N2 Basic

Titolo nota 08/09/2019

Diofantee

Un' eq. diof. è un'equazione dove cerchiamo sol intere

Trovare tutte le coppie $\mathbb{Z} \ni n, m$ t.c. $m(n+3) = n^4 + 2016$

" $(x,y) \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c. $x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ dimostrare che esistono solo finite terne $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ t.c.

$$\begin{cases} a+b-c = n \\ a^2+b^2-c^2 = n \end{cases}$$

$$9^a - 7^a = 2^b$$

Tecniche

Congruenze

$y^2 = x^5 - 4$

assurdo mod 11

- fattorizzare e controllare un fattore alla volta

Disuguaglianze

se so che $LHS > 1000 RHS$ allora non ci sono più soluz.

- se $0 < x < 1$ non è intero

$$n^2 \leq n^2+n \leq n^2+2n+1$$
$$n \leq \sqrt{n^2+n} \leq n+1$$

$p^a + 36 = b^2 \qquad a,b \in \mathbb{Z}, \; p$ primo

$$p^a = (b-6)(b+6)$$
$$\quad \overset{\shortparallel}{p^{a'}} \qquad \overset{\shortparallel}{p^{a''}}$$

$p^{a''} - p^{a'} = 12 \;\nearrow\; p \mid 12 \quad (a', a'' \geq 1)$

$\qquad\qquad\quad \searrow\; b = 7 \quad (a' = 0)$

EGMO 13 4

Trovare tutti gli $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c.

$P(n) = \dfrac{n^5 + a}{b}$ e' intero per 3 valori di n interi cons.

$$\begin{cases} (n-1)^5 \equiv -a & (b) \\ n^5 \equiv -a & (b) \\ (n+1)^5 \equiv -a & (b) \end{cases} \qquad (b \geq 3 \text{ facilmente})$$

$$\begin{cases} (n-1)^5 \equiv n^5 & (b) \\ (n+1)^5 \equiv n^5 \end{cases} \iff \begin{cases} -5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 1 \equiv 0 \\ 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$
$$5 \nmid b$$

$$\begin{cases} 5n^4 + \ldots \equiv 0 \\ 20n^3 + 10n \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n^2 + 1 \equiv 0 \\ 5n^4 + \ldots \equiv \end{cases}$$

$\vdots$

$\vdots$

continuo con resti successivi: algoritmo di Euclide per MCD

$\vdots$

$11 \equiv 0 \quad (b)$

$\Rightarrow \quad b \mid 11$ solo finiti casi

$$\left.\begin{array}{l} b \mid \text{Cosa}_1 \\ b \mid \text{Cosa}_2 \end{array}\right. \Rightarrow b \mid (\text{cosa}_1, \text{cosa}_2)$$

Un po' di disuguaglianze

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{Z}$ t.c. $\exists \infty\ n \in \mathbb{N}$ (dispari) t.c.

$$a^n + b^n + c^n = 0$$

Idea: consideriamo il + grande fra a, b, c
sia wlog a

$$a^n = -b^n - c^n$$

$$1 = -\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{c}{a}\right)^n \qquad \left|\frac{b}{a}\right| \underset{*}{\leq} 1 \qquad \left|\frac{c}{a}\right| \underset{*}{\leq} 1$$

Se non si verifica nessun = *

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^n < \frac{1}{(1000)^3}, \quad \left(\frac{c}{a}\right)^n < \frac{1}{(1000)^3}$$

$\Rightarrow$

LHS $> (1000)^2$ RHS assurdo

$$\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{a = b} \\ a = -b \end{array}$$

$$m(n+3) = n^4 + 2016$$

$$\mathbb{Z} \ni m = \frac{n^4 + 2016}{n+3} \overset{*}{\in} \mathbb{Z}$$

Se avessi avuto $\frac{n + 2016}{n+3} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{2013}{n+3} \in \mathbb{Z}$$

$$* \iff \frac{n^4 + 2016}{n+3} - n^3 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-3n^3 + 2016}{n+3} \in \mathbb{Z}$$

$\vdots$

$\frac{R}{n+3} \in \mathbb{Z}$ dove R è il resto della div fra $n^4 + 2016$ e $n+3$

$$\frac{3^4 + 2016}{n+3}$$

è come chiedersi: $0 < \frac{3^4+2016}{n+3} < 1$

IMO 2019 4

Trovare tutti gli $k, n > 0$ t.c.

