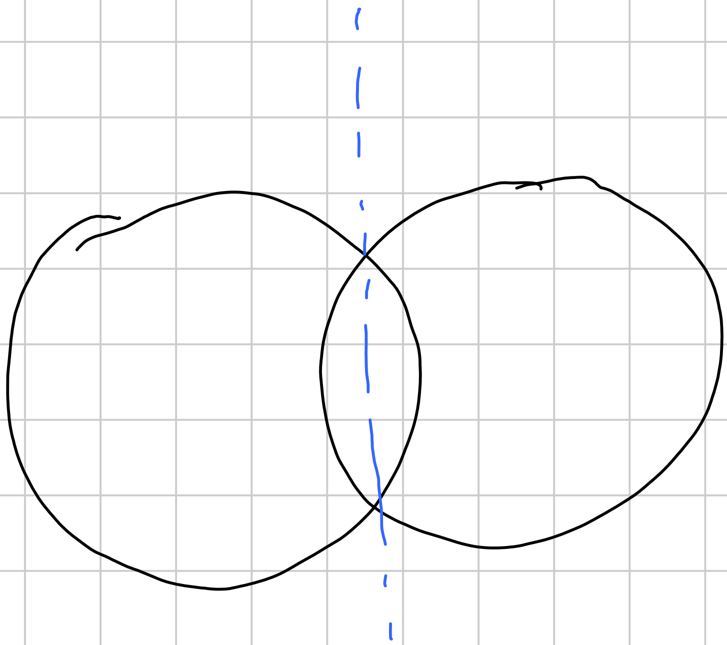
$$\angle PMN + \angle PML = \angle PCB + 180 - \angle PCB = 180$$

Esercizio per casa:
Sia ΔABC un triangolo e Γ la sua circoscritta.
Prendiamo P, Q su Γ. Dimostrare che l'angolo tra le 2 rette di Simson di P e Q è $\frac{1}{2}\angle POQ$ (O circocentro di ΔABC)

POTENZE VARIE



$$\text{pow}_\Gamma P = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$$



Prese 3 circonferenze, esiste sempre un punto che abbia la stessa potenza rispetto alle 3 circonferenze (centro radicale)

