# C1 Medium [Tess]

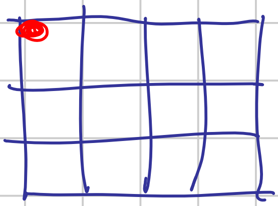
## Contare oggetti geometrici

### Iran TST 2013 3.14

Sono disegnati $n$ rettangoli distinti

Dimostrare che il numero di angoli retti distinti sono
almeno $\lceil 4\sqrt{n} \rceil$

Euristica Random



quanti rettangoli ce l'hanno come angolo?

R: basta scegliere l'angolo opposto

i rettangoli potrebbero essere non paralleli (sono contento)

Formalmente: raggruppo i rettangoli per classe di parallelismo

$n_1$, $n_2$, $n_3$ - - - -

supponiamo di aver risolto quando i rettangoli sono tutti //

$\Rightarrow$

$$\#\text{angoli distinti}\_1 \geq \lceil 4\sqrt{n_1} \rceil$$

$$\text{"} \quad \_2 \geq \lceil 4\sqrt{n_2} \rceil$$

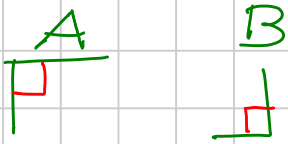
$$\_3 \geq \dots$$

$$\vdots$$

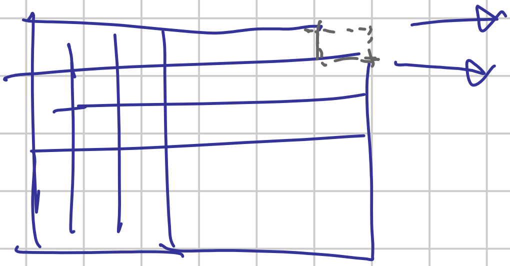
$$\Sigma: \quad \text{totale angoli} \geq 4\left(\Sigma \sqrt{n_i}\right) \geq 4\sqrt{n}$$

Mi posso dimenticare di $\lceil \ \rceil$, perché gli angoli sono in quant
intera

Ora contiamo le coppie di angoli:



la griglia parziale la estendo



ci sono $a_1$ angoli di tipo A

" $a_2$ "

ci sono $b_2$ angoli di tipo B

ogni rettango identifica univocamente una coppia (A, B)

$$\Rightarrow \quad \# \text{rett} \leq \sum_{\text{righe}} a_{\text{riga minore}} \cdot \left( \sum_{\text{righe}} b_{\text{riga magg.}} \right)$$

$$= \sum_{i<j} a_i \, b_j$$

$$n \leq \sum_{i<j} a_i b_j$$

$$a_i b_j \leq \left( \frac{a_i + b_j}{2} \right)^2$$

$$\leq \frac{\left( \sum a_i + \sum b_i \right)^2}{2}$$

$\sqrt{2n} \leq$ numero di angol. di tipo A e B

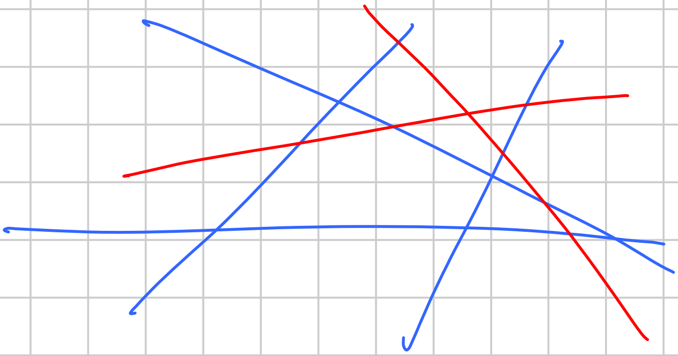
l'altra stima su tipo C e D conclude

x casa: i dettagli

IMO 2014 6

n rette generiche sul piano ne coloro k di blu succede che nessuna regione limitata è completam. circondata di blu. Quanto può essere grande k?