$$k! = (2^n - 2^0) \cdot (2^n - 2^1) \cdot \ldots \cdot (2^n - 2^{n-1})$$

Contiamo i fattori 2:

$$\nu_2(k!) = \frac{k - \#\text{cifre 1 binarie}}{2-1}$$

$$\nu_2(RHS) = \sum_{i=0}^{n-1} \nu_2(2^n - 2^i) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$$

$$k > k - n_{brutto} = \binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Dall'altra (disuguaglianze)

$$RHS < (2^n)^n = 2^{n^2}$$

$$LHS > \left(\frac{n^2-n}{2}\right)!$$

Quanto cresce il fattoriale?

$$\ln(n!) = \sum_{i=2}^{n} \ln(i) \geq n(\ln(n) - c)$$

$$\left(\text{stirling} \quad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \right)$$

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$LHS > \left(\frac{n^2-n}{2e}\right)^{\frac{n^2-n}{2}} \overset{?}{>} 2^{n^2} > RHS$$

$$\left(\sqrt{\frac{n^2-n}{2e}}\right)^{n^2-n} > 2^{n^2}$$

è vera per n abbastanza grande.

$$\left(\begin{array}{l} n^2-n > 8e \\ n^2-n > 24 \\ n \geq 6 \quad \text{funziona} \end{array} \right)$$

BMO17 1

$x^3+y^3=x^2+42xy+y^2$ $\quad x,y>0$

Idea 1 sembra che LHS > RHS

$$x^3+y^3 \geq (x^2+y^2)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\geq (x^2+42xy+y^2)\,c \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)$$

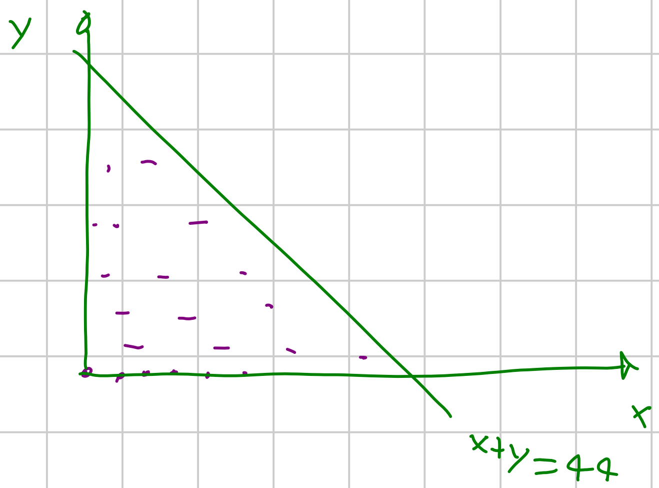
è vera con $c=\frac{2}{44}$

$$= (x^2+\dots)\cdot\frac{x+y}{44}$$

Siamo arrivati a

$$x^2+42xy+y^2 = x^3+y^3 \geq (x^2+42xy+y^2)\,\frac{x+y}{44}$$

quindi, non appena $x+y>44$ non ho soluzioni



Altra strada

suggerita dal fatto che l'espr. è simmetrica

Th: ogni polinomio in x, y simmetrico si può esprimere
come " in $x+y$ xy

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$= s\,(s^2-3p)$$

$$x^2+42xy+y^2 = s^2+40p$$

$$s^2+40p = s^3-3sp$$

$$\mathbb{Z} \ni p = \frac{s^3-s^2}{40+3s} \in \mathbb{Z}$$

Diofantee semplici da portarsi da casa

1 $\quad ax+by=c$ $\quad$ (a, b, c parametri)

Congr.: $(a,b) \mid c$ altrimenti no soluzioni

ora $(a,b,c)=1$

mi basta risolvere $ax+by=0$ ①
e $ax+by=1$

1 se ho 2 soluzioni $a x_0 + b y_0 = c$

$a x_1 + b y_1 = c$

$$a\underbrace{(x_0 - x_1)}_{\tilde{x}} + b\underbrace{(y_0 - y_1)}_{\tilde{y}} = 0$$

$\Rightarrow$ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ è soluzione di 1

C: si riconduce a 2 ovvero ad esibire soluzioni per il th di Bezout.

