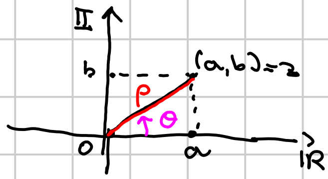
GM1 - Complessi e baricentriche

· Complessi

Ripasso Def. ① $z = a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$ a p. Reale, b p. Imm.

i un simbolo che soddisfa $i^2 = -1$.

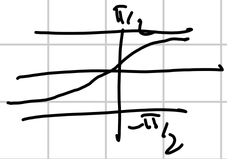


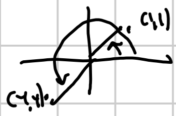
② $z = \rho e^{i\theta}$ $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$

ρ → modulo → distanza (sul p. di Gauss di z dall'origine)

θ → argomento → angolo (in senso antiorario) fra semiasse positivo $\mathbb{R}$ e la retta $0z$.

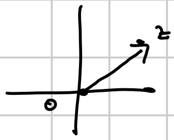
Passare da uno all'altro: $\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$ - $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{"}\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}\text{"} \end{cases}$





Oss. "Numeri complessi $\overset{\text{identificazioni}}{\equiv}$ punti sul piano ≡ vettori"

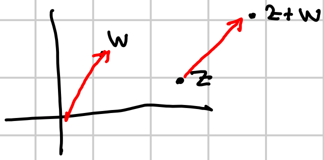
$z \longleftrightarrow (a, b) \longleftrightarrow \vec{0z}$



Operazioni:

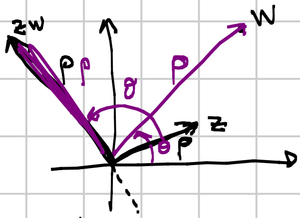
Fisso w numero complesso, $w = \rho e^{i\theta}$

Ⓐ $z \mapsto z + w$ è una traslazione di vettore w.



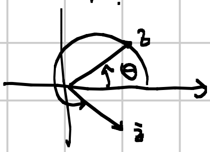
Ⓑ $z \mapsto zw$ è una rotomotetia di centro l'origine, di angolo θ in senso antiorario, e ragione ρ

Oss. Moltiplicare per i = rotazione attorno all'origine di $\frac{\pi}{2}$ in verso antiorario.

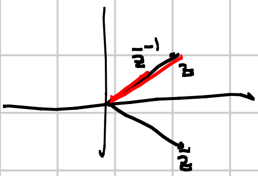


Ⓒ $z \mapsto \bar{z}$ Riflessione rispetto all'asse reale

$z = a + bi = \rho e^{i\theta}$
$\bar{z} = a - bi = \rho e^{-i\theta}$



Ⓓ $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ Inversione di centro 0 e raggio 1

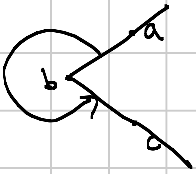


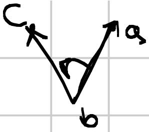
Es. Scrivere la riflessione attorno a Im.

Angoli e similitudini

Oss. Ⓐ $g(z) = \frac{z}{\bar{z}}$. Se $z = \rho e^{i\theta}$ $g(z) = e^{2i\theta}$

Ⓑ $\angle abc$ = l'angolo di cui devo ruotare la sretta ab (in senso antiorario) attorno a b perché coincida con la sretta bc.





Eq. angolo: $\boxed{c-b = (a-b)e^{i\angle abc}\cdot\rho}$ $\rightarrow$

dove $\rho = \dfrac{|\vec{cb}|}{|\vec{ab}|}$ $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{c-b}{a-b} = \rho e^{i\angle abc}$

<u>Cons. 1.</u> $\theta = \angle abc$, $\quad e^{2i\theta} = \dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{\bar c - \bar b}{\bar a - \bar b}$

(A) con $z = \frac{c-b}{a-b}$

$\angle abc = \angle def \iff \dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{\bar c-\bar b}{\bar a-\bar b} = \dfrac{f-e}{d-e} \Big/ \dfrac{\bar f-\bar e}{\bar d-\bar e}$ $\quad \left[\dfrac{A}{\bar A} = \dfrac{B}{\bar B} \;\downarrow\; \dfrac{A}{B} = \dfrac{\bar A}{\bar B} \right]$

