A3 ADVANCED

Note Title 07/09/2022

1) ELMO SL A1 (2018)
2) ALGEBRA LEARNING
3) USA TSTST 2019 1
4) USAMO 2 2018
5) USA TST 2015 - 4
6) USA TSTST 2022 - 8
7) IMO SL A6 2012
8) ELMO 6 2019

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\sum_{cyc} f\left(x+\frac{1}{y}\right) = 1 \quad \text{per } xyz=1$$

$f \equiv \frac{1}{3}$ funziona. Sembra difficile trovare altre soluzioni.

$a, b, c > 0$ sostituiamo $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$

$$\sum_{cyc} f\left(x+\frac{1}{y}\right) = \sum_{cyc} f\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right) = \sum_{cyc} f\left(\frac{b+c}{a}\right).$$

$g: (0,1) \to (0,1)$

$g(s) = f\left(\frac{1}{s}-1\right). \iff f(t) = g\left(\frac{1}{t+1}\right)$

$f\left(\frac{b+c}{a}\right) = g\left(\frac{a}{a+b+c}\right)$

$g: (0,1) \to (0,1)$ t.c. se $x+y+z=1$ allora

$g(x)+g(y)+g(z) = 1.$

$g(x) = kx + \frac{1-k}{3}$ con $k \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) : 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) + g(z) = 1$

$g(x)+g(y)=2g\left(\frac{x+y}{2}\right)$ con $x+y\leq 1$

- Equazione funzionale di Jensen (analoga dell'equazione di Cauchy)
- g è limitata

(7) $\forall n\in\mathbb{N}$ esiste $K\in\mathbb{N}$ t.c. $f^{2K}(n)=n+K$. $K_1, K_2, \dots$. Dimostrare che $K_1, K_2, K_3, \dots$ è illimitata.

1. f può avere cicli? No, perché $\forall n\in\mathbb{N}$ esiste un t t.c. $f^t(n)>n$. Quindi se c'è un ciclo prendo il massimo. Assurdo.
2. Se $f^{2K}(n)=n+K$, "mediamente" $f(n)-n\approx\frac{1}{2}$. Questo è troppo poco per garantire che f^K sia iniettiva in K.
3. Sia M t.c. $K_i\leq M\ \forall i$.

Quante orbite distinte possiamo avere?

Sia $S_t=\left\{K: f^K(n)-\frac{K}{2}=t\right\}$.

$\forall K\in S_t$ esiste un $l\in[1,M]$ t.c.

$$f^{K+2l}(n)-\frac{K+2l}{2}=f^K(n)-\frac{K}{2}.$$

$\Rightarrow$ La densità di S_t in $\mathbb{N}$ è almeno $\frac{1}{2M}$.

$t_1, t_2, \dots, t_{2M}$ t.c. $S_1, S_2, \dots, S_{t_{2M}}$ partizionino $\mathbb{N}$. $f^K(1)-\frac{K}{2}$ limitata.

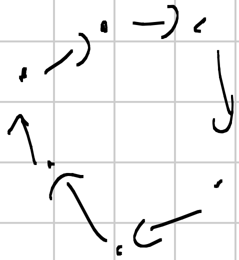
$f^1(1), f^2(1), \dots, f^A(1)$ valori distinti $\leq\frac{A}{2}+$ costante, che non va bene per A grande.

(1) $f(g(x))=g(f(x))$

$g=f^{-1}(x)$ $\quad g=f(f(x))$

$y = f^d(x) \quad d \in N$

$\exists\, n$ t.c. $f^n(x) = x \quad \forall x \in R$



$d \qquad d \mid n$

Infiniti cicli con la stessa cardinalità.

$a_1 \to b_2 \qquad a_n \to b_{n+1}$

$b_n \to a_{n+1}$

---

(2) $X : \{ f|_{R_+ \to R_+} \;\; f(3x) \geq \underline{f(f(2x))} + x \}$

$f(x) \geq kx \quad \forall x \in R^+$

$k \geq \frac{1}{3} \qquad f(3x) \geq x \quad \forall x \in R_+$

$\Rightarrow f(x) \geq \frac{x}{3} \quad \forall x \in R_+$

$f(3x) \geq 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 x + 1 \cdot x$

$f(x) \geq \left(\frac{2}{9} + 1\right)\frac{x}{3}$

$$\frac{11}{27} > \frac{1}{3} \ !$$

$$x_0 = \frac{1}{3} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n^2+1}{3}$$

$$\left[\quad L = \frac{2L^2+1}{3} \to L = \frac{1}{2}, 1 \right]$$

$\boxed{\text{STEP 1}}$ Vogliamo $\lim_{n\to\infty} x_n$

$$x_{n+1} \geq x_n$$

$$\frac{2x_n^2+1}{3} \geq x_n \to \quad x_n \leq 1/2$$

CI MANCA $\quad x_n \leq 1/2 \ \forall n$

$$\frac{2x_n^2+1}{3} \leq 1/2 \to \quad x_n^2 \leq 1/4$$
$$\Rightarrow x_n \leq 1/2$$

PASSO BASE OK. $\Rightarrow$ vero per tutti gli n.

Successione crescente $\Rightarrow \exists$ limite
limitata $\Rightarrow \exists$ limite finito.

