GM3 - Medium Metodi Sintetici

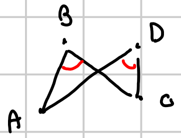
Angoli orientati :

"Servono a evitare i problemi di configurazione"

Per esempio "ABCD ciclico sse $\angle ABC = \angle ADC$" ←

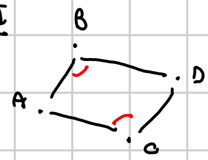
È vero? Dipende. Ci sono 2 casi.

CASO I



✓

CASO II



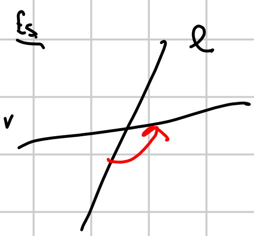
✗

Qui bisognerebbe mostrare $\angle ABD + \angle ACD = \pi$.

—— o ——

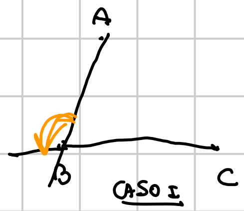
Def. · $\angle(\ell, r)$ è l'angolo di cui devo ruotare ℓ in senso antiorario perché coincida con r.

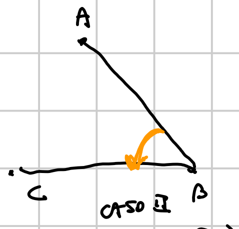
Es.



· $\angle ABC = \angle(AB, BC)$

Es.





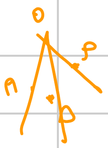
Oss. CASO I → $\angle ABC = \pi - \widehat{ABC}$, CASO II → $\angle ABC = \widehat{ABC}$

Proprietà

1) $\angle(\ell, m) + \angle(m, \ell) = \pi$
2) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB \equiv 0 \mod \pi$

Oss. Molto spesso può succedere $\angle \cdot = \angle \cdot \overset{\text{mod } \pi}{=} \angle \cdot + \angle \cdot = \dots = \angle \cdot$

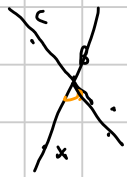
Consideriamo le uguaglianze mod π



3) $\angle AOP + \angle POB \equiv \angle AOB$ mod π

4) A, B, C allineati sse $\exists X$ t.c. $\angle XBC = \angle XBA$

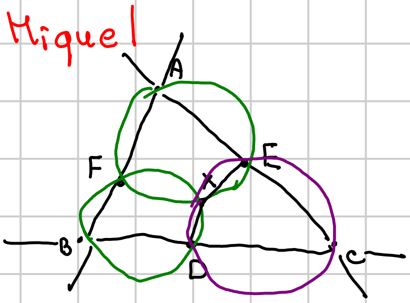
5) A, B, X, Y ciclico sse $\angle AXB = \angle AYB$



—— o ——

Teorema di Miquel

- Triangolare



$\odot AFE$, $\odot BFD$, $\odot CDE$ concorrono.

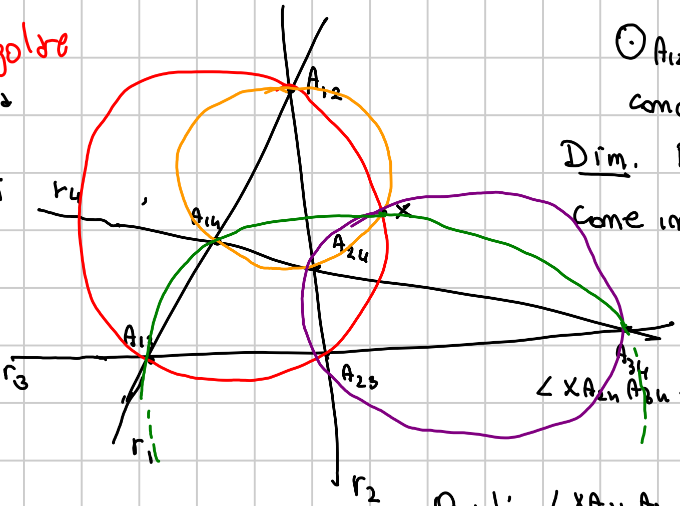
Dim. Sia X l'altra intersezione di $\odot AFE$ e $\odot BFD$. Voglio mostrare $XDCE$ ciclico. Infatti:

$$\angle XDC \overset{4}{=} \angle XDB \overset{5}{=} \angle XFB \overset{4}{=} \angle XFA \overset{5}{=} \angle XEA \overset{4}{=} \angle XEC$$

e quindi $\angle XDC = \angle XEC$ e per la 5, concludo.

Quadrangolare

Es. Capire cosa succede nei casi degeneri



$\odot A_{12}A_{23}A_{13}$, $\odot A_{13}A_{34}A_{14}$, $\odot A_{12}A_{24}A_{14}$, $\odot A_{23}A_{34}A_{24}$ concorrono.

Dim. Prendiamo $X = \odot A_{12}A_{23}A_{13} \cap \odot A_{12}A_{24}A_{14}$ come in figura. Mostriamo che $XA_{24}A_{23}A_{34}$ e $XA_{14}A_{13}A_{34}$ ciclici.

