Successioni + equazioni funzionali

(1) $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2} + \dots$

$\hat{a} :=$ tutta la successione $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

$z\hat{a} := (a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$

$z^2\hat{a} := (a_3, a_4, a_5, \dots)$

(1) diventa $z^2\hat{a} = \alpha z\hat{a} + \beta\hat{a}$

$$\underbrace{(z^2 - \alpha z - \beta)}_{q(z)}\hat{a} = 0 \quad \text{o di grado più alto}$$

Il polinomio avrà due soluzioni, λ_1, λ_2

$$0 = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\hat{a} = (z-\lambda_2)(z-\lambda_1)\hat{a}$$

Due successioni particolari che verificano (1) sono quelle che verificano

$(z-\lambda_2)\hat{a} = 0$

$(z-\lambda_1)\hat{a} = 0$,

cioè rispettivamente

$a_n = \lambda_1^n$

$b_n = \lambda_2^n$

La soluzione generale di (1) è

(soluzione generale) $a_n = c\lambda_1^n + d\lambda_2^n$ al variare di $c, d \in \mathbb{C}$

Se mi viene data (1) + condizioni iniziali $a_1 = \square$, $a_2 = \star$

basta risolvere il sistema
$$\begin{cases} \square = a_1 = c\lambda_1^1 + d\lambda_2^1 \\ \star = a_2 = c\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 \end{cases}$$

per trovare i valori di c, d che soddisfano (1) + cond. iniziali
(soluzione particolare)

Se le soluzioni di $z^2-\alpha z-\beta=0$ sono complesse, ho potenze complesse, che posso scrivere anche come seni/coseni:

se α, β reali, le sol. sono complesse coniugate

$$\lambda_{1,2}=\rho\cdot(\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta)$$

sol. generale è $a_n=c\rho^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)+d\rho^n(\cos n\vartheta-i\sin n\vartheta)$

$$=(c+d)\,\rho^n\cos(n\vartheta)+i(c-d)\cdot\rho^n\sin(n\vartheta)$$

Se l'equazione $z^2-\alpha z-\beta$ (o il suo equivalente di grado superiore) ha soluzioni multiple, si riescono comunque a trovare soluzioni particolari che generano tutte le soluzioni:

se c'è un fattore di grado k, le soluzioni di

$$(z-\lambda)^k\,\hat{a}=0$$

sono $\underbrace{a_n=\lambda^n,\quad b_n=n\lambda^n,\quad c_n=n^2\lambda^n,\ \dots}_{\text{fino ad ordine } k \text{ distinte}}$

e le loro comb. lineari, cioè, la sol. generale è

$$a_n=p(n)\,\lambda^n,\ \text{dove } p \text{ è un polinomio di grado} < k.$$

per dimostrare che sono soluzioni, serve criterio della derivata:
se λ è una radice doppia di $q(z)=z^2-\alpha z-\beta$, allora è anche radice di $q'(z)$. Se è radice tripla, è anche radice di $q''(z)$, e così via

(dietro a queste notazioni con la z ci sono serie di potenze: se definite $\hat{a} := a_1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2} + a_4 z^{-3} + \dots$, allora $z\hat{a}$ vuol dire moltiplicare $\hat{a}$ per z (a meno di un valore iniziale).

Generalizzazione: successioni "non omogenee": ad esempio,

(2) $\quad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + f(n) \qquad$ (ad esempio $f(n) = 2^n$)

(1) si chiama "successione omogenea",
(2) si chiama "successione non omogenea"

Se sapete trovare <u>una</u> soluzione particolare della (2) (con condizioni iniziali a vostra scelta), allora c'è un teorema che ve le produce tutte:

<u>Teo</u>: se p_n è una soluz. particolare di (2), allora tutte e sole le soluz. della (2) si ottengono sommando la sol. generale della (1) e la p_n:

$$a_n = \underbrace{c\lambda_1^n + d\lambda_2^n}_{\text{sol. generale della (1)}} + p_n$$