2 Ci sono tante possibilità di grado 2

$$n^2 + n = m^2$$

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 12$$

$a, b > 0$ t.c. $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} \in \mathbb{Z}_{>0}$ IMO 03 2

$$q = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

$$a^2 - 2aqb^2 + b^3 q - q = 0$$

$$x^2 - 2qb^2 x + b^3 q - q = 0$$

$x = a$ è sol $\in \mathbb{Z}$ e anche l'altra è intera perché

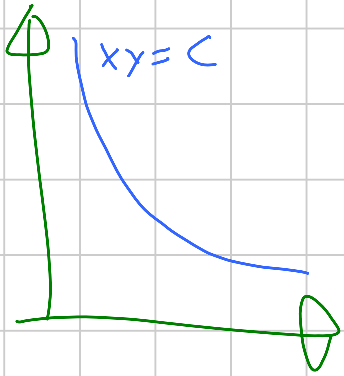
$x_0 + x_1 = 2qb^2 \in \mathbb{Z}$

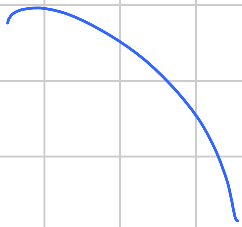
$\Rightarrow \dfrac{\Delta}{4} = \square$

$xy = c \rightsquigarrow x = \frac{c}{y}$

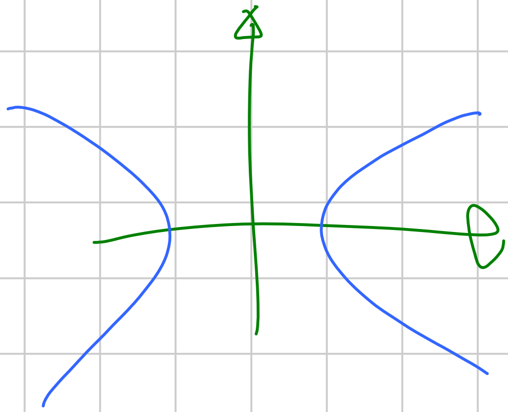
$xy - 2y + 3x = 1000$

$\rightarrow (x-2)(y+3) = c'$





$x^2 - y^2 = c$



Esercizi

1] $n, m \in \mathbb{Z}$ $\quad n^2 - 6n = m^2 + m - 12$

2] $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p = a^r + b^p + c^q \Rightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p = q = r \end{cases}$

3] $x, y, z, w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad 2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

4] p primo, quando $x^2 + px - 444p = 0$ ha radici intere?

5] $x, y, z \in \mathbb{Q}$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 7$

6] $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\quad a^3 + 2b^3 = 2014(c^3 + 2d^3)$

7] Per quanti n $\quad n^2 + 85n + 2017$ è $\square$?

8] $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad 9^a - 7^a = 2^b$

9] $m, n \in \mathbb{Z}$ $\quad mn + 2m - n - 8 = 0$

10] p primo $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad 5p + 49 = a^2$

11] $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad 3^x - y^2 = 41$

12] trovare $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ t.c. $\quad n + f(m) \mid f(n) + n f(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Correzione

ITAMO 2017 2

$\forall n \; \exists$ solo finiti $a, b, c \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$\begin{cases} a + b - c = n \\ a^2 + b^2 - c^2 = n \end{cases}$$

Sol: l'unico passaggio sbagliato è

$$a + b - c = a^2 + b^2 - c^2$$

•] $a = n - b + c$

$$a^2+b^2+\cancel{c^2}-2ab+2ac-2bc+b^2-\cancel{c^2}=n$$

$$2b^2+b(-2a-2c)+a^2-n+2ac=0$$

è quadratica in b, se voglio $\exists\, b\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Delta=\square$$

•] $c=-(n-a-b)$

$$\cancel{a^2+b^2}-n^2-\cancel{a^2-b^2}-2ab+2an+2bn=n$$

si scrive $(a-n)(b-n)=f(n)$

•] $b-c=n-a$

$b^2-c^2=n-a^2$

$b-c\mid b^2-c^2 \Rightarrow n-a\mid n-a^2$

$$\frac{P(a)}{Q(a)}=\frac{n-a^2}{n-a}\in\mathbb{Z}$$

1, 9, 7 Sono di tipo "iperbole"

7] Per quanti n $n^2+85n+2017=a^2$?

voglio ricondurre a $f(n)^2-g(a)^2=\text{Cost}$

vorrei tanto scrivere $f(n)=n+\frac{85}{2}$

$\rightsquigarrow$ $4n^2+4\cdot 85n+C=4a^2$

(

$$(2n+85)^2 + c' = (2a)^2$$

② $a,b,c,p,q,r \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad a^p+b^q+c^r = a^q+b^r+c^p = a^r+b^p+c^q \Rightarrow \begin{cases} a=b=c \\ p=q=r \end{cases}$

Le tecniche congr. non hanno potenziale

Voglio disug.