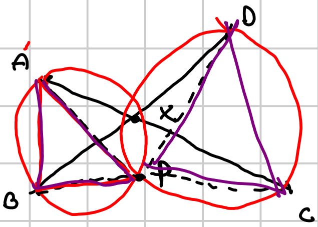
Facciamo solo la prima ciclicità. Ho che

$\angle XA_{24}A_{34} \underset{4}{=} \angle XA_{24}A_{14} \underset{5}{=} \angle XA_{12}A_{14} \underset{4}{=} \angle XA_{12}A_{13} \underset{3}{=} \angle XA_{23}A_{13} =$
$\underset{4}{=} \angle XA_{23}A_{34}$

Quindi $\angle XA_{24}A_{34} = \angle XA_{23}A_{34}$ e per 5 allora $XA_{24}A_{23}A_{34}$ ciclico.

X si dice punto di Miquel del quadrangolo (r_1, r_2, r_3, r_4)

Rotomotetie



A, B, C, D punti distinti sul piano

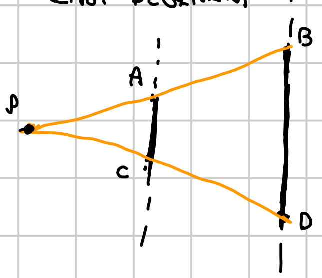
GM1/2019 $\to \exists!$ centro di rotomotetia $\boxed{\begin{matrix} A \to B \\ C \to D \end{matrix}}$ sse ABCD non è parall.

Sia $X = AC \cap BD$, $P = \odot AXB \cap \odot CXD$.

Oss. È anche il centro dell'! rotomotetia che manda $\boxed{\begin{matrix} A \to C \\ B \to D \end{matrix}}$

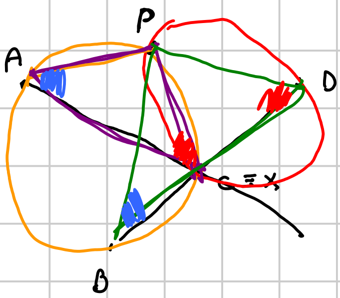
perché $P\hat{B}A \sim P\hat{D}C$

CASI DEGENERI



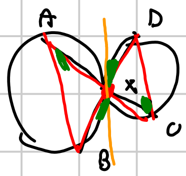
(i) Se $AC \parallel BD$? Esiste un'omotetia che manda $A \to B$, $C \to D$ di centro $AB \cap CD$.

(ii)



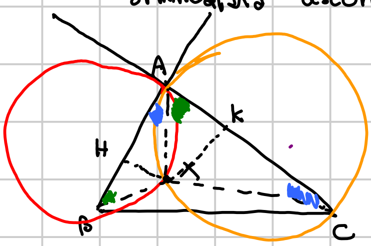
Se X coincide con un elemento di $\{A, B, C, D\}$ una delle due circonferenze diventa "tangente".

(iii)



$P \equiv X$, X sarà il centro dell'omotetia.

Es. Mostrare che il centro dell'! rotomotetia che manda $\begin{matrix} B \to A \\ A \to C \end{matrix}$ sta sulla simmediana uscente da A del $\triangle ABC$.



Sol. Prendo $\odot BAA$ la cfr tangente ad AC in A, passante per B

$\odot CAA$ analoga.

$X = \odot BAA \cap \odot CAA$.

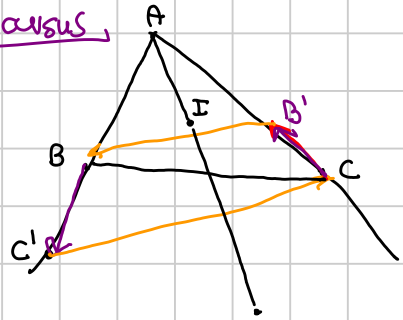
Osservo che $X\hat{B}A \sim X\hat{A}C$ poiché per tangente

$\angle XBA = \angle XAC$, $\angle XAB = \angle XCA$. e quindi X è il centro dell'! rotom. che manda $B \to A$, $A \to C$.

Sol. X ∈ simmediana poiché XH, XK perp. ai lati, $\frac{XH}{XK} \overset{sim}{=} \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ e noi sappiamo che la retta d.c. ∀ punto su essa X t.c. $\frac{X(X_{1c})}{X(X_{1b})} = \frac{c}{b}$ è la simmediana.

Sol. 2 Inversione centro A, raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$, + simmetria wrt. alla bisettrice uscente da A

Excursus

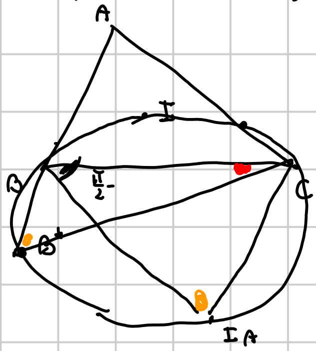


$B \to C$, $C \to B$, $\odot ABC \to BC$

$I \to I'$ t.c. $AI \cdot AI' = AB \cdot AC$ è $I' \equiv I_A$.

Incentro.

Perchè $BCII_A$ ciclico. Basta vedere che $B^* \overset{def}{=} \odot BCII_A \cap AB$, $AB^* = AC$.



$\bullet = \pi - (I_A\hat{B}C + I_A\hat{C}B) =$

$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

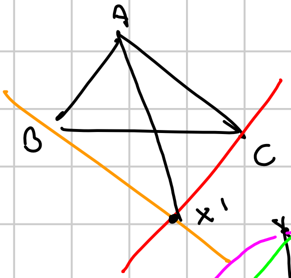
e quindi $A\hat{C}B^* = \pi - \bullet - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

e quindi AB^*C è isoscele.