<u>Dim</u>: se a_n soddisfa (2) e p_n soddisfa la (2)

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + f(n)$$
$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta p_{n-1} + f(n)$$

allora $a_n - p_n$ soddisfa (1), per differenza:

$$a_{n+1} - p_{n+1} = \alpha(a_n - p_n) + \beta(a_{n-1} - p_{n-1})$$

quindi $a_n - p_n = \underbrace{c\lambda_1^n + d\lambda_2^n}_{\text{sol. generale della (1)}}$ (per qualche c, d)

R1 per trovare p_n, se $f(n)$ è della forma μ^n, allora cercate una p_n della forma $p_n = e \cdot \mu^n$

ES: cerchiamo le soluzioni di $\overset{(3)}{}\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + 2^n \quad \forall n > 1$:

(1) cerco p_n della forma $p_n = e \cdot 2^n$:

(3): $$e \cdot 2^{n+1} \overset{!}{=} e \cdot 2^n + e \cdot 2^{n-1} + 2^n \quad \forall n$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{2^{n-1}} \cdot 4e = \cancel{2^{n-1}} (2e + e + 2) \quad \forall n$$

$$\Leftrightarrow \quad 4e = 3e + 2 \quad \Leftrightarrow \quad e = 2$$

$\Rightarrow$ $p_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ è una sol. particolare di (3).

Per il teorema, tutte le sol. di (3) sono della forma

$$a_n = c \cdot \phi_1^n + d \phi_2^n + 2^{n+1} \qquad \left(\phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

Questo trucco fallisce se μ è una soluzione di $z^2 - \alpha z - \beta = q(z)$.

R2 In questo caso, provare con $p_n = (a + bn) \cdot \mu^n$

$p_n = (a + bn + cn^2) \cdot \mu^n$

⋮

R3: se $f(n)$ è della forma $(r_0 + r_1 n + \dots + r_d n^d)\, \mu^n$, allora cercate p_n della stessa forma (polinomio di grado d moltiplicato per μ^n).

Se μ è radice di $q(z)$, dovrete alzare il grado

Cosa c'è dietro: $\quad q(z)\, \hat{a} = 0 \quad$ per una succ. omogenea

$q(z)\, \hat{a} = f(n)$, per esempio $q(z)\, \hat{a} = 2^n$

Posso applicare un "operatore con la z" che mi elimina il 2^n:

$$(z-2)\, q(z)\, \hat{a} = 0$$

Cioè, in altra notazione: parto da $\quad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + 2^n$

sottraggo

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n + 2^{n+1}$$

e

$$2a_{n+1} = 2\alpha a_n + 2\beta a_{n-1} + 2\cdot 2^n$$

$$(a_{n+2} - 2a_{n+1}) = \alpha(a_{n+1} - 2a_n) + \beta(a_n - 2a_{n-1})$$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} - 2a_n$ è una succ. per ricorrenza omogenea con polinomio associato $q(z)$

e quindi a_n è una succ. per ric. omogenea con pol. associato $q(z)\cdot(z-2)$

---

n^2 è $n^2 \cdot 1^n$

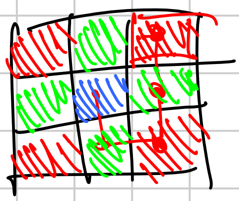
(porta 3 radici 1)

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

(porta radici $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$)

Saltano spesso fuori in problemi di conteggio seguente:

ES:



su una scacchiera 3×3, quanti sono i percorsi lunghi n che partono dalla casella centrale, e finiscono in una casella d'angolo

Idea: definisco

$\boxed{A_n}$ = #{percorsi lunghi n da centro a centro}

$\boxed{B_n}$ = #{ " " " da centro a edge}

$\boxed{C_n}$ = #{ " " " da centro ad angolo}

(una a scelta delle caselle, tanto per simmetria sono tutti uguali)