Posso scegliere $a \geq b \geq c$

vorrei ordinare p, q, r, ma posso solo sceglierne 1

wlog $\quad p \geq q \quad p \geq r$

$$\begin{cases} q \geq r \\ r > q \end{cases}$$

$$a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p$$

$$a^q(a^{p-q}-1) + b^r(b^{q-r}-1) = c^r(c^{p-r}-1)$$

$$\geq \quad a^{q-r}c^r(a^{p-q}-1) + c^r(b^{q-r}-1)$$

$$a^{q-r}(a^{p-q}-1) + (b^{q-r}-1) \leq c^{p-r}-1$$

$$c^{p-r} - c^{q-r} + b^{q-r} \leq a^{p-r} - a^{q-r} + b^{q-r} \leq c^{p-r}$$

$b^{q-r} \le c^{q-r} \Rightarrow b \le c \Rightarrow b = c$

③ TF 2017

x, y, z, w t.c. $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$
≥ 0

Qui proviamo i moduli!

modulo 2, 3, 5 o 7 scompare 1 termine oppure l'esponente corr. è 0

mod 2, $\Rightarrow x = 0$
mod 3, $\Rightarrow y = 0$

$$2 + 5^z = 7^w$$

c'è $2 + 5^1 = 7^1$

Parentesi sui moduli

$n^2 - 6n = m^2 + m - 12$
$n = 0$, $m = 3$ è sol.

$2 + 5^z = 7^w$
$z = w = 1$ è sol

ora modulo M succede che entrambe le eq. ereditano una sol.
$\Rightarrow$ al più ottengo delle limitazioni del tipo
$n \not\equiv$ qualcosa (M)

$m \not\equiv$ " altro

in particolare non potrò mai escludere $\boxed{\text{tutti}}$ i casi

6 $\quad z \not\equiv$ qualcosa $(\operatorname{ord}(5))$

$\quad w \not\equiv$ " altro $(\operatorname{ord}_M^M(7))$

Questo succede purché $M \neq 5^a, 7^b$

$$2 + 5^z = 7^w$$

ora provo potenze di 5 e 7 perché gli altri moduli non concludono

(si chiude proprio mod 25)

⑤ $x, y, z \in \mathbb{Q} \qquad x^2+y^2+z^2=7$

$x = \frac{x'}{w'} \qquad y = \frac{y'}{w'} \quad \dots$

$$x^2+y^2+z^2 = 7w^2 \qquad (x,y,z,w)=1$$

Moduli sensati sono : 7

cose che hanno pochi $\square$

mod 4 abbiamo $\frac{1}{2}$ residui

8 " $3/8$ residui

mod 8 $\quad x^2+y^2+z^2+w^2 \equiv 0 \ (8)$

$0, 1, 4$ $\quad$ l'unica possibilità è $2 \mid x, y, z, w$

8 $\quad a, b \in \mathbb{Z}_{>0} \quad 9^a - 7^a = 2^b$

Mod 8 $\quad$ (va bene provare anche 7, 9)

$1 - (-1)^a \equiv 1, 2, 4, 0$

assurdo $\quad$ b limitato $\quad$ a pari

$(9^{a'} - 7^{a'})(9^{a'} + 7^{a'}) = 2^b$

11 $\quad 3^x - y^2 = 41$

Mod 41

$3^x \equiv y^2 \ (41)$

$3 \equiv a^2$

$3 \not\equiv a^2 \leftarrow$ Hope!

Se fosse $3 \equiv a^2$

$3^{20} = 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{p-1} \equiv 1$

$$3^{20} \equiv (3^4)^5 \equiv (81)^5 \equiv (-1)^5 \equiv -1$$

12 $\quad n+f(m) \mid f(n)+nf(m) \qquad f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$

Se $g(x) \mid$ Cost e $g(x)$ assume valori arbitrar. grandi $\Rightarrow$ la Cost $= 0$

$$0 < \frac{c}{g(x)} < 1$$

se ho solo $\left|\frac{c}{g(x)}\right| < 1$

se ed è intero $\Rightarrow$ $c = 0$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{f(n)+na}{n+a} \qquad \text{con } a = f(m) \quad \forall n, m$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{f(n)-n^2}{n+a} \qquad \frac{f(n)-a^2}{n+a} \in \mathbb{Z}$$