E' il punto di concorrenza degli assi radicali delle circonferenze a 2 a 2

Tesi: $TH \perp AM$

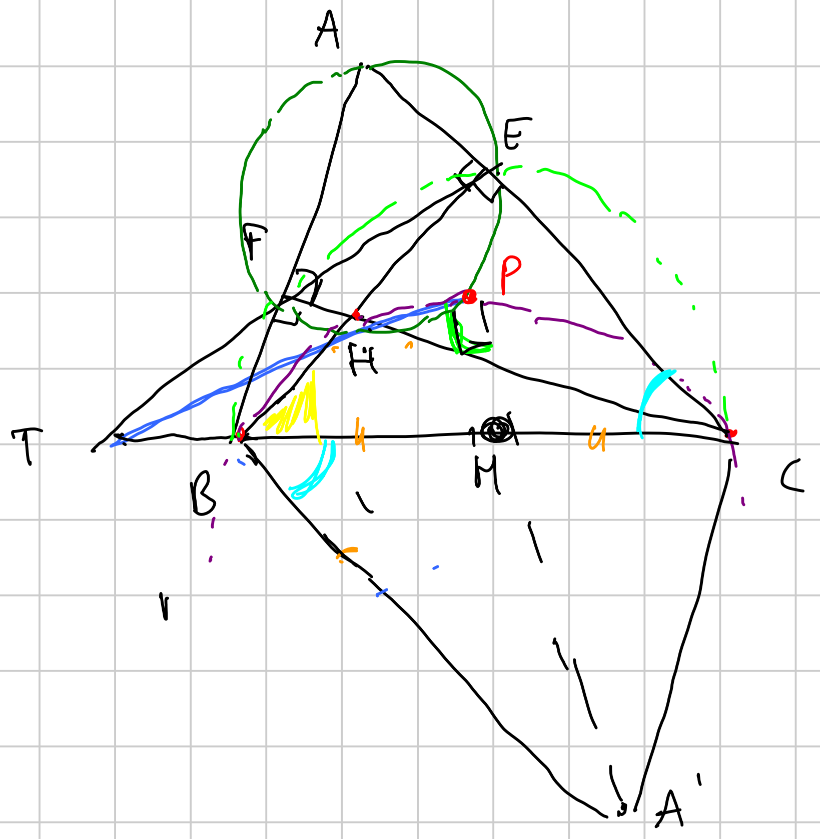
Vogliamo A, P, M allineati

EF è l'asse radicale di ⊙ AEHF e ⊙ BCEF
BC è l'asse radicale di ⊙ BCEF e ⊙ BHC
T è centro radicale delle circonf ⊙ AEHF, ⊙ BCEF, ⊙ BCH

T ∈ asse radicale di ⊙ AEHF e ⊙ BCH

$\Rightarrow$ TH è asse radicale di $\odot AEHF$ e $\odot BHC$

$\boxed{AP \perp PH}$



A' : sym di A wrt M

$ABA'C$ parallelogramma $\Rightarrow$ $\angle CA'B = \angle CAB = \alpha$

$\angle BHC = \pi - \alpha \Rightarrow A' \in \odot BCH$

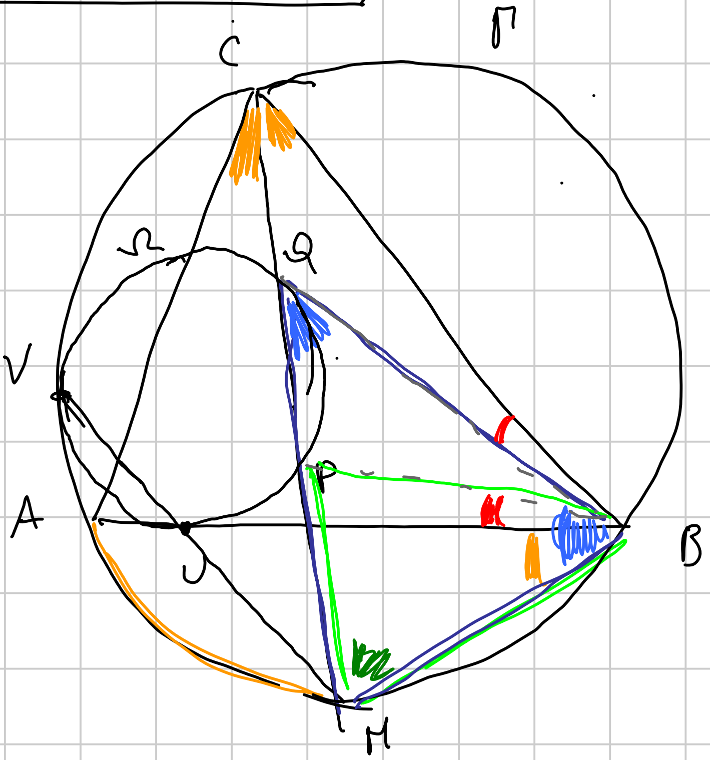
$\angle A'BC = \gamma \qquad \angle CBH = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$\angle A'BH = \angle A'BC + \angle CBH = \frac{\pi}{2}$