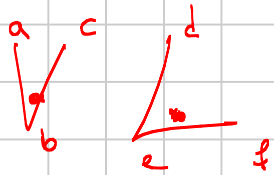
$\iff \boxed{\dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{f-e}{d-e} \in \mathbb{R}}$. (A-U)

<u>Oss.</u> $e^{2i\theta} = e^{2i\theta'} \iff \theta - \theta' = k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

C'è l'ambiguità "$\theta-\theta' = \pi$". Però dati a,b,c $\angle abc$ o $\angle cba$ è conveno secondo la mia notazione. Se omunono, in base al pb. che sto facendo, di scegliere i versi in modo che l'angolo sia cvx allora non c'è più ambiguità.

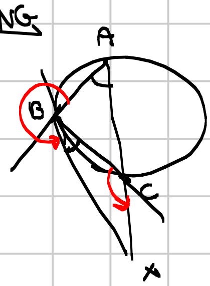
<u>Cons. 2.</u> Eq. angolo $\xrightarrow{abc}$ $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{|\vec{cb}|}{|\vec{ab}|} e^{i\angle abc}$

abc / def $\quad \xrightarrow{def}$ $\dfrac{f-e}{d-e} = \dfrac{|\vec{fe}|}{|\vec{de}|} e^{i\angle def}$ $\quad (\angle abc = \angle def)$



Quindi per il I cr. sim. $\quad abc \underset{\text{dirett.}}{\sim} def \iff \boxed{\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{f-e}{d-e}}$ (D-S)

<u>ACHTUNG</u>

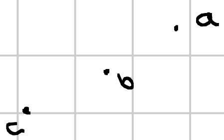


$A\hat{B}X \sim B\hat{C}X \qquad \angle abx \neq \angle bcx$

Per inv. simili basta aggiungere un $-$ a uno dei due termini.

Parallelismi e Perpendicolarità

$e^{2i\theta} = \dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{\bar c-\bar b}{\bar a-\bar b}$ $\quad (\theta = \angle abc)$

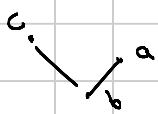


(1) abc allineati $\iff \angle abc = \pi \overset{\text{Eq. angolo}}{\iff} \dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{\bar c-\bar b}{\bar a-\bar b} = 1 \iff \dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{\bar c-\bar b}{\bar a-\bar b}$

$\iff \dfrac{c-b}{a-b} \in \mathbb{R}$.

<u>(Es.)</u> $ab \parallel cd \iff \dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{\bar d-\bar c}{\bar b-\bar a}$ $\quad \left[\iff \dfrac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}\right]$

(2)



(2) $ab \perp bc \overset{\text{Eq. ang.}}{\iff} -1 = \dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{\bar c-\bar b}{\bar a-\bar b} \iff \dfrac{c-b}{a-b} = -\dfrac{\bar c-\bar b}{\bar a-\bar b}$

$\iff \dfrac{c-b}{a-b} \in \mathrm{Im} \quad [\mathbb{R}i]$

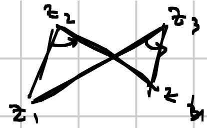
<u>(Es.)</u> $ab \perp cd \iff \dfrac{d-c}{b-a} = -\dfrac{\bar d-\bar c}{\bar b-\bar a}$

Birapporti e cicliche

<u>Def.</u> $[z_1, z_2, z_3, z_4] \overset{\text{def}}{=} \dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2} \cdot \dfrac{z_3-z_4}{z_1-z_4}$

<u>Lemma</u> z_1, z_2, z_3, z_4 ciclici $\iff [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Segue da $\angle abc = \angle def \iff \underbrace{\dfrac{c-b}{a-b} \Big/ \dfrac{f-e}{d-e}}$ è reale.



$z_1 z_2 z_3 z_4$ ciclico $\iff \angle z_1 z_2 z_4 = \angle z_1 z_3 z_4 \iff [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Circonferenza unitaria e scelta delle coordinate

Circonf. unitaria $\qquad z\bar{z} = 1 \;\; (= |z|^2) \qquad [z\bar{z} = a^2 + b^2]$

Molto spesso Cfr circoscritta = Cfr unitaria o circocentro → origine.