Posso scrivere una ricorrenza combinata:

$$\begin{cases} A_{n+1} = 4B_n & \text{(i)} \\ B_{n+1} = A_n + 2C_n & \text{(ii)} \\ C_{n+1} = 2B_n & \text{(iii)} \end{cases} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{cases} A_{n+1} = 2C_{n+1} \\ \frac{1}{2}C_{n+2} = A_n + 2C_n \\ \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \quad '' \\ \frac{1}{2} C_{n+2} = 4 C_n \\ \quad '' \end{cases}$$ pol. associato $\frac{1}{2} z^2 - 4$

$$z\hat{A} = 4\hat{B}$$
$$z\hat{B} = \hat{A} + 2\hat{C}$$
$$z\hat{C} = 2\hat{B}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -z & 4 & 0 \\ 1 & -z & 2 \\ 0 & 2 & -z \end{bmatrix}}\cdot \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -z & 4 & 0 \\ 1 & -z & 2 \\ 0 & 2 & -z \end{bmatrix} = 0$$ che è il $q(z)$ di queste successione

---

ES: Quante sono le successioni di 0 e 1 lunghe n che non hanno tre zeri di fila, oppure quattro uni di fila?

$A_n = \#\{$ succ. lunghe n che finiscono con $10 \}$

$B_n = \#\{$ " $100\}$

$C_n = \#\{$ " $01\}$

$D_n = \#\{$ " $011\}$

$E_n = \#\{$ " $0111\}$

$$C_{n+1} = A_n + B_n$$

Funzionali

$$\circledast \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$$

Varianti...

es. $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, \; y \geq 0$

1) $f(ny) = n f(y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \; y \geq 0$

2) $f\left(\frac{n}{m}y\right) = \frac{n}{m} f(y) \quad \forall n,m \in \mathbb{N},\ y \geq 0$
$m > 0$

3) $P(-y,y)$: $0 = f(0) = f(-y) + f(y) \quad \forall y \geq 0$

$P(0,0)$: $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(-y) = -f(y) \quad \forall y \geq 0 \quad \Rightarrow$ dispari

---

$$f(x+y+1) \overset{+f(1)}{=} f(x) \overset{+f(1)}{+} f(y) + f(1) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{Q}$$

Sostituzioni!

$g(x) := f(x) + f(1)$ $\qquad g(x+y+1) = g(x) + g(y)$

$h(x) := g(x-1)$
$h(x+1) = g(x)$ $\qquad h(x+y+2) = h(x+1) + h(y+1) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$

pongo $z := x+1$, $w := y+1$ $\qquad h(z+w) = h(z) + h(w)$

(*) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ $\quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad x,y \in \mathbb{R}^+ \quad (:= \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\})$

$g(x) := \log f(x)$ $\qquad \log(*)$: $\quad \log f(xy) = \log f(x) + \log f(y)$

(**) $g(xy) = g(x) + g(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$

$x = e^z,\ y = e^w$

(**) $g(e^{z+w}) = g(e^z) + g(e^w) \qquad z,w \in \mathbb{R}$

$h(x) := g(e^x)$ $\qquad h(z+w) = h(z) + h(w) \qquad z,w \in \mathbb{R}$

$h(\log(x)) = g(x)$

ES (per casa): trovare tutte le funzioni t.c. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad x, y \in \mathbb{Q}$$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

trovare tutte le funzioni t.c. $f(a)+f(d) = f(b)+f(c)$

per ogni $a<b<c<d$ in progr. aritmetica

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t.c. $f(x+y) = f(x)+f(y) \quad \forall x, y$

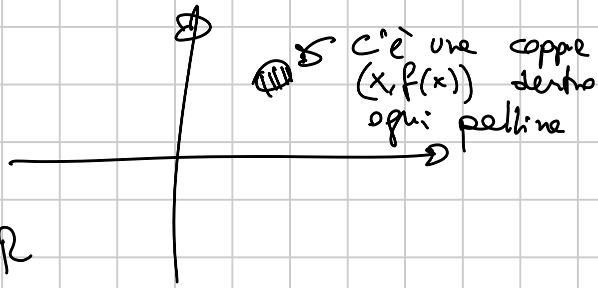
ha come soluzioni solo le rette

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x+y) = f(x)+f(y)$

ha anche altre soluzioni.