$AI \cdot AI_A = AB \cdot AB^* = AB \cdot AC$

Nell'esercizio $\odot BAA$ va nella retta passante per C e $\parallel AB$

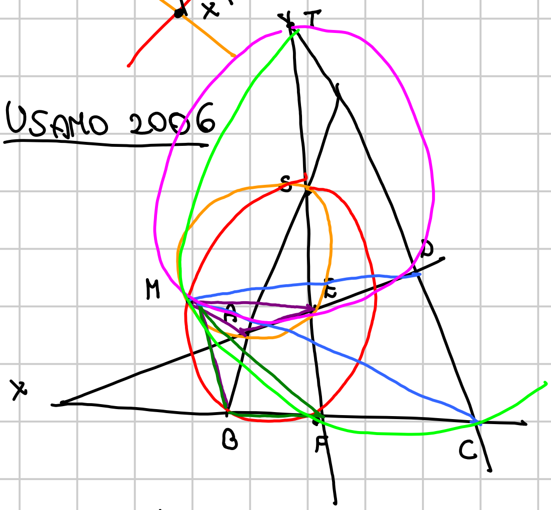
$\odot CAA$ " B $\parallel AC$



$X \to X'$, ~~per~~ AX' è mediana! Perchè per costruzione $ABX'C$ parallelogramma.

Quindi AX era simmediana.

USAMO 2006



E, F su AD, BC t.c. $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

Dim. che $\odot SAE$, $\odot SBF$, $\odot TCF$, $\odot TDE$ concorrono.

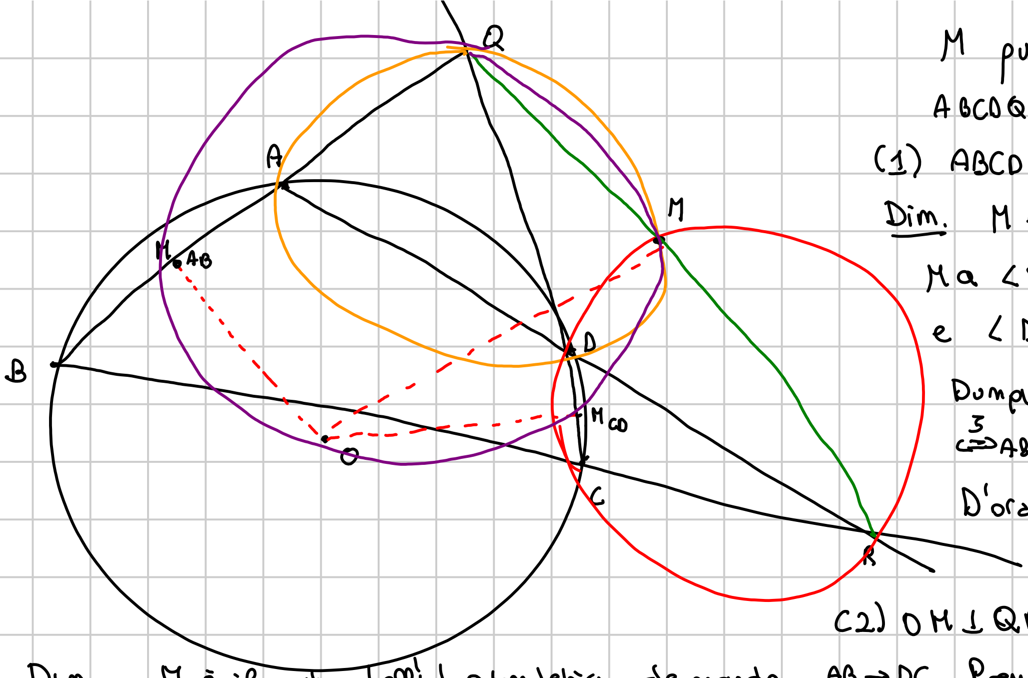
Sol. Sia $M = \odot SAE \cap \odot SBF$

Per quello visto prima $\exists$ rotomotetia di centro M che manda $AE \to BF$.

Voglio mostrare che $\exists$ rotomotetia di centro M che manda ED in FC. Innanzitutto $\angle MED = \angle MFC$ che viene dalla similitudine $M\hat{A}E \sim M\hat{B}F$. In più per ipotesi $\frac{ED}{FC} \underset{\text{hp}}{=} \frac{AE}{BF} = \frac{ME}{MF}$ e quindi $M\hat{E}D \sim M\hat{F}C$ per il I crit. di similitudine.

Quindi per quanto detto sulle rotomotetie M deve essere anche l'intersezione di $\odot EDT$ e $\odot FCT$. Quindi tutte e 4 le cfr. concorrono in M.

Conf. di Miquel nel caso ciclico.



M punto di Miquel del q.c. ABCDQR, quindi $M = \odot QAD \cap \odot DCR$.

(1) ABCD ciclico $\Leftrightarrow M \in QR$

<u>Dim.</u> $M \in QR \overset{4}{\Leftrightarrow} \angle DMQ = \angle DMR$.