$A'H$ diametro della circonf $\odot BHC$

$P \in \odot BHC \Rightarrow \boxed{\angle HPA' = \frac{\pi}{2}}$

EGMO 2018 - 5



Tesi: $\angle ABP = \angle QBC$

$\angle MQB = \alpha + \alpha$

ΔMAB è isoscele

$MA^2 = MB^2$

VU è bisettrice di $\angle AVB$

$M \in VU$

(Provare a dimostrarlo!) $\Delta MUA \sim \Delta MAV$

$MU \cdot MV = MA^2 = MB^2$

$pow_\Omega M$: $MU \cdot MV = MP \cdot MQ$

$MB^2 = MP \cdot MQ$

$\dfrac{MB}{MP} = \dfrac{MQ}{MB}$, $\angle BMP = \angle BMQ$

$\Rightarrow \Delta BMP \sim \Delta BMQ$

1) IMO 2006 - 1

Sia I l'incentro di ΔABC e sia P un punto interno ad ΔABC tale che

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

Mostrare che $AP \geq AI$, con l'uguaglianza sse $P \equiv I$

2) IMO 2008 - 1

Sia H l'ortocentro di ΔABC. La circonferenza Γ_A con centro il pto medio di BC passante per H interseca BC in A_1, A_2. Definiamo analogamente $\Gamma_B, \Gamma_C, B_1, B_2, C_1, C_2$. Dimostrare che $A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2$ è ciclico.

3) Sia ΔABC acutangolo con $AB \neq AC$ e siano E, F i piedi dell'altezza da B, C. La tangente a $\odot ABC$ da A interseca BC in P. La parallela a BC per A interseca EF in Q. Dimostrare che PQ è perpendicolare alla mediana da A.

4) ΔABC ha perimetro 4. I punti X e Y stanno sulle semirette AB, AC tali che $AX = AY = 1$. Sia $M = XY \cap BC$, con M che sta tra B e C. Dimostrare che o il perimetro di ΔACM è 2 o il perimetro di ΔABM è 2

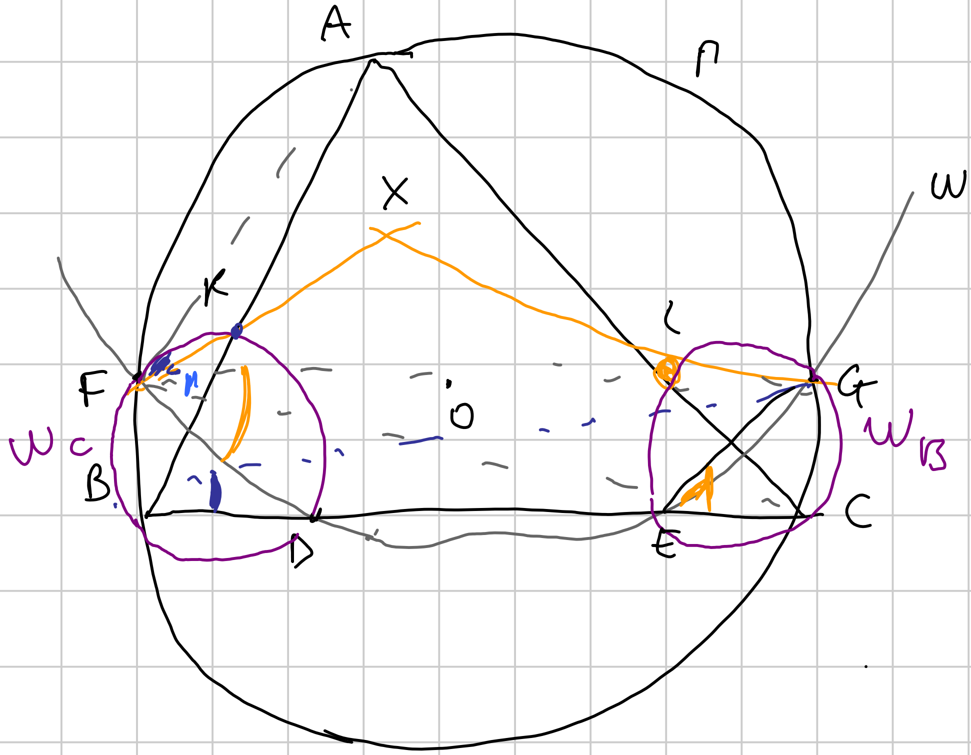
5) Siano P, Q punti sui lati AC, AB di ΔABC. Siano K il pto medio di BP, L il pto medio di QC, M il pto medio di PQ. Sia $\Gamma = \odot MKL$. Sapendo che PQ tange Γ, dimostrare $OP = OQ$ (O circocentro di ΔABC)