Queste soluzioni "wild" hanno tutte grafico denso in $\mathbb{R}^2$

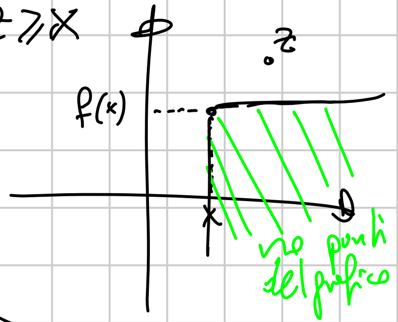
Per escludere soluzioni wild, si cercano proprietà di "parti vuote del piano":



$$(*) \quad f(x+y^2) = f(x) + [f(y)]^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ogni numero $z > x$ si scrive come $x+y^2$ per un qualche y,

e $(*)$ ci dice che $f(z) \geq f(x)$ per ogni $z \geq x$



Equazioni con soluzioni "wild"

$$f(f(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Posso costruire sol. wild in questo modo: divido tutti i reali in coppie, ad es. $\{1, 2\}$, $\{\pi, -\pi\}$, $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ + singoletti $\{e\}$

e definisco la f che "scambia" i numeri di queste coppie

$$f(1)=2 \qquad f(\pi)=-\pi \qquad f(e)=e$$
$$f(2)=1 \qquad f(-\pi)=\pi$$

ES:

$(*)\quad [f(x)]^2 = x^2$ soluzioni: non solo $f(x)=x$ e $f(x)=-x$

ma anche $f(x)=\begin{cases} x & x\in S \\ -x & x\notin S\end{cases}$ per ogni $S\subseteq\mathbb{R}$

Data una soluzione f di $(*)$, definiamo $S:=\{x : f(x)=x\}$

Bisogna far vedere che per $x\notin S$, $f(x)=-x$

$$\underbrace{(f(x)+x)}\underbrace{(f(x)-x)}=0$$

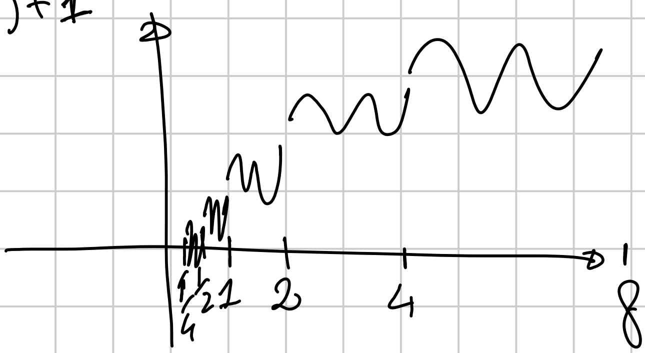
se non è uguale a 0 il secondo fattore, dev'esserlo il primo

$f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$: $f(x^2)-f(x)=1$ $\forall x\in$ dominio

Scriviamo $x=e^z$ $z\in(0,\infty)$

$$f(e^{2z})-f(e^z)=1 \qquad \text{definisco } g(z):=f(e^z)$$

$(**)\quad g(2z)=g(z)+1 \qquad g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$



Posso definire arbitrariamente la g in $[1,2)$.
A questo punto, la relazione $(**)$ mi dice quanto vale la funzione in $[2,4)$, $[4,8)$, ecc. $[\frac12,1)$, $[\frac14,\frac12)$, ecc.