Domanda: Chi è h?

Da "Retta di Eulero" $h + 2o = 3g$, $\boxed{g = \frac{a+b+c}{3}}$ e quindi

$h + \cancel{o} = a+b+c \rightsquigarrow h = a+b+c$

NIENTE

E l'incentro? piccolo remind. in vettori $\vec{I} = \frac{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}}{a+b+c}$ $\quad a, b, c$ sono le lunghezze dei lati

Notazione u, v, w. $\quad p$

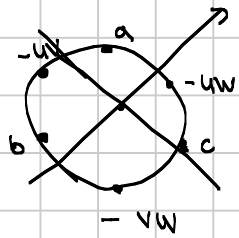
Lemma Dato abc triangolo [a, b, c sono i $\mathbb{C}$ che identificano i vertici] o arcocentro è l'origine.

$\exists\, u, v, w$ complessi t.c.
$$\begin{cases} a = u^2 \\ b = v^2 \\ c = w^2 \\ i = -(uv + vw + uw) \end{cases}$$

Oss. i punti medi degli archi sono $\pm uv, \pm vw, \pm uw$

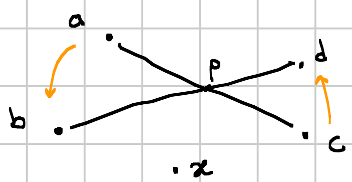
Es. Scrivi i tre excentri

Idea di dim.:



Cercato $u, v, w \in$ cfr unitaria in modo che $-uv$ sia p.to medio di $\widehat{ab}$ che non contiene c e ciclici usato l'info sintetica che l'incentro è l'ortocentro dei p.ti medi $-uv, -vw, -uw$.

Es 1



$abcd$ non par.,

· Mostrare che $\exists!$ rotomotetia che manda $a \to b$, $c \to d$

· Il centro di questa rotomotetia è $x = \frac{ad - bc}{a+d-b-c}$

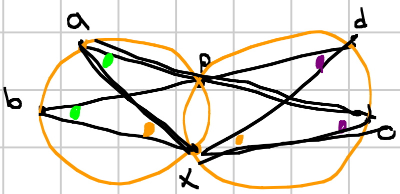
e il n. $\mathbb{C}$ che ha come modulo la ragione di questa rotomotetia e come ~~angolo~~ argomento l'angolo di rotazione è $\alpha = \frac{b-d}{a-c}$

$p = ac \cap bd$

· x è l'intersezione di $\odot abp \cap \odot cpd$.

Sol.
$$\begin{cases} b - x = (a-x)\alpha \\ d - x = (c-x)\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{b-x}{a-x} = \frac{d-x}{c-x} \Rightarrow bc - (b+c)x + x^2 = ad - (a+d)x + x^2$$
$$\Rightarrow x(a+d-b-c) = ad - bc$$
$$\Rightarrow x = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$$

Facendo i conti si ottiene $\alpha = \frac{b-d}{a-c}$

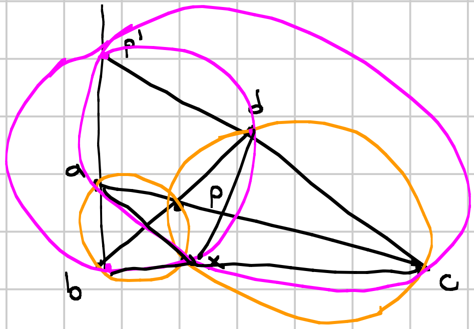


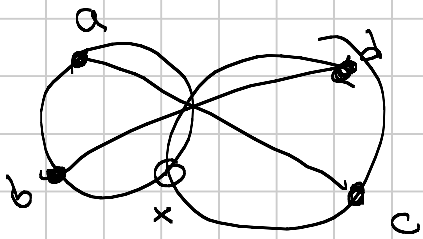
$$\left[\begin{array}{l} a \to b \\ c \to d \\ x = \frac{ad-bc}{a+d-b-c} \\ \alpha = \frac{b-d}{a-c} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} a \to c \\ b \to d \\ \left[x = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}\right] \\ \alpha = \frac{c-d}{a-b} \end{array}$$

vedete gli altri

Mostro $X\hat{AC} \sim X\hat{BD}$. Infatti $\angle XAC = \angle XAP = \angle XBP = \angle XBD$ e anal. $\angle XCA = \angle XDB$.