6) IMO 2015 - 4

Sia Ω la circoscritta ad ΔABC e sia O il
Una circonferenza Γ con centro A interseca BC in D ed E.
tali che D è tra B e E. Sia $\{F, G\} = \Gamma \cap \Omega$. F sull'arco AB di Ω che non contiene C e G sta sta sull'arco AC di Ω che non contiene B. La circoscritta a ΔBDF e la circoscritta a ΔCEG intersecano AB, AC

in K e L, rispettivamente. Supponiamo che le rette FK, GL siano distinte e $X = FK \cap GL$. Dimostrare A, X, O allineati.

6)



$\angle CLG =$

$= \angle AGL - \angle LAG$

$\angle AGL = \angle CLG + \angle LAG$

AO è asse di FG

Dobbiamo mostrare $X \in$ asse FG

$\iff \angle KFG = \angle LGF$

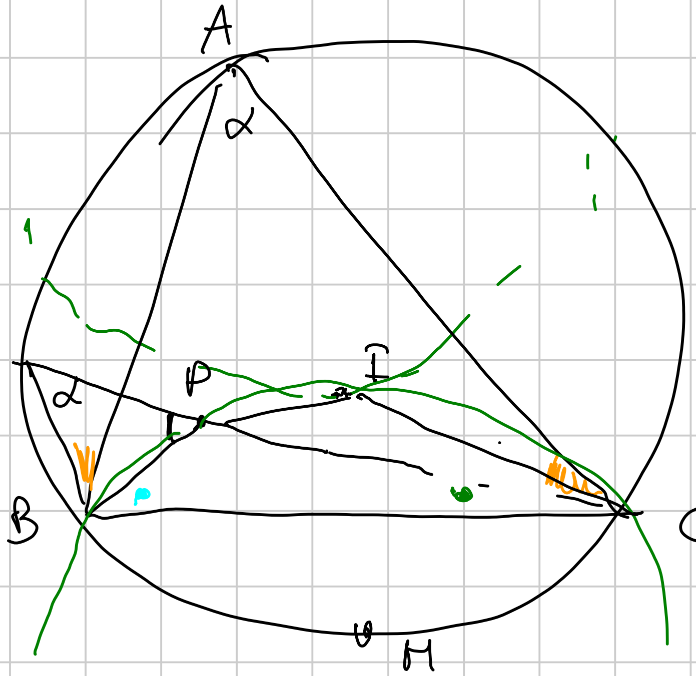
$\angle AFG = \angle AGF$

$\angle GFX + \angle XFA = \angle FXG + \angle XGA$

$$\boxed{\text{Tesi}: \quad \angle XFA = \angle XGA}$$

$$\begin{aligned}
\angle KFA &= \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK \\
&= \angle CEG + \underbrace{\angle GBA - \angle DBK}_{=\angle CBG} \\
&= \angle CEG + \angle CBG \\
&= \angle CLG + \angle CAG \\
&= \angle AGL \quad \longrightarrow \quad \text{Tesi}
\end{aligned}$$

1)



$\angle PBA + \angle PCA =$
$= \angle PCB + \angle PBC$

Tesi: $AP \geq AI$

$$\begin{aligned}
\angle PBP' &= \angle PBA + \angle ABP' \\
&= \angle PBA + \angle PCA \\
&= \angle PCB + \angle PBC \quad \text{ipotesi} \\
&= \angle P'PB
\end{aligned}$$

$\triangle P'PB$ isoscele su PB : $\angle BP'P = \alpha$

$\Rightarrow \angle P'PB = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \angle BIC$

