C1A - Metodi algebrici - Massimiliano

n classi, ognuna con un num. dispari di studenti. Vogliamo prendere uno studente per classe. Dimostrare che il # modi (# femmine è pari) > # modi (# femmine è dispari)

$\iff$ Ci sono un numero pari di classi con più femmine che maschi!

$\underline{n=2}$. x_1, x_2 maschi y_1, y_2 femmine

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \overset{?}{>} x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0$$

In generale

(2) $\iff (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \dots (x_n - y_n) > 0$

Sviluppando questo prodotto abbiamo tutti i prodotti possibili con segno $-$ $\iff$ il numero di femmine è dispari. $\blacksquare$

$S = \{1, 2, \dots, n\}$. $A_1, A_2, \dots, A_m \in S$ distinti t.c. $\forall i \neq j$, $|A_i \cap A_j| = \lambda$ $(1 \leq \lambda \leq n-1)$.

Tesi: $m \leq n$

A_i rappresentiamo con $\vec{v_i} \in \mathbb{R}^n$ che al posto j-esimo ha 1 se $j \in A_i$, 0 altrimenti.

$|A_i \cap A_j| = \vec{v_i} \cdot \vec{v_j}$. Per assurdo $m = n+1$.

$\exists\, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c.

$$\sum a_i \vec{v_i} = 0$$

$$(a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_{n+1} \vec{v_{n+1}}) \cdot (a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_{n+1} \vec{v_{n+1}}) =$$

$$= \sum a_i^2 |\vec{v_i}|^2 + 2 \sum a_i a_j \underbrace{\vec{v_i} \cdot \vec{v_j}}_{\lambda} =$$

$$= \underbrace{\sum a_i^2 |\vec{v_i}|^2}_{} + \lambda \left[(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2) \right] = 0$$

$$\sum a_i^2 |\vec{v}_i|^2 > \lambda(a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2).$$

$$0 > \cancel{\lambda(a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2) + \lambda\left[(a_1 + \dots + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2)\right]}$$

≥ 0. Assurdo.

Fonti

1. Noto
2. Noto
3. ?
4. Russia 2001
5. Own/Folklore
6. San Pietroburgo
7. ArtofProblemSolving
8. USA TSTST 2018/2
9. Disuguaglianza non uniforme di Fisher
10. USAMO 2008/6
11. Teo. di Graham - Pollak
12. ELMO 2020/5
13. USAMO 2021/3

1-2. Teoremi di base di algebra lineare.

4. $m = n+1$.

Lo studente i-esimo è rappresentato da un vettore $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ che ha il termine j-esimo pari a $1 \iff$ ha risolto il j-esimo, 0 altrimenti.

Sia $\vec{K} \in \mathbb{R}^n$ non negativi il marking scheme.

Il punteggio $P_i = \vec{K} \cdot \vec{v}_i$.

$m > n \Rightarrow a_i \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c.

$$\sum a_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \sum a_i P_i = 0.$$

$$\sum_{i \in S} |a_i| P_i = \sum_{i \in T} |a_i| P_i.$$

Se $\sum_{i \in S} |a_i| \geq \sum_{i \in T} |a_i|$ (wlog) allora è impossibile che tutti gli elementi di S battano tutti gli elementi di T.

Se tutti i punteggi di sx sono $\geq P$, totale è $\geq P \sum |a_i|$. E a destra abbiamo totale $\leq P \sum |a_i|$.

Assurdo.

5. n monete, le ribalto a gruppi di m.
Prendo $(1,2,\dots,m)$, $(m+1,\dots,2m)$, etc. fino a fare un numero intero di giri.
$\Rightarrow$ Dividere i gruppi di monete in $\gcd(m,n)$ categorie.
Se il numero di giri è pari (ossia $v_2(m) > v_2(n)$) allora l'ultimo gruppo di tutti è superfluo.
$\Rightarrow$ togliamo $\gcd(m,n)$ gruppi. $\Rightarrow \le 2^{n-\gcd(m,n)}$

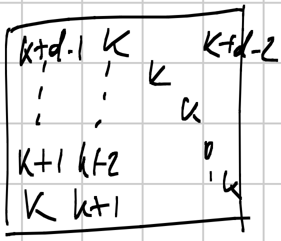
Se il # di giri è dispari togliamo l'ultimo gruppo di tutti tranne uno. $\Rightarrow \le 2^{n-\gcd(m,n)+1}$
$(v_2(m) \le v_2(n))$.

Idea: a parte la mossa $(1,2,\dots,m)$, guardare le mosse $(i, m+i)$. (Nata da $(i,\dots,m+i-1)$ + $(i+1,\dots,m+i)$).

12. Lavoriamo in coordinate cartesiane in $\mathbb{R}^S$.
Esempio: $S \le m+n-\gcd(m,n)$.
Dividiamo il rettangolo in quadrati $\gcd(m,n) \times \gcd(m,n)$.

4×6

4	3	6	5	8	7
3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5
1	2	3	4	5	6



Nella casella con il numero c mettiamo il monomio x^c.
Somma di riga $x^a(1+x+\dots+x^{n-1})$
" " colonna $x^b(1+x+\dots+x^{m-1})$.
Somma di tutto è multipla di $1+x+\dots+x^{m-1}$ e di $1+x+\dots+x^{n-1}$

$$S \ge \deg(\mathrm{lcm}(1+x+\dots+x^{m-1}, 1+x+\dots+x^{n-1}))+1 \,?$$

$$\mathrm{lcm}^{*}(1+\dots+x^{m-1}, 1+\dots+x^{n-1}) = \frac{\mathrm{lcm}(x^m-1, x^n-1)}{x-1} =$$

$$= \frac{(x^m-1)(x^n-1)}{(x-1)\gcd(x^m-1,x^n-1)} = \frac{(x^m-1)(x^n-1)}{(x-1)(x^{\gcd(m,n)}-1)} \Rightarrow \deg = m+n-\gcd-1$$

$S = m+n-\gcd(m,n)$

Lavoriamo in $\mathbb{R}^{m+n-\gcd(m,n)}$

Altri sono n numeri congrui a $i \bmod m$ $\forall i$
m congrui a $j \bmod n$ $\forall j$

---

(7) Sia G un grafo, k la dimensione della cricca massimale.

