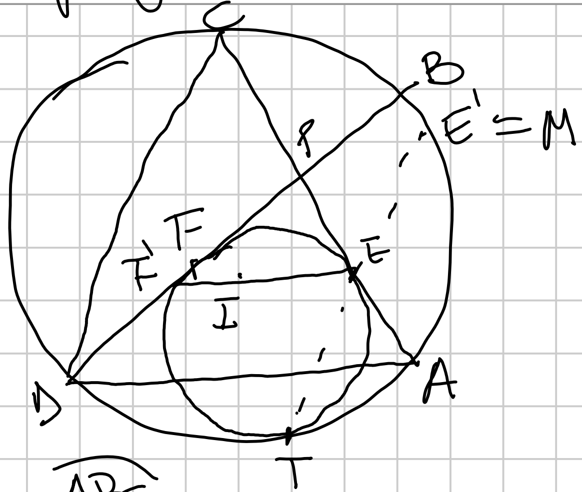
G1A - Configurazioni mistilinee

Titolo nota 04/09/2022

Massimiliano

(1)



a) TE biseca $\widehat{ABC}$

I è il centro dell'omotetia che manda $\omega_1 \to \omega$. Essa manda $E \to E' \in \omega$ t.c. la tangente a ω per E' sia parallela a AC. E' è il punto medio di $\widehat{AC}$.

b) $\widehat{TF'I} = \widehat{TEA} = \widehat{TCE'} = \widehat{TDE'} = \widehat{TDI} \Rightarrow$ ciclicità.

c) DF' tange ω_1.

$\widehat{DF'T} = \widehat{DIT}$. $\widehat{F'EJ} = \widehat{IET} =$

$M = E'$, circocentro di $\triangle AIC$. $MA = MI = MC$. $MA^2 = ME \cdot MT$.

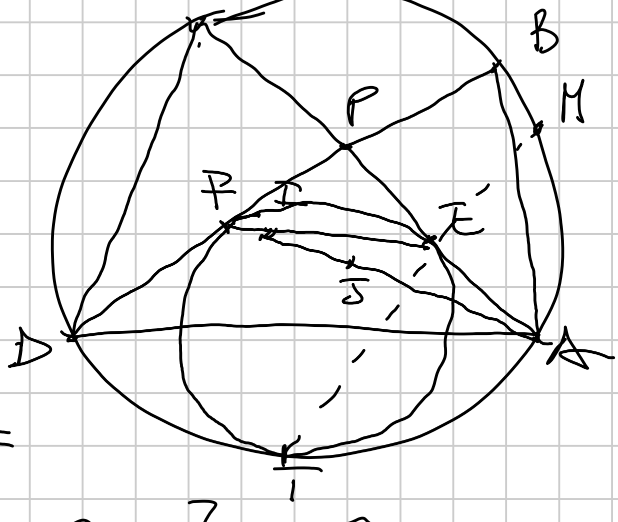
$MI^2 = ME \cdot MT$. (MI tange (IET))

$\widehat{IET} = 180° - \widehat{IEM} = 180° - \widehat{MIT} = \widehat{DIT} = \widehat{DF'T} \Rightarrow$

DF' tange ω_1.

d) DF e DF' tangono $\omega_1 \Rightarrow F = F' \Rightarrow \overline{E, F, I}$.

e) J l'incentro di $\triangle APD$



$TDFJ$ ciclico

$J \in (TDFI)$.

$\widehat{JIT} = \widehat{JDT}$

$\iff \widehat{AIT} = \widehat{JDT}$.

$\widehat{AIT} = 180° - \widehat{ITE} - \widehat{ETA} - \widehat{IAT} =$

$= 180° - \widehat{MIE} - \widehat{ETA} - \widehat{IAT} =$?

$= 180° - \widehat{DIF} - \widehat{MTA} - \widehat{IAD} - \widehat{DAT} = \widehat{JDT}$