| | | | |
|---|---|---|---|
| MS: | 1 pt | $k \geqslant C n^{\alpha}$ | $\alpha > 0$ |
| | 2 pt | $k \geqslant C n^{\frac{1}{2}}$ | |
| | 4 pt | $k \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}}$ | |
| | 7 pt | $k \geqslant \sqrt{n}$ | |



$$X = \{ (C, R) : C \text{ è config. di rette blu e } R \text{ è una regione blu di } C \}$$

$$|X| = \sum_{C} \text{numero di regioni blu in } C$$

$$\geqslant \sum_{C} 1 = |\text{insieme delle } C| = \binom{n}{k}$$

$$|X| = \sum_{R} \text{numero di config. che rendono blu } R$$

$$= \sum_{R} \binom{n - b(R)}{k - b(R)}$$

$$\le \sum_{R} \binom{n-3}{k-3} = \binom{n-3}{k-3} \text{ \# regioni limitate}$$

$$\overset{?}{\le} \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

x case

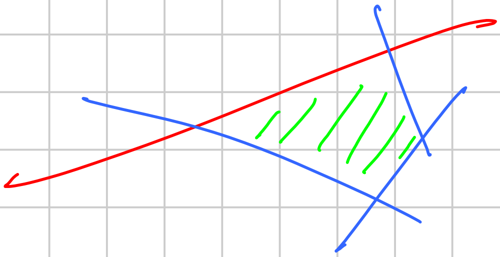
$$\binom{n}{k} \le |X| \le \binom{n-3}{k-3} \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

semplificando $n \le \frac{k(k-1)(k-2)}{2} c \le c' k^3$

$$k \geq \alpha n^{\frac{1}{3}}$$

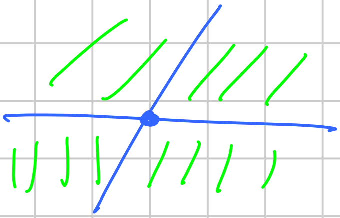
Idea: scegliere una configurazione massimale di rette blu.

Se $C$ è massimale



Contiamo le / $= n-k$

ad ogni regione verde associo un'inters. blu



ogni $\cap$ è scelta al massimo 4 volte

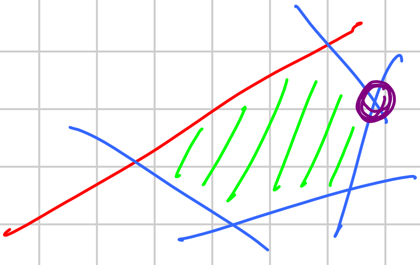
$\#$ / $= \{ (\text{regione } ///, \cap) \} \le 4 \, \# \cap = 4 \binom{k}{2}$

$n-k \le 2k(k-2)$

$$k \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Per migliorare scegliamo meglio la mappa

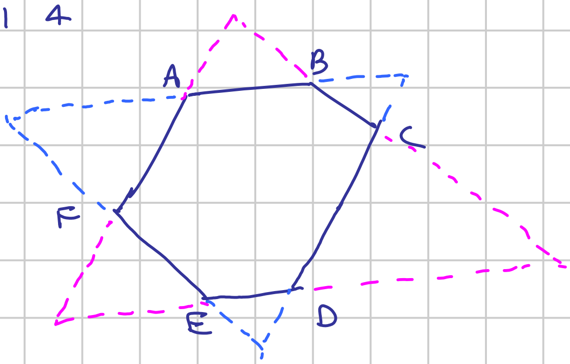
▨ $\longmapsto$ $\cap$



x casa: fate la stima con la nuova scelta di: $\cap$

BMO 2011 4

Es:



