# C2 Medium [Tess]

Titolo nota 07/09/2019

## Pigeonhole

$\boxed{1}$ Dimostrare che esiste $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.
N si può scrivere come somma di 2015 potenze 2014-esime
in $\geq 2016$ modi diversi.

$\boxed{2}$ In un paese ci sono solo 2 lettere A, M
e le parole hanno $\leq 2019$ lettere
la concatenazione di 2 parole non è mai una parola.
Quante parole al max?

$\boxed{3}$ In un altro paese ci sono $2^N$ bandiere che sono formate da
$1 \times N$ quadretti ciascuno colorato di giallo o blu. $(N \geq 4)$
Quante ne devo prendere a caso affinché ne possa prelevare
N tali che trovo la diagonale monocromatica?

$\boxed{1}$ ITAMO 2014 5

posso scegliere 2015 interi distinti come basi $(\leq K)$

e calcolarne la somma delle potenze 2014

è una mappa $f: A \to B$

$$|A| = \binom{K}{2015} \qquad |B| \leq 2015 \cdot K^{2014}$$

$\boxed{2}$ TF 2014

Chiaramente posso scegliere solo parole con lungh. $> \frac{L}{2}$

è un insieme buono e sto escludendo $2^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor + 1} - 2$

Se ho una parola più piccola $p$

$X$ , $P + X$ non posso averle entrambe

concatenazione

$\forall$ $X$ t.c. $\ell(X+P) \leq L$

$\ell(X) \leq L - \ell(P)$

Quanti vincoli esclusivi? Sono $2^{L-\ell(P)+1} - 2$

Il punto è che tutti i vincoli $(X, P+X)$ sono disgiunti

$\boxed{3}$ IMOSL 2010 2

A mano, per $N=4$ , $K=5$

Non può essere $K \leq 2^{N-2}$ perché se scelgo

2 colonne una gialla, l'altra blu non ho diag. monocr.

lower bound

Vorrei $K = 2^{N-2}+1$

Voglio costruire la bandiera $\square$ con diag. per induzione

quindi brucio una colonna e mi tengo solo le righe

che hanno wlog blu (se sono almeno $2^{N-3}+1$)

pigeonhole

Ora l'ip. induttiva mi garantisce un quadrato con diagonale grande $N-1$

(se la diag. è gialla, mi occorreva almeno un punto giallo)

Lemma dei matrimoni (Hall):

Boys GIRLS

ciascun ragazzo ha delle preferenze $r_i \to G_i \subseteq G$

vogliamo un accoppiamento che comprenda tutto $B$.

La condizione N e S affinché ne esista uno è

$$\forall \; S \subseteq B \qquad \left| \bigcup_{i \in S} G_i \right| \geq |S|$$

Dim:

Necessità: ovvia (condizione verificata per un accoppiamento)

Sufficienza: induzione estesa su $|B|$

caso 1 – $\exists$ una "=" nella condizione nel sottoins. $S$, allora per ip. ind. su $S$ e $B/S$ ho gli accoppiamenti per entrambi

caso 2 – $\nexists$ =.
scelgo 1 coppia a caso e valuto la condizione su $B \setminus \{b\}$

$\boxed{3}$ nuovo approccio:

devo accoppiare righe e colonne

1 situazione (1 poss. acc.) — collego le colonne alle righe se nell'inters. c'è il blu

2 " (2° poss. acc.) — " giallo

Ora controlliamo le ipotesi di Hall. Se non riesco ad acc.
$\exists$ $C_g \subseteq$ colonne e $C_b \subseteq$ colonne t.c.

$$|P(C_g)| < |C_g| \quad e \quad |P(C_b)| < |C_b|$$

Se $\exists\ c \in C_g \cap C_b$

tutte le righe si collegano a $c$, dall'altra

$$n^\circ \text{ righe} \leq | \cup | \leq |P(C_g)| + |P(C_b)| \leq |C_g| + |C_b| - 2 \leq 2N-2$$

$\boxed{4}$ $S \subseteq \mathbb{Z}$, $|S| = 2019$ allora $\exists\ T \subseteq S$, $T \neq \emptyset$ t.c.
$2019 \mid \sum_{t \in T} t$

$\boxed{5}$ $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ fissato. Una A-partizione di $n$ in $k$ parti è
$n = p_1 + \dots + p_k$, con $p_i \in A$ dove $k = |\{p_i\}|$
È ottimale se $k$ è il minimo possibile.
Dimostrare che $k \leq \sqrt[3]{6n}$ per A-partizioni ottimali

$\boxed{6}$ Una catena di sottoinsiemi di $A$ è $S_1 \subseteq \dots \subseteq S_h$.
Quante catene occorrono per ricoprire $\mathcal{P}(A)$, con $|A| = n$?