Ma $\angle DMQ \overset{5}{=} \angle DAQ \overset{4}{=} \angle DAB$

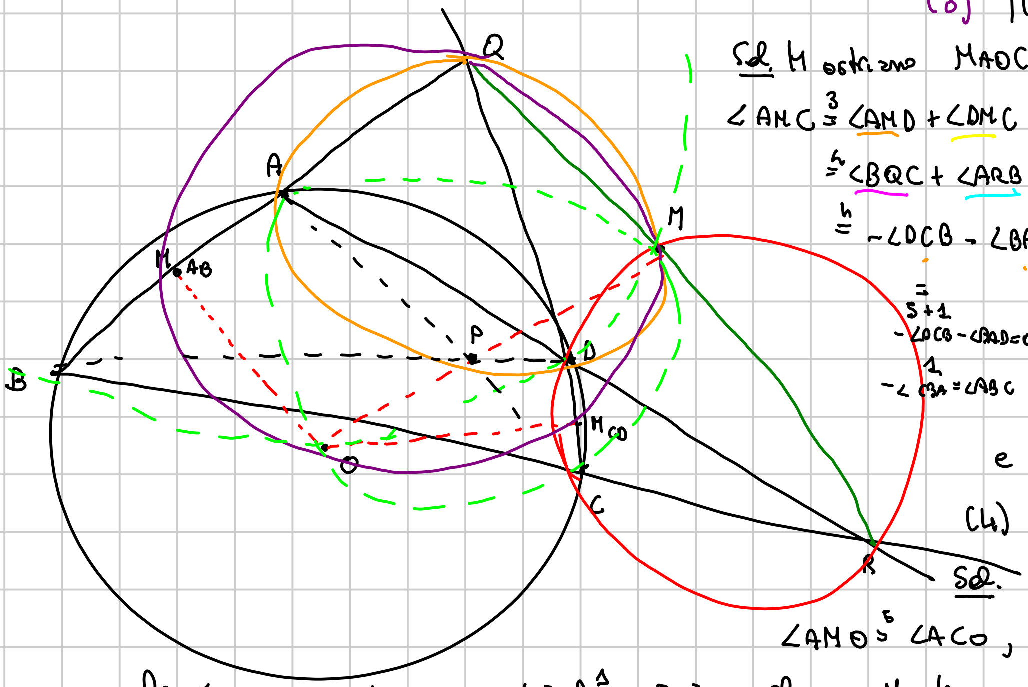
e $\angle DMR \overset{3}{=} \angle DCR \overset{4}{=} \angle DCB$.

Dunque $M \in QR \overset{4}{\Leftrightarrow} \angle DAB = \angle DCB \overset{3}{\Leftrightarrow}$ ABCD ciclico.

D'ora in poi assumiamo ABCD ciclico e O centro $\odot ABCD$.

(2) $OM \perp QR$

<u>Dim.</u> M è il centro dell'! rotomotetia che manda $AB \to DC$. Prendo M_{AB}, M_{CD} punti medi di AB e CD. Questa rotomotetia manda anche AM_{AB} in DM_{CD}. M quindi è anche il centro dell'! rotom. che manda AD in $M_{AB}M_{CD}$. Quindi per come si costruisce il centro di questa rotom., $M \in \odot QM_{AB}M_{CD}$. Però $O \in \odot QM_{AB}M_{CD}$ poichè $Q\hat{M}_{AB}O = Q\hat{M}_{CD}O = \pi/2$.
Dunque $QM_{AB}OM_{CD}M$ ciclico e $O\hat{M}Q = O\hat{M}_{CD}Q = \pi/2$.



(3) MAOC, BODM ciclici.

<u>Sol.</u> Mostriamo MAOC ciclico. BODM analogamente.

$\angle AMC \overset{3}{=} \angle AMD + \angle DMC \overset{5}{=} \angle AQD + \angle DRC \overset{4}{=}$

$\overset{4}{=} \angle BQC + \angle ARB \overset{2}{=} -\angle QCB - \angle CBQ - \angle RBA - \angle BAR$

$\overset{4}{=} -\angle DCB - \angle BAD - 2\angle CBA$

$\overset{5+1}{=} 2\angle ABC = \angle AOC$.

$-\angle DCB - \angle BAD = 0$

$\overset{1}{-\angle CBA = \angle ABC}$

angolo al centro angolo alla cfr.

e dunque $\angle AMC = \angle AOC$ e per 3 ok.

(4) MO biseca AMC, BMD

<u>Sol.</u> Usando (3) di prima

$\angle AMO \overset{5}{=} \angle ACO$, $\angle OMC \overset{5}{=} \angle OAC$.