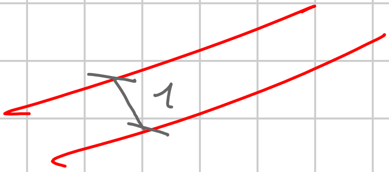
⬡ ha area 1

Th: ▽ o △ ha area $\geqslant \frac{3}{2}$

# Scegliere oggetti estremali

## BMO 2010 3

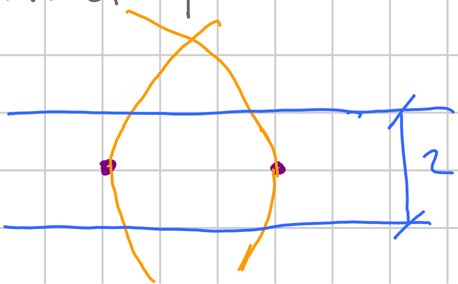
Finiti punti nel piano. Ogni terna di punti è contenuta in una striscia larga 1.



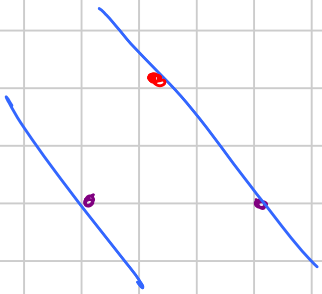
Th: dimostrare che tutti i punti stanno in una striscia larga 2.

Idea fondamentale: prendere la coppia con distanza massima

ora scelgo



per ogni altro punto voglio sperare che rientri in questa



il rosso sta dentro la nostra fascia?

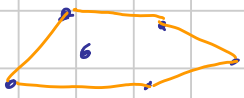
per massimalità l'altezza •, corrisp. alla base massima, è la minima del triangolo ∴ e dunque l'altezza ≤ 1

## IMO 2013 2

Ci sono 2013 pt e 2014 pt. Vi vengono date k rette da disegnare senza passare per i punti colorati. (a 3 a 3 NON allineati)

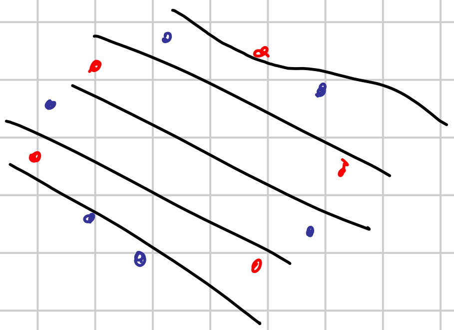
Quante ve ne servono per suddividere tutte le coppie di punti di colori diversi?

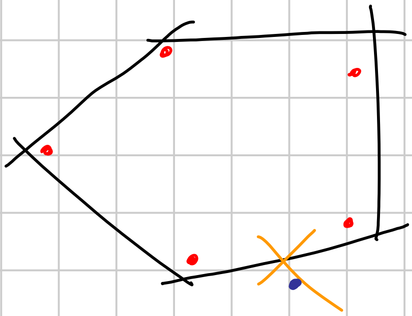
Idea fondamentale: inviluppo convesso



spesso i punti sul bordo dell'inviluppo convesso sono interessanti

Esempio:

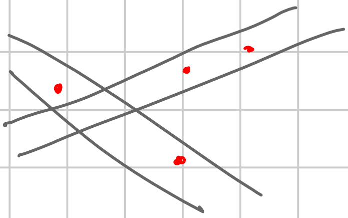




abbiamo $k \geq 2013$

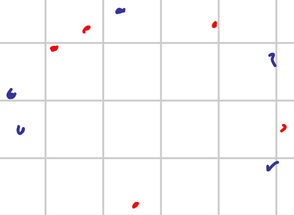
possiamo usare 2 rette parallele alla congiung. per separare 2 punti dagli altri;

perché? perché ho solo finiti punti e non sono allineati



Già ora abbiamo sempre una costr. con $k \geq 2014$

Miglioro la costruzione all'inizio :



qui separare 1 rosso costa 1 retta

altrimenti il convex hull è tutto ●, ne separo 2 e lavoro sui blu.

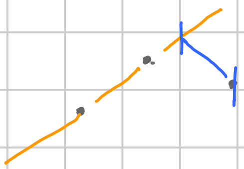
## Thm di Sylvester

L'insieme di punti $A \subseteq$ piano è finito e gode della seg.