Quindi $\exists$ una rot. che manda $X\hat{A}C \rightsquigarrow X\hat{B}D$ e quindi manda $A \to B$, $C \to D$.



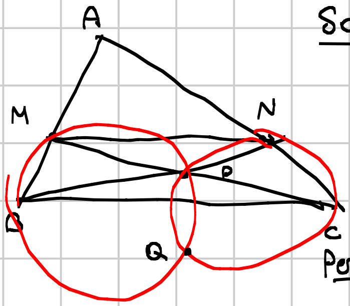


Cosa salva?

Se so $a, b, c, d \to x = \dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$

BMO 2009-2

Mostra $\angle BAQ = \angle PAC$, Hp. $MN \parallel BC$, $P = MC \cap BN$, $Q = \odot BMP \cap \odot CNP$.



Sol. Complessi

$a = \text{origine} = 0$

b, c

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $m = \lambda b$, $n = \lambda c$ poiché $MN \parallel BC$

Per prima $q = \dfrac{mn-bc}{m+n-b-c} = \dfrac{\lambda^2 bc - bc}{\lambda b + \lambda c - b - c} = \dfrac{(\lambda^2-1)bc}{(\lambda-1)(b+c)} = \dfrac{(\lambda+1)bc}{b+c}$

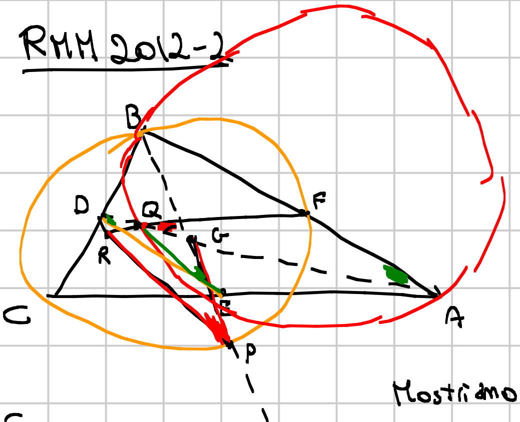
$p = ?$ p è l'intersezione di mc con bn $\begin{cases} p \in mc \\ p \in bn \end{cases}$

Siccome dobbiamo mostrare $\angle BAQ = \angle PAC$, possiamo anche sostituire P con un punto P' su AP e mostrare $\angle BAQ = \angle P'AC$. Però AP è mediana (per Ceva) e quindi prendo $p' = 2M_{BC} = b + c$

$\angle BAQ = \angle PAC \iff \dfrac{q-a}{b-a} \Big/ \dfrac{c-a}{p-a} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{\frac{(\lambda+1)bc}{b+c}}{b} \Big/ \dfrac{c}{b+c} \in \mathbb{R}$ ✓

$= (\lambda+1)\dfrac{\cancel{bc}}{\cancel{b+c}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{b}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{c}}(\cancel{b+c})$

RMM 2012-2



D, E, F p.ti medi

$P = BE \cap \odot BCF$, $Q = \odot ABE \cap AD$

$R = FQ \cap DP$

Mostra che G sta su $\odot DQR$.

Sol

Mostriamo che $\boxed{\angle GPD = \angle GQF}$. Come troviamo P e Q?

[Provate a imporre $Q \in AD$ + $QBAE$ ciclico.]

Può anche prendere un'altra strada... G, Q, D allineati, e D lo so!

Magari se riesco a dire qualcosa su $|GQ|$ ... il fatto è che

$\boxed{G\hat{D}E \sim G\hat{E}Q}$! Perché $\begin{cases} \angle GDE \underset{DE \parallel AB}{=} \angle GAB = \angle QEG \\ \hat{G} \text{ in comune.} \end{cases}$

Questo suggerisce di mettere l'origine in g! $g \equiv 0$ origine

d, e, f i p.ti medi $\boxed{d+e+f=0.}$

$G\hat{D}E \sim G\hat{E}Q \Rightarrow GQ \cdot GD = GE^2 \Longrightarrow q = \frac{d}{|d|}\frac{|GE|^2}{|GD|} = \frac{d}{|d|}\cdot\frac{|e|^2}{|d|} = \frac{d \cdot e\bar{e}}{d\bar{d}} = e\frac{\bar{e}}{\bar{d}}$