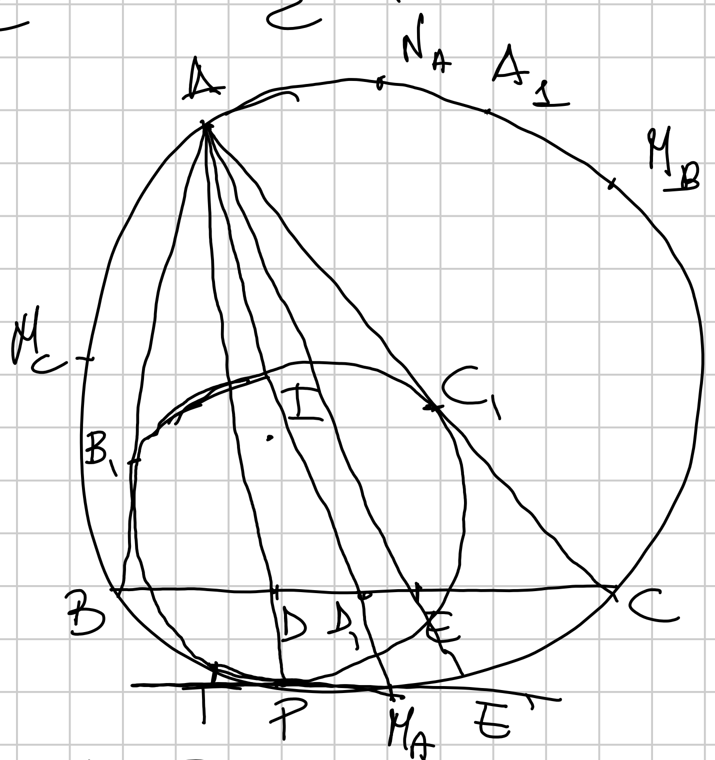
$\widehat{DAI} + \widehat{JDI} = \widehat{JDA} + \widehat{ADI} + \widehat{DAI} = \widehat{JDA} + \widehat{ACD}$.

$\Rightarrow$ si finisce

f) $\widehat{DTJ} = 180° - \widehat{DIA} = 180° - 90° + \frac{\widehat{ACD}}{2} = 90° - \frac{\widehat{ACD}}{2} =$

$= \frac{180° - \widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{ATD}}{2}$, come volevamo.

(2)



a) Omotetia in T, manda $\omega_1 \to \omega$, $B_1 \to M_C$ e $C_1 \to M_B$.

b) $M_C T M_B B A C$ (Pascal)

$M_C T \cap BA = B_1$ $\Rightarrow$ $I \in B_1C_1$

$TM_B \cap AC = C_1$ e siccome $AB_1 = AC_1$,

$M_B B \cap CM_C = I$ I è il punto medio.

c) Nell'omotetia di prima, $I \to I'$ punto medio di $M_B M_C$.

Ora $M_B N_A M_C I$ è un parallelogramma, quindi I' è punto medio di IN_A

$\Rightarrow T, I, I', N_A$ allineati.

d) Inversione in A di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ + simmetria nella bisettrice di $\widehat{BAC}$.

ω_1 tangente a AB, AC e ω $\Rightarrow$
ω_1' tangente a AC, AB e BC, che è la A-exinscritta.
$\Rightarrow T = \omega_1 \cap \omega \rightsquigarrow \omega_1' \cap BC = E$.
$T \Leftrightarrow E \rightsquigarrow \widehat{BAT} = \widehat{CAE}$.

e) Sia $E' = AE \cap \omega$. A_1 t.c. $ABCA_1$ trap. isoscele. Per (d) T ed E' simmetrici rispetto all'asse di BC. $A, E, E' \Rightarrow A_1, D, T$ (simmetria)
$\widehat{CTD} = \widehat{CTA_1} = \widehat{ATB}$.

f) $\widehat{BB_1I} = 180^\circ - \widehat{AB_1C_1} = 180^\circ - 90^\circ + \alpha/2 = 90^\circ + \alpha/2$
$\widehat{BTI} = \widehat{BTN_A} = \widehat{BCN_A} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \alpha/2$
$\Rightarrow$ ciclicità.

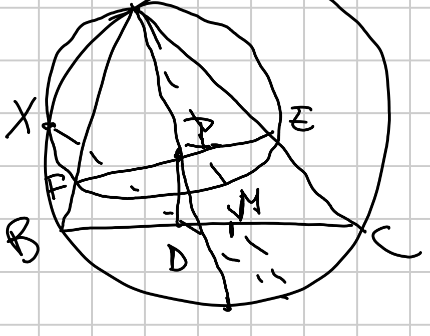
g) $\widehat{DTM_A} = \widehat{A_1TM_A} = \widehat{A_1BM_A} = \gamma + \alpha/2$
$\widehat{DD_1M_A} = 180^\circ - \widehat{AD_1D} = \alpha/2 + \beta \Rightarrow$ ciclicità.

h) Assi radicali su (ABC), (BIC), (IM_A) (passa per T):
BC, TM_A, B_1C_1 concorrenti.
(BIC) ha centro in $M_A \Rightarrow B_1C_1 \perp IM_A$.
$\Rightarrow B_1C_1$ è tangente a (BIC).
Ma tange anche (IM_A).