$\forall\ p_1, p_2 \in A,\ \exists\ p_3 \in A$ allineato con $p_1, p_2$

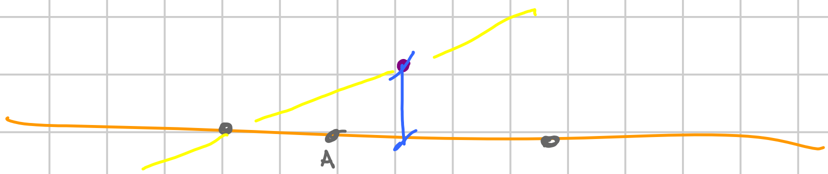
Th: allora $A \subseteq$ retta.

Idea : considerare una distanza minima



fra le finite coppie $(\overset{r}{\text{retta}}, \overset{p}{\text{punto}})$
dove retta fra 2 pt. in A , punto $\in A$

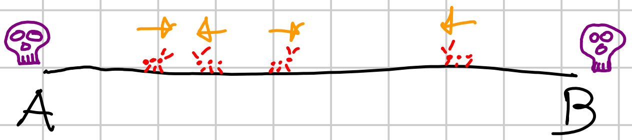
prendiamo quella che minimizza la dist.
fra p e r.



violazione della minimalità di ( — , • )
perché ( — , $\overset{A}{\bullet}$ )

# Invarianti

## Folklore



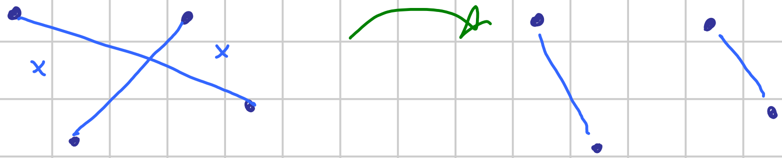
le formiche che toccano
A, B muoiono
formiche che si scontrano
si girano istantaneamente

Quanto tempo impiegano prima di morire tutte?

Invariante: i semini vanno dritti perché si scambiano
a contatto
il tempo è facilmente controllabile dal cammino
dei semini

## IMOSL 2014 7

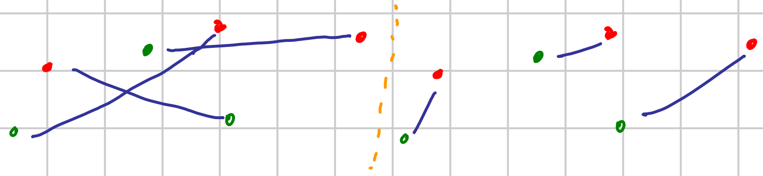
n punti sul piano a 3 a 3 non allineati
ci sono n segmenti che li congiungono in modo che
ogni punto è estremo di esattamente 2 segmenti

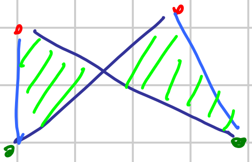


Domanda: il processo termina?

Vera domanda: dimostrare che termina in $\leq \frac{n^3}{4}$ mosse.

Domanda 1: classico





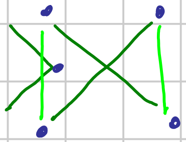
solo finite possibilità per le lunghezze di segmenti (in tot)

Oss: questo invariante dà troppa poca informazione per il bound $\frac{n^3}{4}$

abbiamo un bound $> (n-1)!$

Idea discretizzare l'invariante

idea 1: contare tutte le intersezioni fra segmenti



niente da fare

idea 2: guardare le intersezioni con i prolungamenti

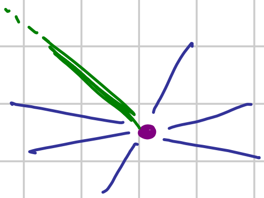
considerazione 1: i segmenti cambiano, quindi anche le rette su cui stanno

considerazione 2: devo tener conto dei segmenti

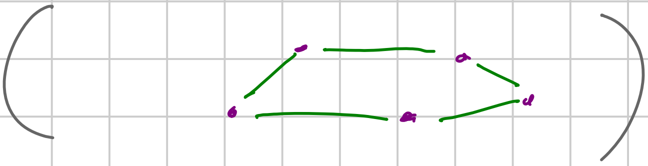
$Q$ = numero di $\boxed{\text{inters.}}$ fra segmenti tracciati e le
(*)

rette fra qualsiasi coppia di punti.