$\boxed{4}$ Grande classico

Prendo una catena $\{a_1\} \subseteq \dots \subseteq S$

è lunga $|S|$, o ho già trovato un sottoins. con somma $\equiv 0$ oppure 2 hanno la stessa classe mod $|S|$

Quindi la differenza va bene!

$\boxed{5}$ IMOSL 13 C4

Consideriamo una partizione ottimale

Posso assumere $A = |\{p_i\}|$

allora l'ottimalità significa che non posso "raccogliere" termini

$$\sum_{i \in I} p_i = \sum_{j \in J} p_j \quad \text{con } (|I| < |J|)$$

l'idea di come applicare pigeonhole è prendere

$\forall$ cardinalità di $|I|$ voglio tanti sottoinsiemi con somme diverse ⊛

tutte queste somme sono $\leq n$

$$f : \mathcal{P}(\cancel{A}) \to \{1, \dots, n\}$$

$$Y = \bigcup \{\text{insiemi scelti } ⊛\}$$

il bound che trovo sarà $|Y| \leq n$

$$|Y| = g(|A|) = g(k)$$

vorrei che $g(k) \geq \frac{k^3}{6}$

Come trovo molti sottoinsiemi con cardinalità fissata $= s$ e somme diverse?

$$\underbrace{a_1 < a_2 \; \dots}_{s} \dots < a_k$$

somma minore con

poi gli altri sottoinsiemi con somma via via crescente li prendo alzando il + grande disponibile

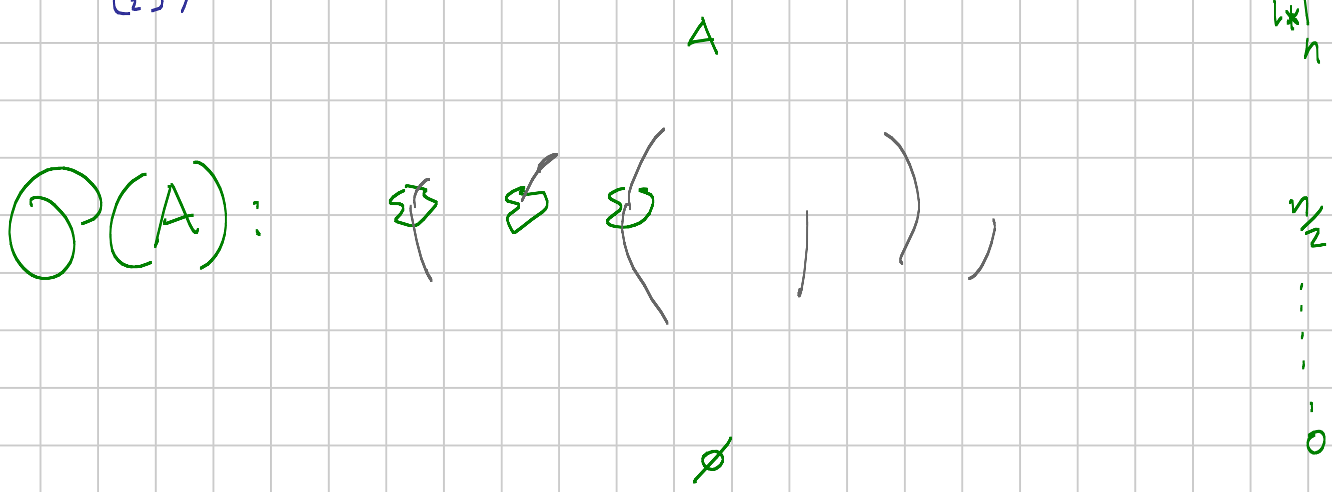
6) teorema noto

La risposta si indovina facilmente: $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$\geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ perché nessuna catena coinvolge + di un insieme con la stessa card.