Analogamente $p = f\frac{\bar{f}}{\bar{e}}$

Vogliamo $\angle GPD = \angle GQF \iff \frac{d-p}{g-p} \Big/ \frac{f-q}{g-q} \in \mathbb{R} \iff \frac{d - f\frac{\bar{f}}{\bar{e}}}{-f\frac{\bar{f}}{\bar{e}}} \Big/ \frac{f - \frac{e\bar{e}}{\bar{d}}}{-\frac{e\bar{e}}{\bar{d}}} \in \mathbb{R}$

$\iff \frac{d\bar{e} - f\bar{f}}{-f\bar{f}} \Big/ \frac{\bar{d}f - e\bar{e}}{-e\bar{e}} \in \mathbb{R} \iff \frac{e\bar{e}(d\bar{e} - f\bar{f})}{f\bar{f}(\bar{d}f - e\bar{e})} \in \mathbb{R} \iff \frac{d\bar{e} - f\bar{f}}{\bar{d}f - e\bar{e}} \in \mathbb{R}$

$d = -e-f$ poiché $d+e+f=0$.

$\frac{(-e-f)\bar{e} - f\bar{f}}{(-\bar{e}-\bar{f})f - e\bar{e}} \in \mathbb{R} \iff \frac{-e\bar{e} - f\bar{e} - f\bar{f}}{-\bar{e}f - f\bar{f} - e\bar{e}} \in \mathbb{R}$ ✓

Oss. Perché $d+e+f=0$? In generale $g = \frac{a+b+c}{3}$, $d = \frac{b+c}{2}$, $e = \frac{a+c}{2}$, $f = \frac{a+b}{2}$

Quindi $d+e+f = a+b+c$. Se $g=0$, allora $\frac{a+b+c}{3} = 0 \Longrightarrow a+b+c=0$

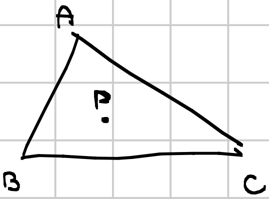
e quindi se $g=0$, $d+e+f=0$.

Coordinate baricentriche

Def. ① $[u:v:w]$ terna omogenea, tre numeri reali non tutti nulli.

$[a:b:c]=[u:v:w]$ sse $\exists\, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ t.c. $u=ka$, $v=kb$, $w=kc$

Def.



$P \in$ piano di ABC

② $|BCP|$ indico l'area con segno del triangolo $B\hat{C}P$. Il segno è + se B, C, P sono ordinati come A, B, C, − altrimenti.

③ C-B: Le coord. bar. di P sono $[\,|BCP| : |CPA| : |APB|\,]$

④ Not. Conway $S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] \cdot bc = bc\cos\alpha$

$S_B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$

$S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

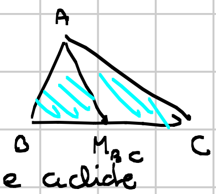
Es. $S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C = 4\,\text{Area}^2_{ABC}$

⑤ α, β, γ sono gli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

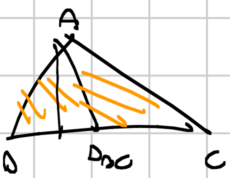
a, b, c sono i lati BC, CA, AB (le lunghezze dei)

Alcuni punti

- $A = [1:0:0]$, $B = [0:1:0]$, $C = [0:0:1]$
- $M_{BC} = [0:1:1]$ e ciclici

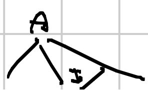


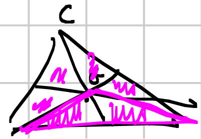
- D_{BC} piede bis.: $= [0 : |CD_{BC}A| : |AD_{BC}B|\,]$



$\frac{|CD_{BC}A|}{|AD_{BC}B|} = \frac{CD_{BC}}{BD_{BC}} = \frac{b}{c}$ $= [0 : b : c]$

- $G = [1:1:1]$





- $I = [\,|BCI| : |CIA| : |AIB|\,] =$

$= \left[\frac{BC\cdot r}{2} : \frac{CA\cdot r}{2} : \frac{AB\cdot r}{2}\right] = [a:b:c]$