considerazione 3



vorrei contarle O



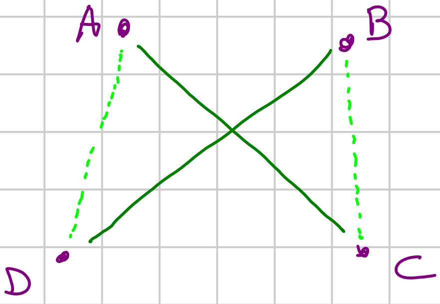
⊛ non agli estremi del segmento

i) quanto fa al massimo Q

ii) far vedere che scende abbastanza in fretta

i) $Q \leq \#\text{rette} \cdot \#\text{segm.} \leq \binom{n}{2} n < \frac{n^3}{2}$

ii) Hope: ad ogni mossa Q scende di almeno 2



$n_{xy}$ = numero di inters. fra le rette e il segm. xy

$$n_{AC} + n_{BD} \geq 2 + n_{AD} + n_{BC}$$

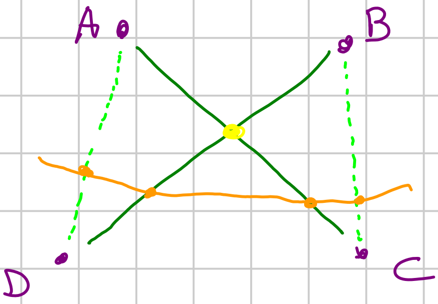
$N_{xy}$ = l'insieme delle rette che toccano xy (al suo interno)

$$n_{xy} = |N_{xy}|$$

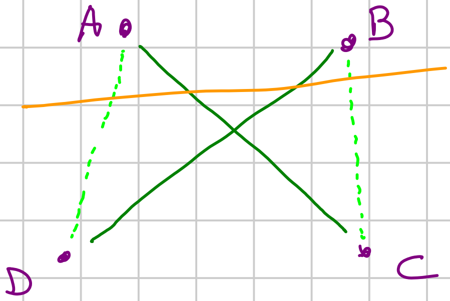
A) $|N_{AC} \cup N_{BD}| \geq \underline{2} + \underline{|N_{AD} \cup N_{BC}|}$

B) $|N_{AC} \cap N_{BD}| \geq |N_{AD} \cap N_{BC}|$

A)

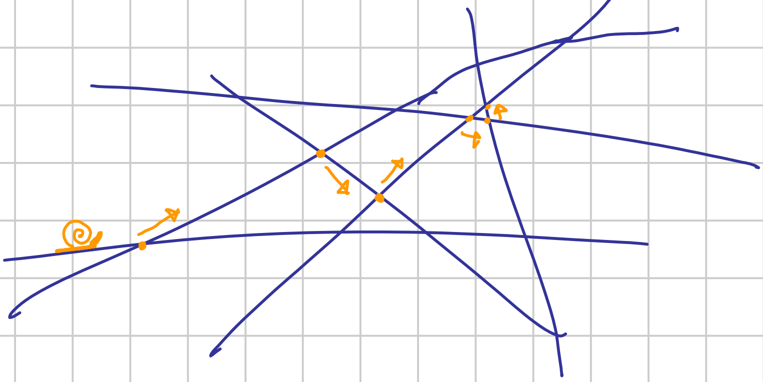


B)