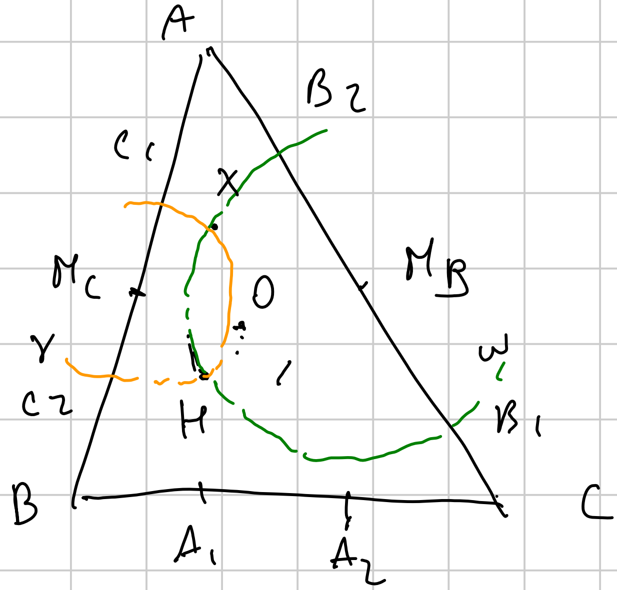
$\Rightarrow \angle BPC = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ BCIP ciclico

$\odot BIC$ passa per l' A-ex centro e ha centro pto medio di $\widehat{BC}$ (non contiene A)

Questo chiude

2)



$M_B M_C \parallel BC$

$XH \perp BC$

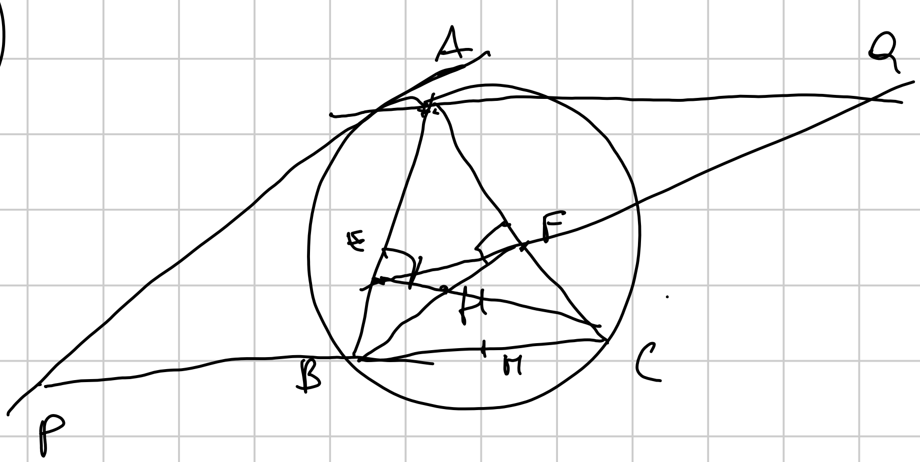
$AH \perp BC$

$\Rightarrow A, X, H$ allineati

$\text{pow}_\gamma A = \text{pow}_\omega A$

$\Rightarrow C_1 C_2 B_1 B_2$ ciclico

3)



Tesi

$AM \perp PQ$

⊙BCEF, ⊙ABC, ⊙A : P centro radicale

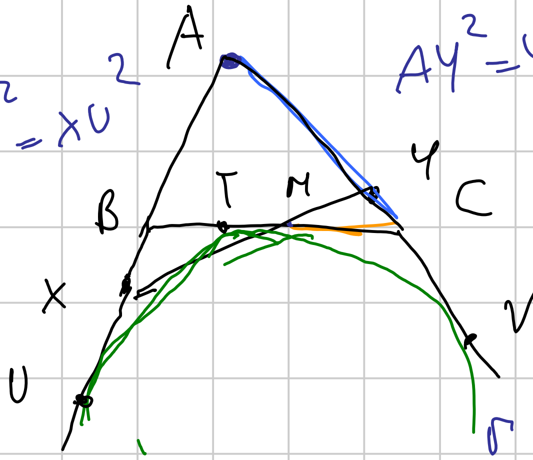
ha centro M

Vogliamo dimostrare che QP è asse radicale di ⊙BCEF, ⊙A

Hope: Q centro radicale di ⊙A, ⊙BCEF, ⊙AEF

✓

4)