• $H = [|BCH| : \text{ciclic}] =$

$= \left[\frac{BC\cdot HH_A}{2} : \text{ciclic}\right] =$

$= \left[\frac{a\,c\cos\beta\cos\gamma}{2\sin\gamma} : \text{ciclic}\right]$

$= [a R\cos\beta\cos\gamma : \text{ciclic}]$

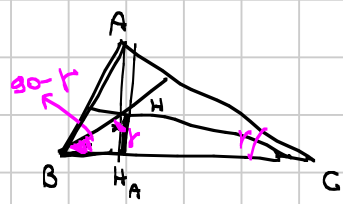
$= [a\cos\beta\cos\gamma : \text{ciclic}] =$

$= \boxed{\left[\frac{a}{\cos\alpha} : \frac{b}{\cos\beta} : \frac{c}{\cos\gamma}\right]} = \left[\frac{2R\sin\alpha}{\cos\alpha} : \frac{2R\sin\beta}{\cos\beta} : \frac{2R\sin\gamma}{\cos\gamma}\right] =$

$\left[\frac{a}{\frac{S_A}{bc}} : \frac{b}{\frac{S_B}{ac}} : \frac{c}{\frac{S_C}{ab}}\right] = \boxed{[\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma]}$

$\left[\frac{abc}{S_A} : \frac{abc}{S_B} : \frac{abc}{S_C}\right] = \boxed{\left[\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right]} = \boxed{[S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B]}$

~~Spesso~~ Conviene quando usiamo le coordinate esatte



$\frac{HH_A}{\cos\gamma} = \frac{BH_A}{\sin\gamma} \Rightarrow HH_A = BH_A\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$= \frac{AB\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$= \frac{c\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$4S^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{4}(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2) = S_AS_B+S_BS_C+S_CS_A$

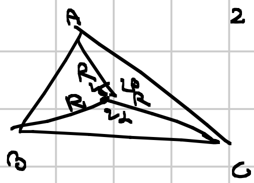
$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

$[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$

$(a^2+b^2-c^2+2ab)(c^2-a^2-b^2+2ab)$

$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$O = \left[\frac{R^2\sin2\alpha}{2} : \frac{R^2\sin2\beta}{2} : \frac{R^2\sin2\gamma}{2}\right] = \boxed{[\sin2\alpha : \sin2\beta : \sin2\gamma]} =$



$= [\sin\alpha\cos\alpha : \text{ciclic}]$

$= \left[\sin\alpha\frac{S_A}{bc} : \text{ciclic}\right]$

$= [a\sin\alpha S_A : \text{ciclic}] =$

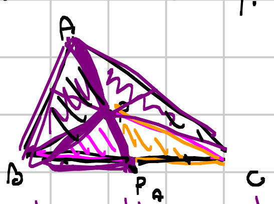
$= \left[\frac{a^2}{2R}S_A : \text{ciclic}\right] = \boxed{[a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C]}$

Oss. $a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C = \sum_{cyc} a^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right) =$

$= -\frac{a^4}{2}-\frac{b^4}{2}-\frac{c^4}{2}+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = 8S^2$ area.

Oss./Def. $P=[x:y:z]$ si dicono coordinate esatte di P se $x+y+z=1$

Oss. P ha coord. esatte $[x:y:z]$ $\quad \vec{P} = x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}$ [Esercizio]



Oss. Per fare i punti medi va bene fare $\frac{\text{somma coordinate}}{2}$ a patto che le coordinate abbiano la stessa somma.