e $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \max_i \binom{n}{i}$

$\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ Per costruire le catene viene in aiuto Hall

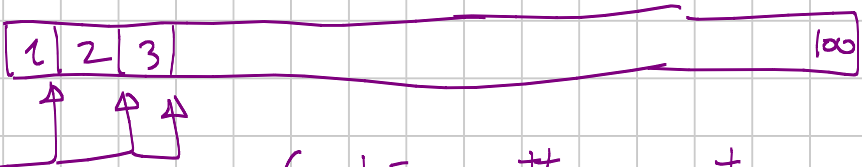



l'accoppiamento è fatto fra card. $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $k+1$

devo valutare $\forall$ scelta di sottoins. con card. $= k$
ne devono esistere almeno altrettanti che contengono almeno 1 e di card $= k+1$

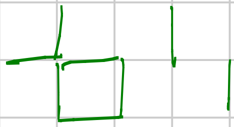
# Double - Counting

$\boxed{7}$ Una striscia :




viene piegata finché non ottengo una str. pieg. larga 1
Ora scriviamo i numeri nell'ordine dall'alto al basso.
Dimostrare che $2^{100} \leq$ # permut. ottenibili $\leq 4^{100}$

$\boxed{8}$ Selezioniamo un sottografo $G$ della maglia infinita



con $E(G) = e$
dimostrare che $\dfrac{e}{2} \leq \min\left(V(G) - CC(G)\right) \leq \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e}{2}} + 1$

IRAN TST 2017 1.6

$\boxed{7}$ Piego in ordine dalla fine e ho sempre almeno 2 possibilità

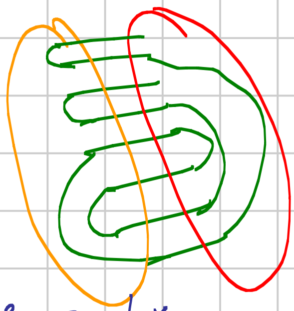
$2^{99}$ modi

Piego solo il 100 in 2 modi:
incollo il 99 e il 100 e questi modi mi garantiscono
sempre 2 possibilità per estendere una perm. ott. con 99
in una da 100
$\Rightarrow$ per induzione ho # ottenibili$(100) \geq 2^k \cdot$ #otten.$(100-k)$

il P.B. funziona con 5

Per l'upper bound

la conf. finale :



posso stimare con catalan a sx e a dx

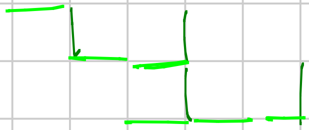
.... il numero di ottenibili $\leq C_{50} \cdot C_{48} \cdot \binom{50}{2}$

Hope! $\leq 4^{100}$

# $\boxed{8}$ IRAN TST 2015 1.5

Lavoriamo su una componente connessa.

$$\frac{e}{2} \le \min\left(V(G)\right) - 1 \le \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e}{2}} + 1$$



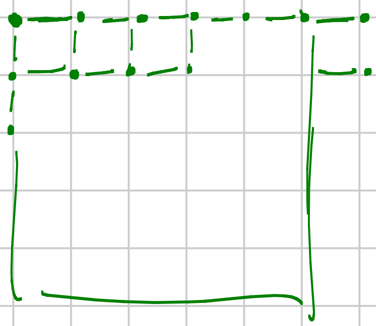
#colonne occupate + #lati | $\le$ vertici (come somma per ogni colonna)

# righe + #lati — $\le$ vertici ( " riga)

$$c + r + e \le 2V$$

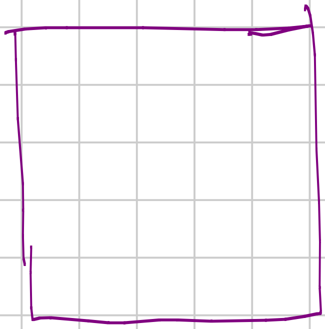
$$\frac{c+r}{2} + \frac{e}{2} \le V$$

Per l'esempio che minimizza scelgo 1 grafo connesso il più vicino possibile al $\square$

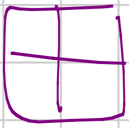


x casa: $\frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e}{2}} \le V(G)$

$\boxed{9}$ Inseriamo i numeri $1, \dots, 25$ in:



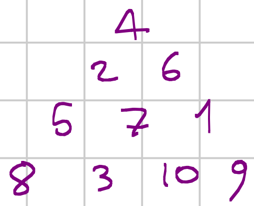
e contiamo le somme nei



e prendiamo la massima

Quanto vale al minimo?