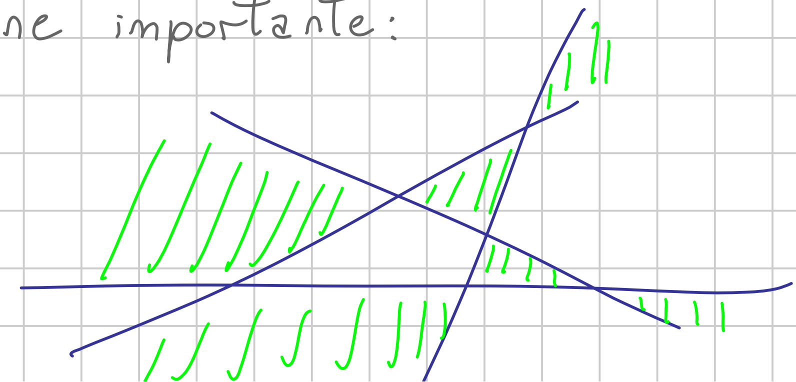
## EGMO 2017 3

La chiocciola "Turbo" cammina alla sua massima velocità su alcune rette



Th: dimostrare che non può percorrere uno segmento in entrambe le direzioni.

Colorazione importante:



costruiamola induttivamente!

P.B. tutto bianco!

P.I. per ip. ind., se togl~~o~~ una retta ho una colorazion
che va bene per k-1 rette

aggiungo l'ultima retta e inverto i colori
su una delle 2 metà
⇒ ∀ segmento che esisteva già prima
la condizione di colori diversi è mantenuta
∀ segmento della nuova retta
ho invertito solo una delle 2 regioni

Altro modo: geometria analitica

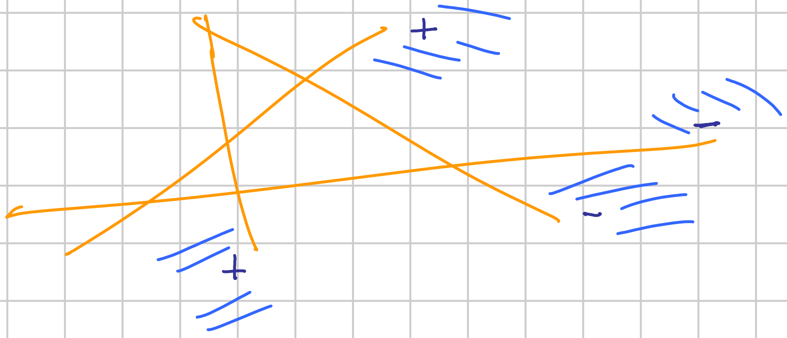
ogni retta è identificata da un'equazione cartesiana $E(x,y)=0$

e i 2 semipiani individuati corrisp.
a $E(x,y)>0$, $E(x,y)<0$

tante rette corr. a tante equaz.

$$E_1(x,y)$$
$$E_2(x,y)$$
$$\vdots$$
$$E_k(x,y)$$

le regioni sono identificate dall'intersez. di alcuni
semipiani (uno per ogni retta)



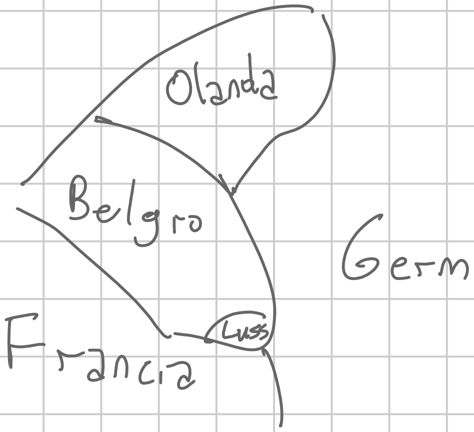
(alcune scelte danno $\cap = \emptyset$)

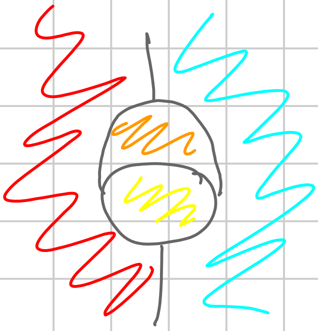
il colore di ogni regione lo assegno con la parità dei segni autom. funziona!