Costruzione delle soluzioni brutte dell'equazione di Cauchy.

Idea: prendo un insieme di reali "libero da relazioni razionali" per es. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$: non esistono $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tali che $1 \cdot a + \sqrt{2} \cdot b + \sqrt{3} \cdot c = 0$ (a parte $a = b = c = 0$)

e consideriamo l'insieme

$$S = \{x : x = 1 \cdot a + \sqrt{2} \cdot b + \sqrt{3} \cdot c : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

sono tutti distinti : se $1 a_1 + \sqrt{2} b_1 + \sqrt{3} c_1 = 1 \cdot a_2 + \sqrt{2} \cdot b_2 + \sqrt{3} \cdot c_2$ allora faccio la differenza...

Sono in grado di costruire una soluzione di

$$(C) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad x, y \in S \quad f : S \to \mathbb{R}$$

che non sia una retta: scelgo in modo arbitrario $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$, e definisco $\forall x \in S$

$$f(x) = f(1 \cdot a + \sqrt{2} \cdot b + \sqrt{3} \cdot c) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2}) + c \cdot f(\sqrt{3}).$$

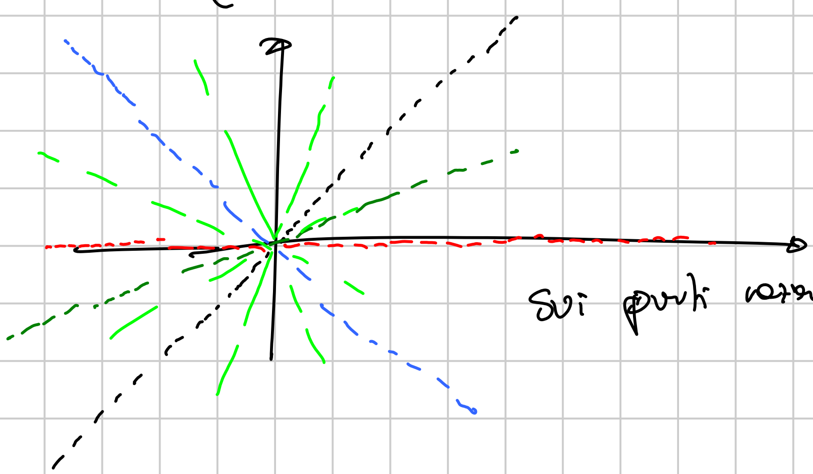
Per ogni $x, y \in S$, se $x = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot \sqrt{2} + c_1 \sqrt{3}$
$y = a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot \sqrt{2} + c_2 \cdot \sqrt{3}$

allora

$$RHS = (a_1 + a_2) f(1) + (b_1 + b_2) f(\sqrt{2}) + (c_1 + c_2) f(\sqrt{3})$$

$$LHS = f(x+y) = f\big((a_1+a_2) \cdot 1 + (b_1+b_2)\sqrt{2} + (c_1+c_2)\sqrt{3}\big) = (a_1+a_2) \cdot f(1) + (b_1+b_2) f(\sqrt{2}) + (c_1+c_2) \cdot f(\sqrt{3})$$

$f(1) = 1$
$f(\sqrt{2}) = 0$
$f(\sqrt{3}) = -1$



sui punti razionali: $q = q \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \sqrt{3}$

$$f(q) = q \cdot f(1) = q$$

sui punti della forma $q\cdot\sqrt{2}$: $f(q\sqrt{2})=0$

sui punti della forma $q\cdot(1+\sqrt{2})$, $q\in\mathbb{Q}$

$$f\left(q\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=q\cdot f(1)+q\cdot f(\sqrt{2})=q$$

per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, i punti della forma $q(\alpha+\beta\sqrt{2})$, $q\in\mathbb{Q}$, formano una retta con coeff. ang. $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta\sqrt{2}}$