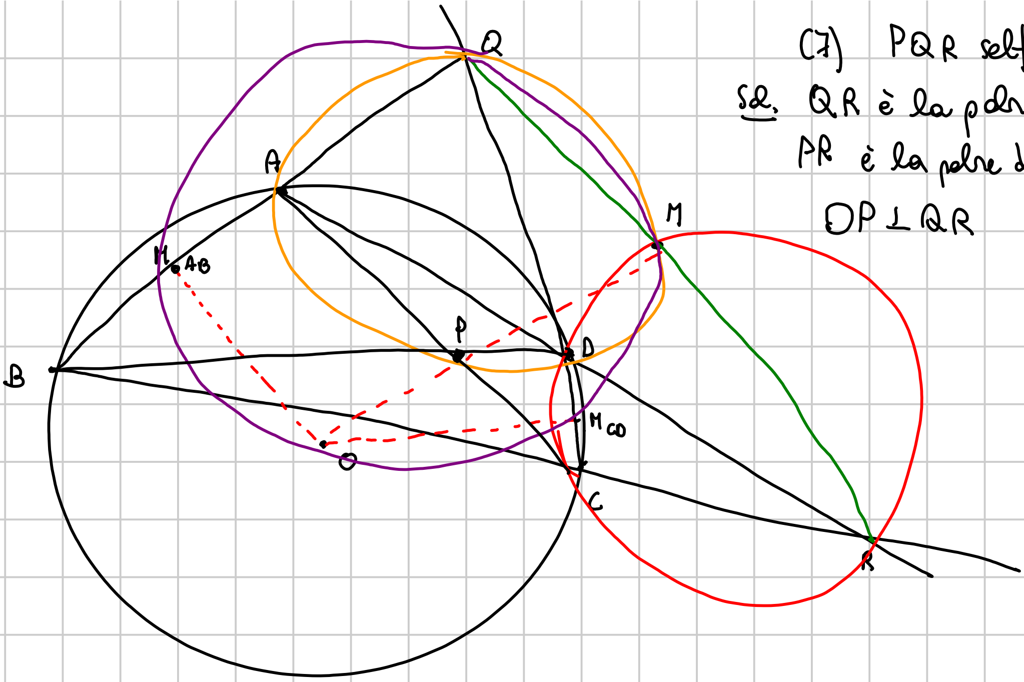
Però $\angle ACO = \angle OAC$ perchè $\overset{\triangle}{AOC}$ è isoscele. MO biseca AMC e analog. BMD.

(5) $P = AC \cap BD \Rightarrow O, M, P$ allineati.

<u>Sol.</u> MAOC, BODM, ABCD ciclici. I loro assi radicali sono OM, AC, BD e concorrono.

(6) P, M sono uno l'inverso dell'altro wrt. cfr. circoscritta ABCD.

In quest'inversione $AC \to \odot AOC$. $BD \to \odot BOD$, $AC \cap BD = P \to \odot AOC \cap \odot BOD \overset{(3)}{=} M$

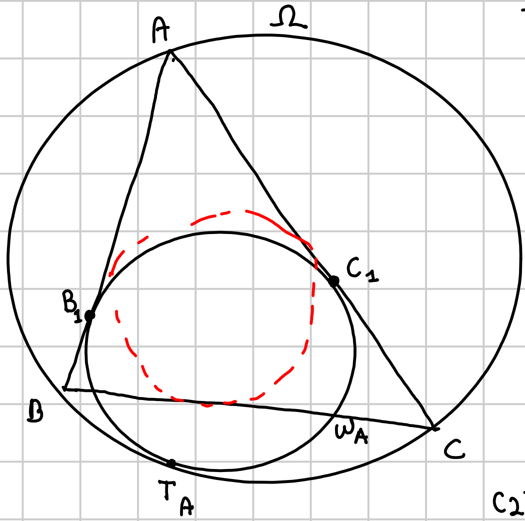


(7) PQR self-polar $\Rightarrow$ O ortocentro di PQR

Sol. QR è la polare di P, PQ è la polare di R, PR è la polare di Q (lemma della polare + dualità)
OP $\perp$ QR e ciclicamente (centro-polo $\perp$ polare).

Yufei Zhao

Circonferenze Mistilinee.



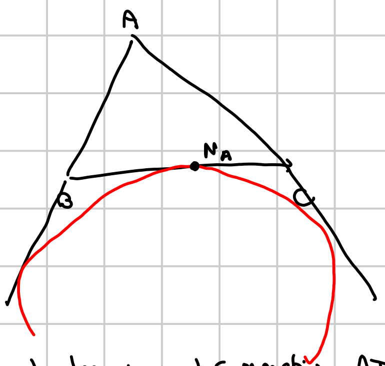
(1) AT_A è la ceviana isogonale di Nagel.

Sol. Inversione $\sqrt{AB\cdot AC}$ + simmetria wrt bisettrice di A

$B \to C$, $C \to B$, $\Omega \to BC$

$\omega_A \to$ exincircle wrt A

$T_A \to N_A$



Quindi dopo inv. + simmetria $AT_A \to$ ceviana di Nagel AN_A.

Dunque AT_A è la ceviana isog. di Nagel

(2) AT_A, BT_B, CT_C concorrono nel coniugato isogonale di Nagel

(3) Il coniugato isog. di Nagel è centro di sim. esterno fra ω (cerchio inscritto ad ABC) e Ω

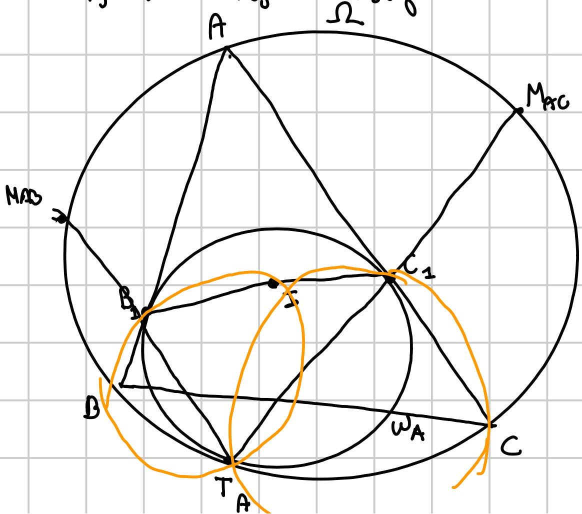
Dim. A centro di sim. esterno fra ω e ω_A

T_A centro di sim. esterno fra Ω e ω_A

Quindi per Monge centro di sim. esterno fra ω e Ω $\in AT_A$.