Oss: la stessa colorazione funziona con anche altri tipi di equazione

l'unica condizione è che il segno di E cambi da una parte all'altra

Oss: il teorema dei 4 colori ha bisogno di 4 colori!

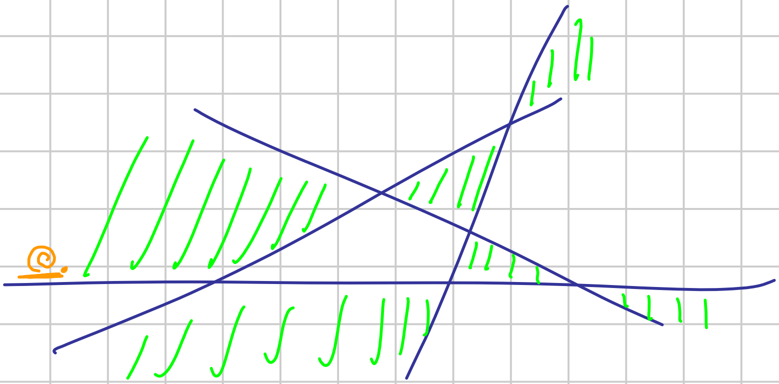




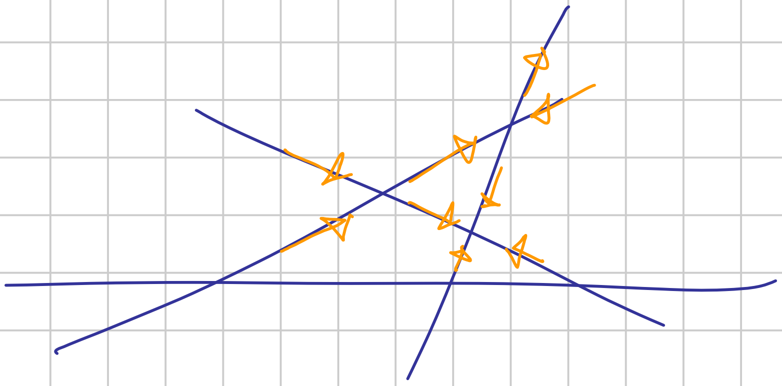
Continuiamo l'EGMO

L'invariante è

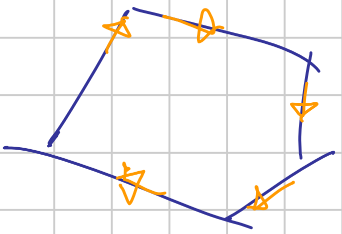
avere il /// a sinistra



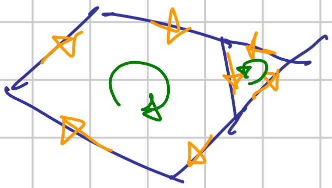
Altro approccio



direzionare le porzioni di retta in modo che tutti gli incroci siano "a sella"



ho tutte selle
⟹ bordo percorribile



se ho tutti i bordi percorribili
⟹ regioni adiacenti si percorrono nell'altro senso

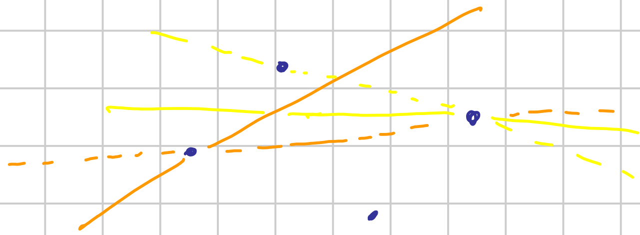
posso colorare le regioni dei colori "orario" e "antior."

Se parto da una colorazione alternante, ritrovo i punti di sella!