Posso ingrandire sempre questo insieme: es,

$$\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}\to\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}-1\}\to\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}-1,\pi\}$$

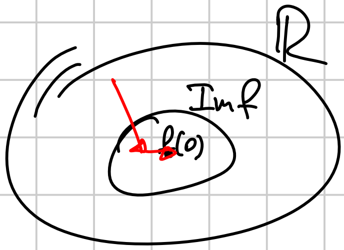
Si riesce a costruire un insieme di "generatori" di questo tipo per tutto $\mathbb{R}$, si chiama <u>base di HAMEL</u>

TI: esistono soluzioni non costanti di

$$f(xy+f(x))=f(7xy)\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}\ ?$$

$P(x,0)$: $f(f(x))=f(0)$

$P(1,y)$: $f(y+f(1))=f(7y)$



$a=f(1)$ $\quad 7y$ e $a+y$ hanno la stessa immagine

$P(2,y)$: $f(2y+f(2))=f(14y)$

$$\underbrace{\qquad S\qquad}_{f=0}\ \underbrace{\qquad S^c\qquad}_{f=1}$$

BMO07 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(f(x)+y)=f(f(x)-y)+4yf(x)\qquad P(x,y)$$

$$P(x, f(x)): \quad f(2f(x)) = f(0) + 4[f(x)]^2$$

⚠ NO! $\boxed{\text{pongo } 2f(x) = z \text{ e ottengo } f(z) = f(0) + z^2}$

Idea cruciale:

$\mathbb{R} = \operatorname{Im} f - \operatorname{Im} f$: ogni $z \in \mathbb{R}$ si scrive come $f(\text{robe}) - f(\text{robe})$

Dim:

$P\left(b, \frac{a}{4f(b)}\right)$: $f(\text{robe}) = f(\text{robe}) - a$ (se $f(b) \neq 0$)

$$\star \; f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4yf(x)$$

Max

Sostituzione truccosa: $P(x, 2f(z) - f(x))$

$$f(2f(z)) = f(2f(x) - 2f(z)) + 4\cdot(2f(z) - f(x)) \cdot f(x)$$

$P(x, f(y))$: $f(f(x)+f(y)) = f(f(x)-f(y)) + 4f(y)f(x)$

$= f(f(y)+f(x)) = f(f(y)-f(x)) + 4f(x)f(y)$

Grazie al lemma $\Rightarrow f(\underbrace{f(x)-f(y)}_{a}) = f(\underbrace{f(y)-f(x)}_{-a})$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$

$P(a, f(b)+f(c))$: $\quad P(a, f(b)+w)$

$$f(f(a)+f(b)+f(c)) = f(f(a)-f(b)-f(c)) + 4f(a)f(b) + 4f(a)f(c)$$

$P(b, f(a)+f(c))$: $\quad P(b, f(a)+w)$

$$f(f(b)+f(a)+f(c)) = f(f(b)-f(a)-f(c)) + 4f(b)f(a) + 4f(b)f(c)$$

$$\Rightarrow f(f(a)-f(b)-f(c)) + 4f(a)f(c) = f(f(b)-f(a)-f(c)) + 4f(b)f(c)$$

$$f(\underbrace{f(a)-f(b)}-f(c)) + 4\underbrace{(f(a)-f(b))}f(c) = f(\underbrace{f(b)-f(a)}-f(c))$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

LEMMA

$$f(z-f(c))+4z\,f(c)=f(+z+f(c))$$ Ripeto con w al posto di $f(c)$

$$f(z-w)+4zw=f(z+w)$$ facile concludere (poni $z=w$)

SL2005 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x)) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Riesco a porre $y=x+yf(x)$?

sì, se scelgo $y=\dfrac{x}{1-f(x)}$ (e se $f(x)<1$)

Dato x t.c. $f(x)<1$, scrivo $P\left(x,\dfrac{x}{1-f(x)}\right)$

$$f(x)\,\cancel{f(y)}=2\cancel{f(y)} \Rightarrow f(x)=2$$, assurdo ?!