Questo vale ciclicamente per BT_B, CT_C quindi la loro intersezione, che era il con. isog. di Nagel, è il centro di sim. esterno fra ω e Ω.

(4) Il coniugato isogonale di Gergonne è il centro di sim. interno fra ω e Ω



(5) I è pto medio di B_1C_1.

(5a) TB_1 e TC_1 intersecano $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ nei loro punti medi.

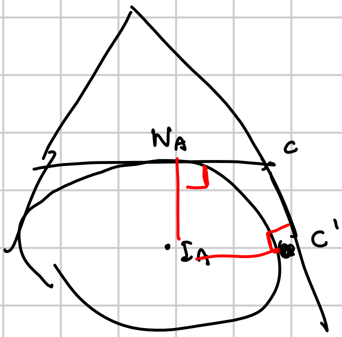
Dim. Innanzitutto $I \in B_1C_1$. Da Pascal su $M_{AB}T_AM_{AC}BAC$. Infatti:
$M_{AB}T_A \cap BA = B_1$
$T_AM_{AC} \cap AC = C_1$
$\underbrace{M_{AC}B \cap CM_{AB}}_{\text{bisettrici}} = I$

e dunque I, B_1, C_1 allineati.

In più AB_1C_1 isoscele, AI bisettrice, allora è anche mediana e quindi I è pto medio di B_1C_1.

(6) $B_1 I T_A B$, $C_1 I T_A C$ ciclici

Dim. Inversione + simmetria $\quad T_A \to N_A$, $I \to I_A$, $B \to C$, $B_1 \to C'$



~~BB~~ $B_1 I T_A B$ ciclico $\iff$ $C' I_A N_A C$ ciclico

Ma $C' I_A N_A C$ ciclico poichè $I_A \hat{N_A} C = I_A \hat{C'} C = \pi/2$.

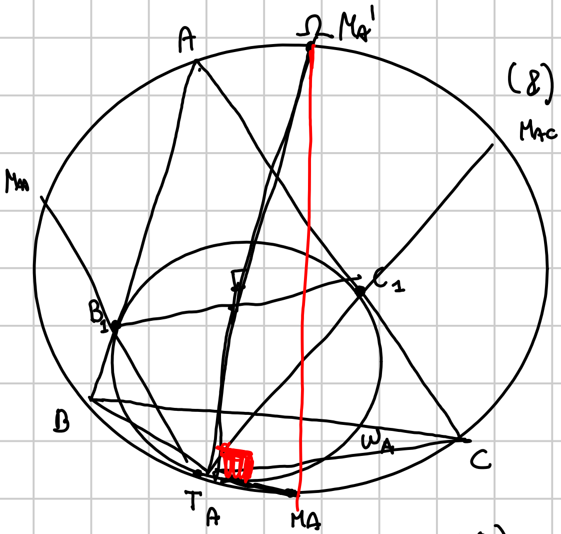
Analog. $C_1 I T_A C$ ciclico. $\quad$ Oss. $I_A \in \odot AB'C'$ sotto inv. + simm. diviene $I \in B_1C_1$. Quindi è una dim. alternativa di $I \in B_1C_1$.

(7) $T_A I$ biseca $B T_A C$.

Dim. $\angle B T_A I \overset{5}{=} \angle B B_1 I \overset{4}{=} \angle A B_1 I$ e $\angle C T_A I \overset{5}{=} \angle C C_1 I \overset{4}{=} \angle A C_1 I$

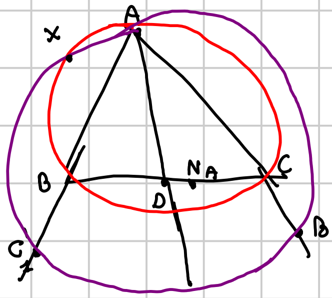
Ma $\angle A B_1 I = \angle A C_1 I$ perchè AB_1C_1 isoscele e quindi

$\angle B T_A I = \angle C T_A I$.



(8) M_A pto medio $\widehat{BC}$. $M_A T_A$, BC, $B_1 C_1$ concorrono.

M_{AC} Sol ① Sotto inversione $M_A \to D$ piede della bisettrice



Rimane da mostrare $X = \odot ABC \cap \odot A B_1' C_1' I_A$ oltre A X, D, N_A ciclici. ... Direttamente si può fare?

② Pascal su $B C M_{AB} T_A M_A A$

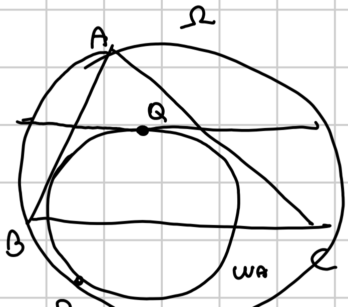
$BC \cap T_A M_A$
$C M_{AB} \cap M_A A = I$
$M_{AB} T_A \cap AB = B_1$

$I, B_1, BC \cap T_A M_A$ allineati ma $I \in B_1 C_1$ ✓

(9) Da (7) $T_A I$ biseca $B \hat{T_A} C \Rightarrow M_A \hat{T_A} I = \pi/2$ e

dunque $T_A I$ intercetta Ω nel ~~suo~~ diam. opposto di M_A.