$AX^2 = XU^2$ $AY^2 = YV^2$

$AB + BC + CA = 4$

$AX = AY = 1$

$2p(CMA) = 2$? o

$2p(BMA) = 2$?

$$\underbrace{\frac{AB + BC + CA}{2}}\, = 2$$

$$AU = AV = \frac{AB + BC + CA}{2} = 2$$

$$\Rightarrow XU = YV = 1$$

$$AV = AC + CV = AC + CT = \underbrace{AC + TM + MC}_{TM = AM}$$

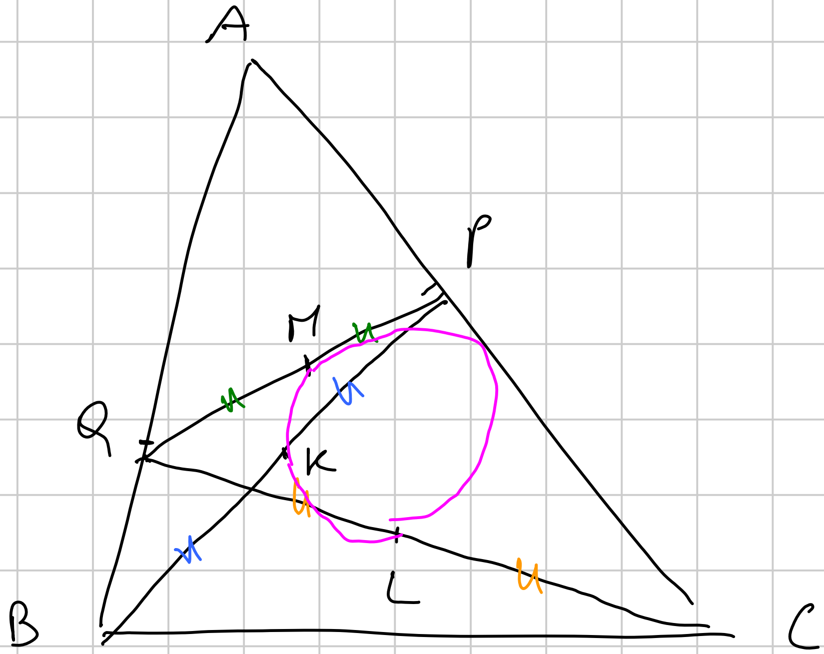
XY asse radicale di cfr centro A degenere e A-excerchio

$M \in XY \Rightarrow \text{pow}_{\odot A} M = \text{pow}_{\Gamma} M$

$AM^2 = TM^2$

$\Rightarrow AM = MT$

$\Rightarrow \triangle CMA$ ha perimetro 2



$OP = OQ$

Sfruttando $ML \parallel PC$ e la tangente
$\angle LKM = \angle APQ$

Allo stesso modo, $\angle AQP = \angle MLK$

$\Rightarrow \quad \triangle APQ \sim \triangle MKL$

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{\frac{1}{2}PC}{\frac{1}{2}BQ}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AQ}{AP} = \frac{PC}{BQ}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{AQ \cdot BQ} = PC \cdot AP$$

$$pow_{OABC}\, Q = pow_{OABC}\, P$$

r raggio $OABC$

$$OQ^2 - r^2 = OP^2 - r^2$$

$\Rightarrow \quad OQ = OP$