$\Rightarrow f(x)$ non è mai minore di 1.

Se $a,b\in \operatorname{Im} f$, allora $\dfrac{ab}{2}\in \operatorname{Im} f$ (dalla P)

e anche $\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{ab}{2}$, e anche $\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{ab}{2}$, ... $\left(\dfrac{a}{2}\right)^n\cdot b$

Se avessi $a<2$, allora per un n abbastanza grande $\left(\dfrac{a}{2}\right)^n b$ sta nell'immagine ed è minore di 1. $\Rightarrow$ assurdo

$\Rightarrow \operatorname{Im} f\subseteq[2,\infty)$.

- Supponiamo per ora $\operatorname{Im} f\subseteq(2,\infty)$

TESTO: $\cancel{2}f(x)<f(x)f(y)=\cancel{2}f(x+yf(x))$

$$\Rightarrow f(x)<f(x+yf(x))$$

Per ogni $z>x$, posso scrivere

$P\left(x,\dfrac{z-x}{f(x)}\right)$: $2f(x)<f(x)f\left(\dfrac{z-x}{f(x)}\right)=2f(z)$ $\Rightarrow f(x)<f(z)$

$$\underbrace{2f(y+xf(y))}_{}=f(x)f(y)=2f(x+yf(x))$$

strett. crescente ⇒ iniettiva

uguali

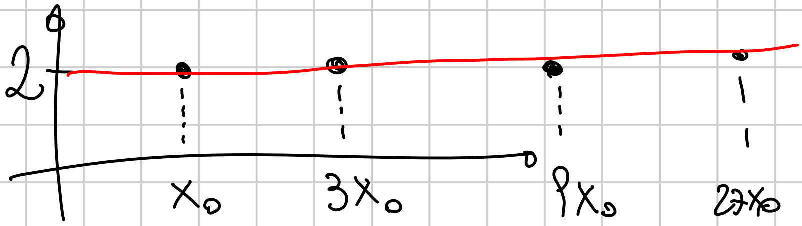
$$y+xf(y)=x+yf(x)$$ e da qui si finisce facilmente

- se $2\in \mathrm{Im}\, f$,

Dato x_0 tale che $f(x_0)=2$, ho

$P(x_0,x_0)$: $$2^{\cancel{2}}=\cancel{2}\cdot f(x_0+x_0f(x_0))$$

$\Rightarrow$ anche $f(3x_0)=2$.



Crescente (debole in questo caso) $\Rightarrow$ soluzione.

Induttivamente, $f(3^k x_0)=2 \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$

Analogamente a sopra, si dimostra che f è (debolmente) crescente

$\forall\, y\in\mathbb{R}$, esisterà k tale che $y<3^k x_0$

$$\Rightarrow \quad 2\le f(y)\le f(3^{k+1}x_0)=2. \quad \square$$

per i lemmi di sopra sui valori nell'immagine

SL01: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.

$$f(xy)\big(f(x)-f(y)\big)=(x-y)f(x)f(y)$$

$P(x,1)$: $$f(x)\left[f(x)-\cancel{f(1)}\right]=(x-\cancel{1})f(x)f(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)\cdot\cancel{f(x)}=x\cdot\cancel{f(x)}\cdot f(1)$$ $\quad a:=f(1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin S \\ a \cdot x & x \in S \end{cases}$$

(suppongo $a = f(1) \neq 0$, altrimenti f è banalmente costante)

Chiamiamo S l'insieme t.c. $f(x) \neq 0$ $\quad 0 \notin S$

Se $x \neq y$, $x, y \in S$, allora $xy \in S$.

Se $x \in S$, allora $x^{-1} \in S$

Dato qualunque S che è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin S \\ ax & x \in S \end{cases}$$ è soluzione (verificare!).