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2+1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2+1}{3}$$

$$L = \frac{2L^2+1}{3} \Rightarrow L = 1/2$$

$\forall x \ f(x) \geq \frac{1}{2}x$. No di più perché
$f(x) = \frac{x}{2}$ soddisfa.

Ricordarsi che il limite non è detto esista.

(3) $\Delta: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\begin{cases} a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \cdot c \\ \text{(cambio notazione)} \\ a \times a \geq 1 \quad \text{se} \quad a \geq 1 \end{cases} \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

Soluzioni $\quad a \times b = ab \quad$ e $\quad a \times b = \frac{a}{b}$

$a \times p = a \times q \Rightarrow p = q$

$(a \times a) p = a \times (a \times p) = a \times (a \times q) = (a \times a) q$

$\Rightarrow p = q$

2) $p \times a = q \times a \Rightarrow p = q$

$(a \times p) \cdot a = a \times (p \times a) = a \times (q \times a) = (a \times q) \cdot a$

$\Rightarrow a \times p = a \times q \Rightarrow p = q$

Circa iniettività

$a \times (a \times 1) = (a \times a) \cdot 1 = a \times a$

$\Rightarrow a \times 1 = a$

$1 \times (1 \times a) = (1 \times 1) \cdot a = a$ (ricorda il classico $f(f(x)) = x$)

$a \times b = a \times (\underline{1 \times (1 \times b)})$

$$(a \times 1) \cdot (1 \times b) = a \cdot (1 \times b)$$

$$f(\tilde{x}) = 1 \times \tilde{x}$$

$$a \times b = a f(b)$$

$$a f(b f(c)) = a c f(b)$$

$$\Rightarrow f(b f(c)) = c f(b) \quad \forall b, c \in \mathbb{R}^+$$

Sappiamo da sopra che $f(f(x)) = x$

$$\Rightarrow f(bc) = f(b) \cdot f(c) \quad \forall b, c \in \mathbb{R}^+$$

$$a \times a \geq 1$$

$$f(a) \geq \frac{1}{a} \quad \forall a \geq 1 \in \mathbb{R}^+$$

$g(x) = \ln f(e^x) \Rightarrow$ per ricondursi alla Cauchy
e ok ho ipotesi extra.

$$f(x) = x^c \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}, \quad a \cdot b \quad \text{fine.}$$

(6) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = f(m) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$f(m) = km \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

$$f(m)n \leq f(mn) < f(m)(n+1)$$

$$f(n) = -n f(1)$$

$$f(n) = \lfloor \underset{\in \mathbb{R}}{r} n \rfloor$$

$$g(n) = \frac{f(n)}{n}$$

$$g(m) \leq g(mn) < g(m) + \frac{1}{m}$$

g CRESCE

$\lim_{t \to \infty} g(t) = r$

$\left[g(n), g(n) + \frac{1}{n} \right]$ se è intersezione di questo intervallo al variare di n è non nulla

$\exists r \in \mathbb{R}$ t.c.

$g(n) \leq r \leq g(n) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(n) = g(n) n$

$f(n) \leq nr \qquad f(n) \geq rn - 1$

se $r \notin \mathbb{Q}$ allora $nr \notin \mathbb{Q}$

dunque dovendo $f(n)$ appartenere a $\mathbb{Z}$

Sappiamo che $f(n) = \lfloor rn \rfloor$

o $\lceil rn \rceil - 1$ $\qquad$ 0, 9 $\qquad$ 1

basato al valore il check

Se $r \in \mathbb{Q}$ c'è un problema

se $rn \in \mathbb{N}$ allora ci sono 2 opzioni per $f(n)$

Vogliamo dire che non $\underbrace{\exists\, a, b \in \mathbb{N}}_{\text{possono esistere}}$

per cui $f(a) = ra$ e $f(b) = rb - 1$

se $f(n) = nr$ per un certo n allora

si ha $r = \frac{f(n)}{n} \leq \frac{f(nk)}{nk} \leq r$ $\longrightarrow$ dato da $g(x) \leq r \ \forall x$

dunque sono uguaglianze e $f(mk) = mkr$

dunque $\underline{f(m) = mr} \Rightarrow \underline{f(mk) = mkr} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Vale $f(m) = mr - 1 \Rightarrow f(mk) = mkr - 1$.

Se per assurdo $f(mk) = mkr$

allora $\left\lfloor \frac{f(mk)}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mkr}{k} \right\rfloor = \lfloor mr \rfloor \neq f(m)$

<u>ASSURDO</u> ⚡

Quindi ora impacchettiamo tutto

abbiamo che anche per $r \in \mathbb{Q}$ le sol sono $f(n) = rn$ e $f(n) = rn-1$

Problema f

Soluzione Casereccia

$$F(x) = \lfloor x \rfloor$$

$$E_1 = 0 \qquad E_2 = 0$$

$$E_1^2 + E_2^2 = 0$$

E_1 :

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

E_2 :

$$f\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = 0$$

⑤ $\chi(x+y) - \chi(x) - \chi(y) \in \mathbb{Z}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$

$\exists c$ t.c. $\chi(x) - cx \in \mathbb{Z}$

1) $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}(1 + 2! \ldots + q!)$

2) P, $\mathbb{Z}$

$x = p + z$ $\Rightarrow$ $p - p' \in \mathbb{Z}$

$x = p' + z'$ $\quad z - z' \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow f(x) = p$

FINE