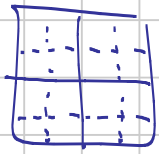
$\boxed{10}$



Si riesce a costruire un triangolo con 2019 righe?

$\boxed{9}$ ITA TST 2019 6

Problema giocattolo: se avessi avuto una tabella $4 \times 4$

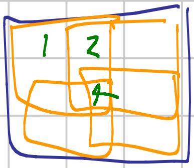


sommo i 4 $2\times2$ agli angoli $= C = 1 + \dots + 16$

$\Rightarrow$ almeno 1 ha $\geq \left\lceil \frac{C}{4} \right\rceil$

$1 + \dots + 16 = C \leq 4 \cdot M$

2 Problema giocattolo: nel $3 \times 3$



$$1 \cdot (\dots) + 2(\dots) + 4 \dots = S \leq 4 \cdot M$$

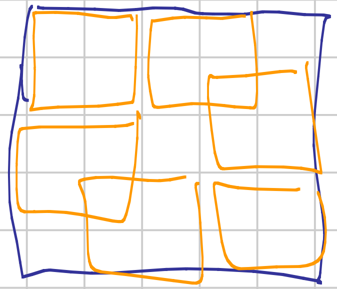
$$= \sum_{i=1}^{16} p_i n_i = \sum p_i \cdot i$$

per riarrang. $\geq 1 \cdot (9 + 8 + \dots) + 2(\dots) + 4 \cdot 1$

Problema vero:

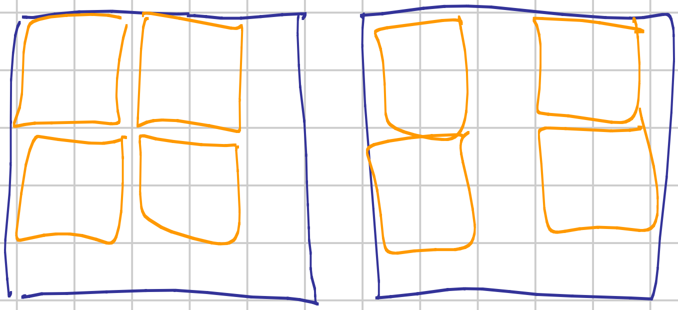
1° tentativo: sommo tutti i $2\times2$ e ottengo $M \geq 41$

2° tentativo: prendo meno $\sqcup$

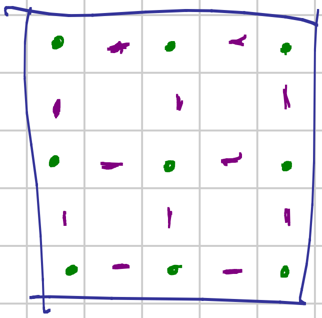


$M \geq 43$

3° tentativo:



scelgo sempre riga e colonna diverse



viene $M \geq 45$

(10) IMO 2018 3 (C4 shortlist)

4
2 6
5 7 1
8 3 10 9

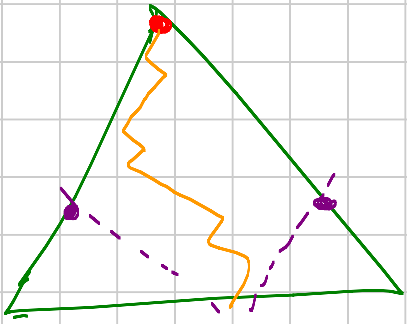
osserviamo il max deve stare sulla riga in fondo

ogni volta che prendo un numero non in fondo deve avere un numero più grosso di lui sotto

se parto dall'alto e scendo così ottengo questa stima

$$1+2+\dots+n \le \text{cima} + \sum \underline{\text{strade scartate}} = F \le \binom{n+1}{2}$$

I numeri + piccoli $(1, 2, \dots, n)$ sono vincolati a indicare la strada verso il più grande



l'assurdo è già al secondo passo