Ogni vertice ha peso $x_i \geq 0$ $\sum x_i = 1$.
Ogni arco ij ha peso $x_i x_j$.

$$\sum_{e \in E} w(e) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}.$$

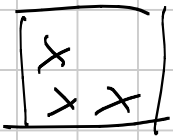
$x_a \to x_a + t$
$x_b \to x_b - t$

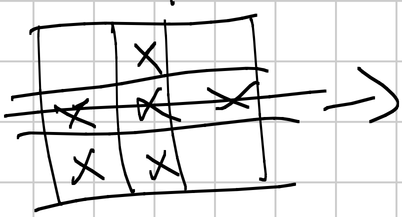
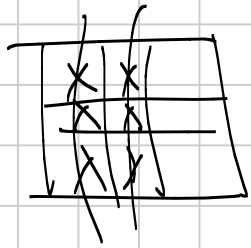
$$\boxed{\underbrace{\sum x_i x_j}_{\text{costante}} + t \cdot \sum_{v \in N(a)} x_v - t \sum_{w \in N(b)} x_w} \to -t^2 \text{ se } a \text{ e } b \text{ sono adiacenti}$$

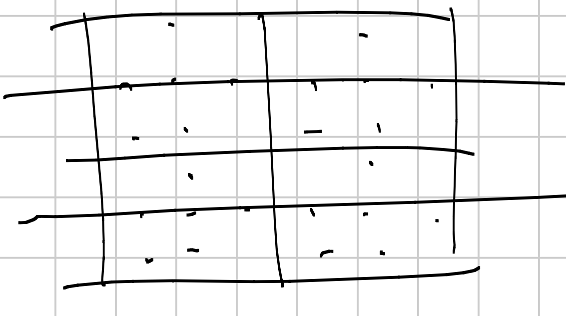
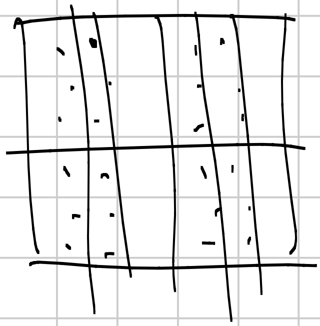
$-x_b \leq t \leq x_a$. $x_a, x_b > 0$. Wlog prenderemo $t = x_a$ o $t = -x_b$ e quindi uno dei pesi diventa 0.
Togliamo il vertice dal grafo di partenza.
Quanto a lungo lo possiamo fare?
$\Rightarrow$ In una delle configurazioni ottimali, ci sono $\leq k$ vertici con pesi non nulli.

$$S \leq \sum x_i x_j \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \text{ per AM-QM.}$$

---

13. $n = 2$  $\to$ fine.

$n = 3$  $\to$  $\to$ si può fare.

$n = 6$   Se $3 \mid n$, $\to$ possibile.

Colorare a scacchiera: $(-1)^{a+b}$ in ogni casella

Ogni tre righe ω^a con ω radice terza dell'unità

ω^{a+b}

Nella casella (a,b) mettiamo $x^a y^b$.

Mettere un trimino: aggiungere $x^a y^b (x+y+1)$.

Togliere una riga: togliere $x^a(1+y+\dots+y^{n-1})$

Togliere una colonna: togliere $y^b(1+x+\dots+x^{n-1})$.

$p(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$, $q, r \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}[y]$.

$$(1+x+y)\,p(x,y) = q(x)(1+y+\dots+y^{n-1}) + r(y)(1+x+\dots+x^{n-1}).$$

Sia $y=-x-1$.

$$q(x)\cdot \underbrace{\frac{(-1-x)^n-1}{-1-x-1}} + r(-1-x)\cdot \underbrace{\frac{x^n-1}{x-1}} = 0.$$

Può esistere $\lambda \in \mathbb{C}$ radice di entrambi?

$\lambda^n = (-1-\lambda)^n = 1$.

$|\lambda| = |\lambda+1| = 1$.

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. λ è radice terza dell'unità.

Se $3 \nmid n$, non posso avere $\lambda^n = 1$.

$$q(x) = \frac{x^n-1}{x-1}\cdot K, \quad r(-1-x) = -K\cdot\frac{(-1-x)^n-1}{-1-x-1}$$

$$r(x) = -K\cdot\frac{x^n-1}{x-1}.$$ Assurdo.

---

11. $K \le n-1$.

$\{1\} \sqcup \{2,\dots,n\}$

$\{2\} \sqcup \{3,\dots,n\}$

$\vdots$

$\{n-1\} \sqcup \{n\}$.

Per assurdo $k = n-2$.
Diamo a ogni nodo un peso x_i e all'arco ij peso $x_i x_j$.
Somma dei pesi degli archi di $S \cup T$ vale
$$\sum_{i \in S} x_i \cdot \sum_{j \in T} x_j.$$
$$\sum_{\ell=1}^{n-2} \left(\sum_{i \in S_\ell} x_i \cdot \sum_{j \in T_\ell} x_j \right) = \sum_{i<j} x_i x_j = \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2)}{2}$$
Imponiamo $\forall \ell \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$
$$\sum_{i \in S_\ell} x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{LHS} = 0.$$
Quindi $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$
Possiamo imporre $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$
$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, assurdo.