[EGMO 2013 - 5]

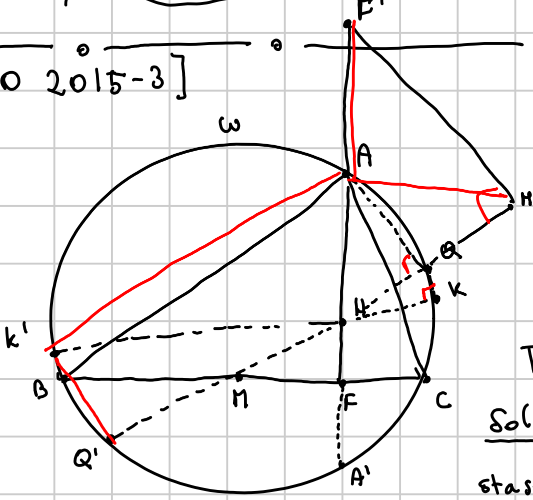


Mostra che $\angle BAP = \angle QAC$

Sol. Omotetia centro in A ~~...~~ $\omega_A \to$ exinscritta ci dice che AQ è la ceviana di Nagel

AP è l'isogonale della ceviana di Nagel per (1) e quindi fine.

[IMO 2015-3]



H ortocentro
$HF \perp BC$, $F \in BC$
M medio BC
$Q \in \omega$ t.c. $H \hat{Q} A = \pi/2$
$K \in \omega$ t.c. $H \hat{K} Q = \pi/2$

ABCKQ su ω in quest'ordine (come in figura)

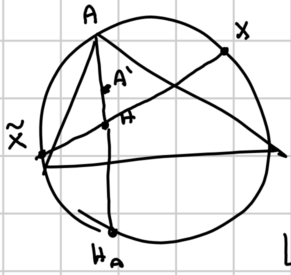
Th. $\odot KQH$, $\odot FKM$ sono tangenti.

Sol. $Q \in MH$. Fatto noto: il simmetrico di H wrt M sta sulla circoscritta ed è il diam. opposto di A.

Oss. Esiste una trasf. inversione ~~in H~~ + simmetria centrale in H che mantiene fissa la circoscritta

Inversione di centro H e raggio $\sqrt{|Pow_{\omega} H|}$ + simmetria centrale in H, $A \to H_A$

Con questa trasformazione $X \to XH \cap \omega = \tilde{X}$



Sotto questa trasformazione $Q \to Q' = HQ \cap \omega$ che è il simmetrico di H wrt M, $A \to A'$ simmetrico di H wrt F. $F \to F'$ simmetrico di H wrt A, $M \mapsto M'$ simmetrico di H wrt Q. $K \to K' = HK \cap \omega$.

$\odot KQH \to$ retta $K'Q'$ $\qquad \odot FKM \to F'K'M'$

La tesi diventa $K'Q'$ tange $\odot F'K'M'$

Oss. I $\; H\hat{K}Q = \pi/2 + A\hat{Q}Q' = \pi/2 \Rightarrow AQQ'K'$ rettangolo

Euristica: Se la tesi è vera AK' deve essere l'asse di $F'M'$!

Oss. II $\; AK'$ asse di $F'M'$.

Infatti $M'F' \parallel AQ$ e $AK' \perp AQ$ per oss. I. Dunque $AK' \perp F'M'$. In più nel triangolo rettangolo $F'M'H$, $M'A = AF'$ perché mediana rel. all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa. Dunque AK' asse di $F'M'$.

Fine: Dunque poiché $AK' \perp K'Q'$ per Oss. I allora $K'Q'$ è la tangente in K' alla cfr $K'F'M'$, che è la tesi

—— o ——

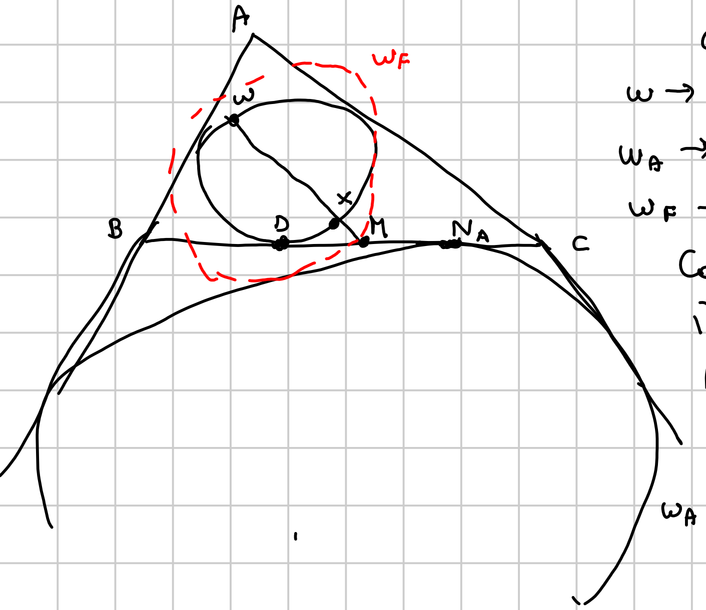
Th. Feuerbach La cfr. inscritta e le exinscritte tangono la cfr di Feuerbach

Dim. Inversione in M punto medio di BC con raggio $MD = MN_A$ (Ricordo $MD = MN_A$).