$O = \left[\frac{a^2S_A}{8S^2} : \text{ciclic}\right]$

$N =$ p.to medio OH

$H = \left[\frac{S_BS_C}{4S^2} : \text{ciclic}\right]$

$N = \left[\frac{a^2S_A}{8S^2}+\frac{S_BS_C}{4S^2} : \text{ciclic}\right] = [a^2S_A+2S_BS_C : \text{ciclic}] = [a^2(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) : \text{ciclic}]$

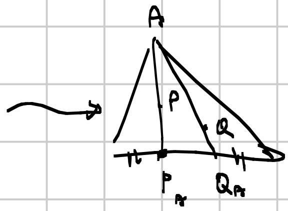
$= [a^2b^2+a^2c^2-\cancel{a^4}+\cancel{a^4}+\cancel{a^2b^2}-\cancel{a^2c^2}+\cancel{a^2c^2}+b^2c^2-c^4-\cancel{a^2b^2}-b^4+b^2c^2 : \text{cic}]$

$= [-c^4-b^4+2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2 : \text{cyc}]$

↳ **Oss.** $P = [x:y:z] \longrightarrow$ $AP \cap BC = [0:y:z]$
$BP \cap AC = [x:0:z]$
$CP \cap AB = [x:y:0]$

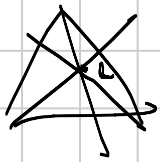
Es. 1 $[x:y:z] \xrightarrow{\text{isogonale}} \left[\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right]$

$[x:y:z] \xrightarrow{\text{isot.}} \left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$

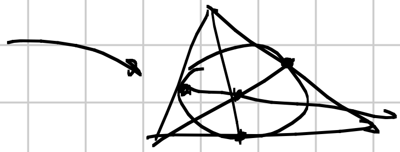


Es. 2 $I_A = [-a:b:c]$ e ciclici

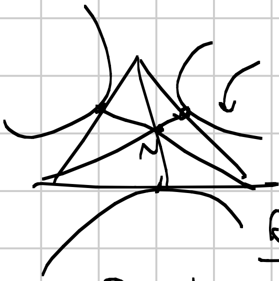
$L = [a^2:b^2:c^2]$ Lemoine → int. simmediane



$Ge = \left[\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right] = [(p-b)(p-c) : \text{ciclico}]$



$Na = [p-a : p-b : p-c]$



Oss. $[1:-1:0]$ chi è?

Pensate a come abbiamo definito le coord. baricentriche
$P \longrightarrow [\,|BCP| : |CAP| : |ABP|\,]$.
Quanto vale $|BCP|+|CAP|+|ABP| = S \neq 0$. Se faccio così si vede non posso trovare terne omogenee $[x:y:z]$ t.c. $x+y+z=0$.
Diciamo che i p.ti t.c. $x+y+z=0$ sono p.ti all'∞.

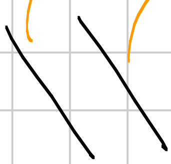
Esercizietto: Viceversa data $[x:y:z]$ $x+y+z \neq 0$ $\exists!\, P$ t.c. $[\,|BCP| : |CAP| : |ABP|\,] = [x:y:z]$

Thread Euclide &
Evan Chen

Rette
- Una generica retta ha equazione $[lx+my+nz=0]$ $l,m,n \in \mathbb{R}$
- P.to all'∞ di $lx+my+nz=0$ è $[m-n : n-l : l-m]$
- Intersezione $\begin{cases} lx+my+nz=0 \\ l'x+m'y+n'z=0 \end{cases}$ e non sono una multipla dell'altra

$\begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix}$ $\quad -\begin{pmatrix} l & n \\ l' & n' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix}$

si intersecano nel punto $[n'm - nm' : nl' - n'l : lm' - l'm]$



Oss. se ho 2 rette parallele ↓ è all'∞

(A) Come vedere che 2 rette sono //? Hanno lo stesso p.to all'∞

- Retta per 2 punti $[a:b:c]$, $[a':b':c']$

$$\left[\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0\right]$$

e quindi 3 p.ti sono allineati se il det della matrice che ha per righe le coordinate dei punti fa zero

- Retta parallela a $lx+my+nz=0$ passante per $[a:b:c]$

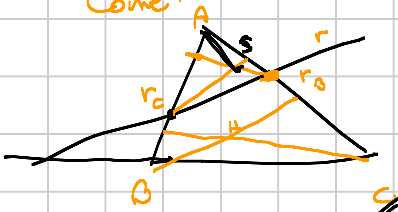
$$\det\begin{pmatrix} m-n & n-l & l-m \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

(Esercizio) $r: px+qy+rz=0$ $\longrightarrow$ p.to all'∞ è $[f:g:h]=[q-r:r-p:p-q]$

Allora il p.to all'∞ di una retta perpendicolare a r è

$$[S_B g - S_C h : S_C h - S_A f : S_A f - S_B g].$$

Come?