IMO 2011 2

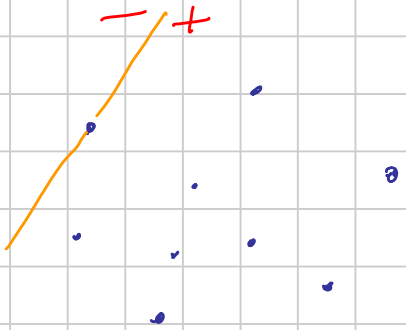
$n \geq 2$ punti sul piano

c'è una retta che si chiama "mulino a vento"



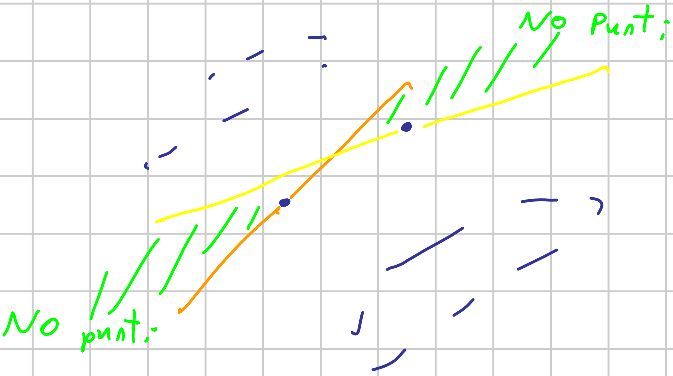
Th: dimostrare che esiste una config. iniziale a partire dalla quale la retta tocca tutti i punti

Cerchiamo invarianti e config. che non toccano tutti i punti



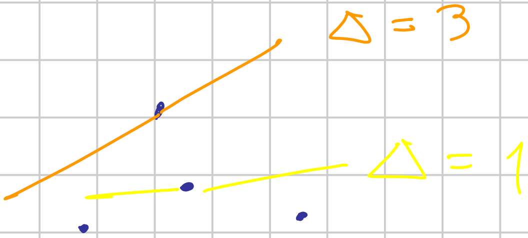
l'invariante qui è che tutti i punti stanno dallo stesso lato

in generale



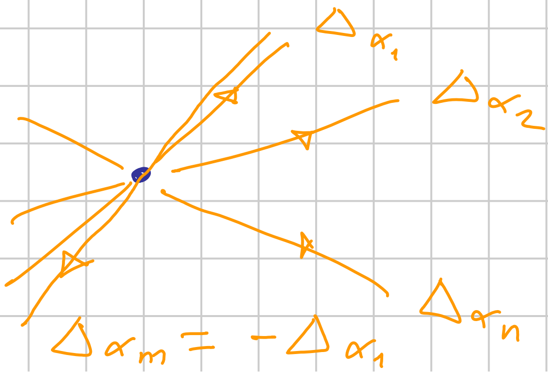
l'invariante è la diff. Δ di punti tra lato + e −

Quindi non vanno bene le conf. in cui la Δ iniziale non viene mai presa per almeno un punto



Vorrei iniziare con $\Delta = 0$ n dispari ($\Delta$ minimo)

$= \pm 1$ n pari

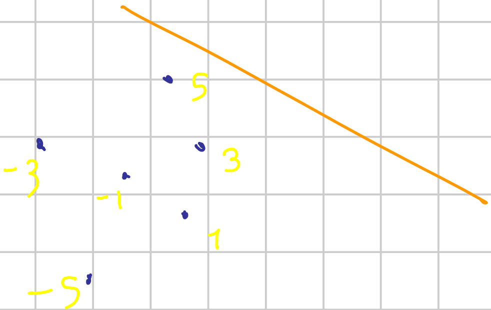


fra l'angolo $\alpha_1$ e $\alpha_m$, la quant. $\Delta$ si è avvicinata di molto allo $0$

- caso continuo: tocca lo 0
- $|\Delta_{min}| \le 1$

Ora si conclude facilmente perché

- la retta visita tutte le angolazioni,
- $\forall$ angolazione ho 1 vertice che ha $\Delta_{min}$



- $\forall$ vertice $\exists$ 1 angolazione buona