$\omega \to \omega$ (l'immagine di X è $MX \cap \omega$).

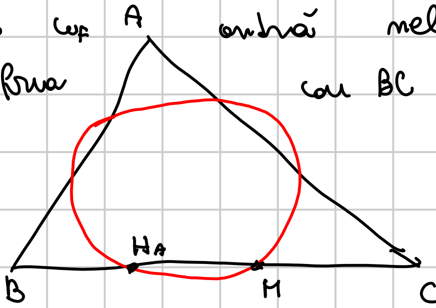
$\omega_A \to \omega_A$ (l'i. di X è $MX \cap \omega_A$)

$\omega_F \to$ retta!

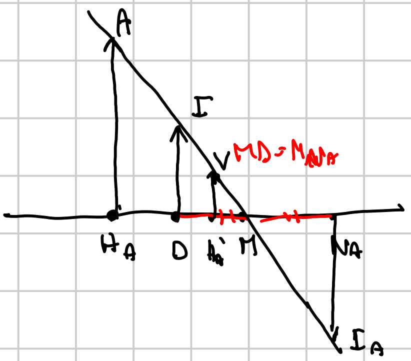


Come capire quale retta? Capisco 2 cose:
1) dove va H_A? 2) che angolo forma ω_F con BC

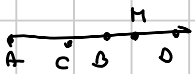
A quel punto ω_F andrà nella retta per H_A' che forma con BC l'angolo trovato in 2).



$H_A \to H_A'$ t.c. $MH_A \cdot MH_A' = MD^2$



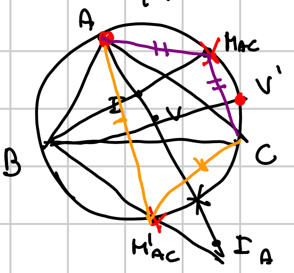
$MH_A \cdot MH_A' = MD^2 \iff (H_A, H_A', D, N_A) = -1 \iff$ (proiettando dalla bis.) $(A, V, I, I_A) = -1$



M medio CD
$MB \cdot MA = MC^2$
$\Updownarrow$
$(A\,B\,C\,D) = -1$

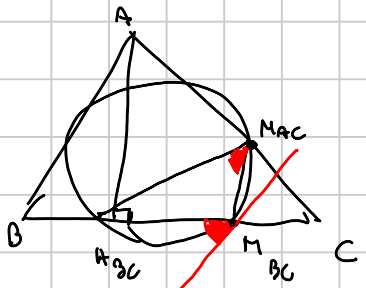
$\iff$ (proiett. su ω da B) $(A, V', M_{AC}, M'_{AC}) = -1$

$\iff \left|\frac{AM_{AC}}{M_{AC}V'} \cdot \frac{V'M'_{AC}}{M'_{AC}A}\right| = 1$



Se $V' \equiv C$ $\quad \frac{AM_{AC}}{M_{AC}V'} = 1$ e $\frac{V'M'_{AC}}{M'_{AC}A} = 1$

Quindi il punto $V' \in \omega$ t.c. $(A, V', M_{AC}, M'_{AC}) = -1$ è C. Dunque il punto V sulla bisettrice t.c. $(A, V, I, I_A) = -1$ è il piede della bisettrice. Dunque H_A' è il piede della bisettrice!

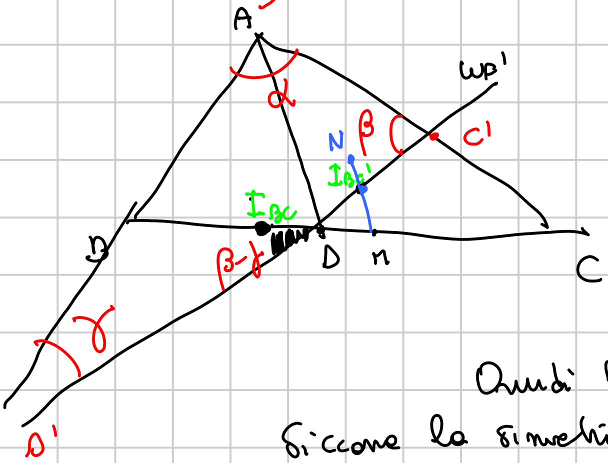


■ = angolo fra ω_F e BC $= \angle BM_{AC}C - \angle MM_{AC}C =$

$= \pi - 2\gamma - \alpha = \beta - \gamma$

$AH_{BC}C$ rettangolo

$M_{BC}M_{AC} \parallel AB$



$\omega_F \to$ retta per D piede della bisettrice che forma un angolo $\beta - \gamma$ con BC

Quanto vale $A\hat{B}'C = ?$

$A\hat{B}'C = \pi - B'\hat{B}C - B'\hat{D}B =$

$= \pi - (\pi - \beta) - (\beta - \gamma) = \gamma$

Quindi $A\hat{C}'B' = \beta$.

Quindi $B'C'$ è la simm. di BC rispetto alla bisettrice in A.

Siccome la simmetria rispetto alla bisettrice lascia ω e ω_A invariate, allora ω_F' tocca ω_A e ω. ✓ ■