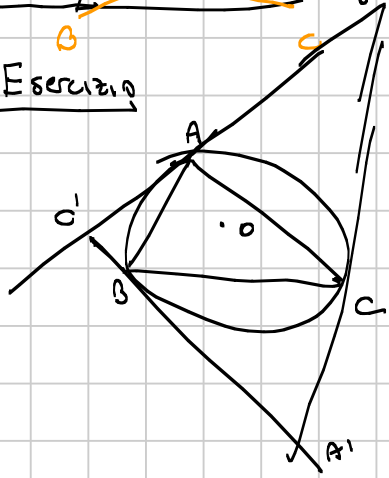
retta $\parallel CH$ passante per r_B

retta $\parallel BH$ passante per r_C

le interseco in S

p.to all'∞ della perp. di r è p.to all'∞ di AS.

Esercizio



Trova A', B', C' vertici del triangolo tangenziale

Sol. Scriviamo l'eq. della t_g in A

Trova ∞_{OA} e $\infty_{\perp, OA}$ e poi fai retta per A, $\infty_{\perp, OA}$.

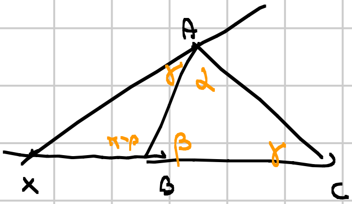
$O = [a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C]$

$OA: \quad c^2 S_C y - b^2 S_B z = 0 \qquad l=0, m=c^2 S_C, n=-b^2 S_B$

$\infty_{OA} = [\,c^2 S_C + b^2 S_B : -b^2 S_B : -c^2 S_C\,]$

$\infty_{\perp, OA} = [\,-b^2 S_B^2 + c^2 S_C^2 : \ldots$

È un po' confusa.



$$\frac{BX}{\sin\gamma} = \frac{AX}{\sin\beta}$$

$$\frac{CX}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AX}{\sin\gamma}$$

$X = [\,|BXC| : |CXA| : |AXB|\,] =$
$= [\,0 : -CX : XB\,]$
$= [\,0 : -AX\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} : AX\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\,]$
$= [\,0 : -\sin^2\beta : \sin^2\gamma\,] =$
$= [\,0 : -b^2 : c^2\,]$

$AX \longrightarrow$
$1,0,0 \quad 0,-b^2,c^2$

$\boxed{c^2 y + b^2 z = 0}$

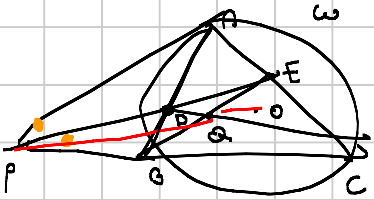
le altre sono

$c^2 x + a^2 z = 0$
$b^2 x + a^2 y = 0$

e i vertici sono $[a^2 : b^2 : -c^2]$, $[a^2 : -b^2 : c^2]$, $[-a^2 : b^2 : c^2]$

$[\,a^2 : b^2 : c^2\,]$
$[\,1 : 0 : 0\,]$

MOP 2006



PA t_g. ω

bis. $\angle APB$ interseca AB, AC in D, E risp.

P, D, E allineati, $D \in AB$, $E \in AC$, PDE bisettrice

$Q = BE \cap PC$

P, Q, O allineati

Sol. Tesi: Calcolare $\angle BAC$.

P è, come prima, $[0 : b^2 : -c^2]$

D si trova con il th bisettrice in APB. $\frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$

quindi $D = [c : b : 0]$. Analogamente $E = [b : 0 : c]$.
$ = [bc : b^2 : 0] \qquad\qquad = [bc : 0 : c^2]$

Quindi $Q = [bc : b^2 : c^2]$

P, Q, O $\Leftrightarrow$
dl.

$$\begin{pmatrix} 0 & b^2 & -c^2 \\ bc & b^2 & c^2 \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ bc & 1 & 1 \\ a^2S_A & S_B & S_C \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2S_A - bcS_B - bcS_C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{S_B+S_C=a^2}{\Leftrightarrow} 2a^2S_A - a^2bc = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S_A = bc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_A}{bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

$\square$