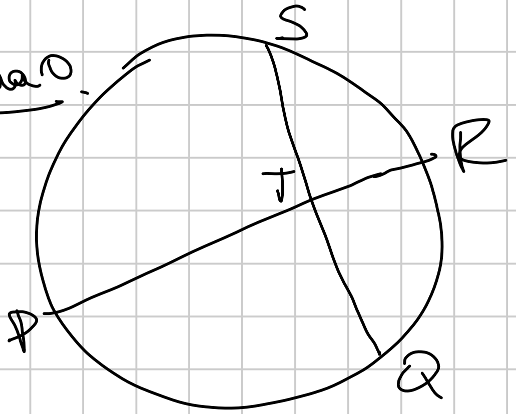
i) Per l'omotetia che manda l'inscritta in ω_1, AD passa per il punto "più in basso" di ω_1.
La stessa cosa per TM_A per l'omotetia che manda $\omega_1 \Rightarrow \omega$.

---

(1)



Lemma 0.



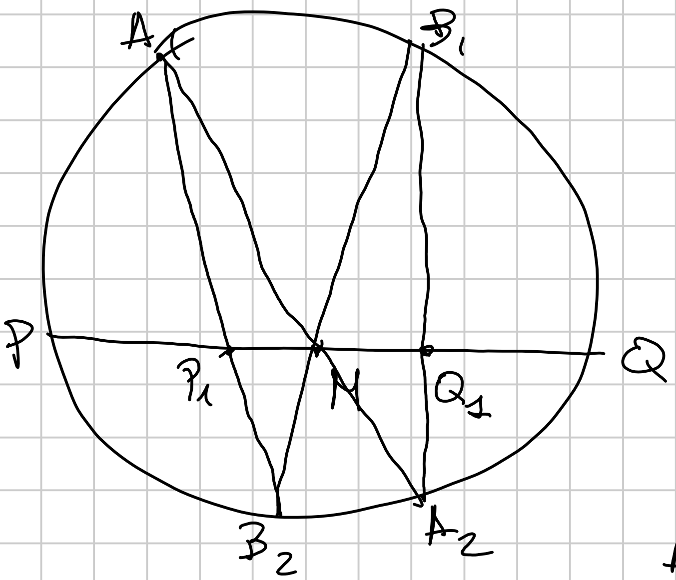
$$\frac{PT}{TR} = \frac{PS}{SR}\cdot\frac{PQ}{QR}$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{\sin\widehat{PST}}{\sin\widehat{RST}}.$$

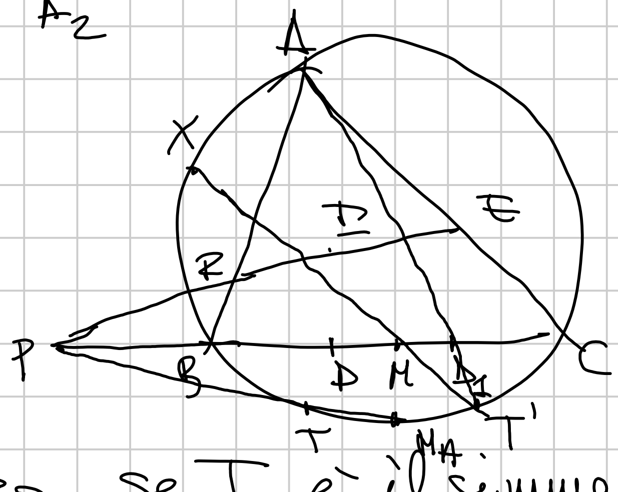
$$\frac{PT}{\sin\widehat{PST}} = \frac{PS}{\sin\widehat{STP}}, \quad \frac{TR}{\sin\widehat{RST}} = \frac{SR}{\sin\widehat{STR}}$$

$$\Rightarrow \frac{PT}{TR} = \frac{PS}{SR}\cdot\frac{\sin\widehat{PST}}{\sin\widehat{RST}}\cdot\cancel{\frac{\sin\widehat{STR}}{\sin\widehat{STP}}} = \frac{PS}{SR}\cdot\frac{PQ}{QR}$$

Lemma 1
(Butterfly)



Torniamo al problema.
Sia D_1 il simmetrico di D rispetto a M.
$XD \cap AM \in (ABC) \iff$
$XM \cap AD_1 \in (ABC)$
Se $T' = AD_1 \cap (ABC)$, allora se T è il simmetrico di T' rispetto all'asse di BC,
$XBTC$ deve essere armonico.

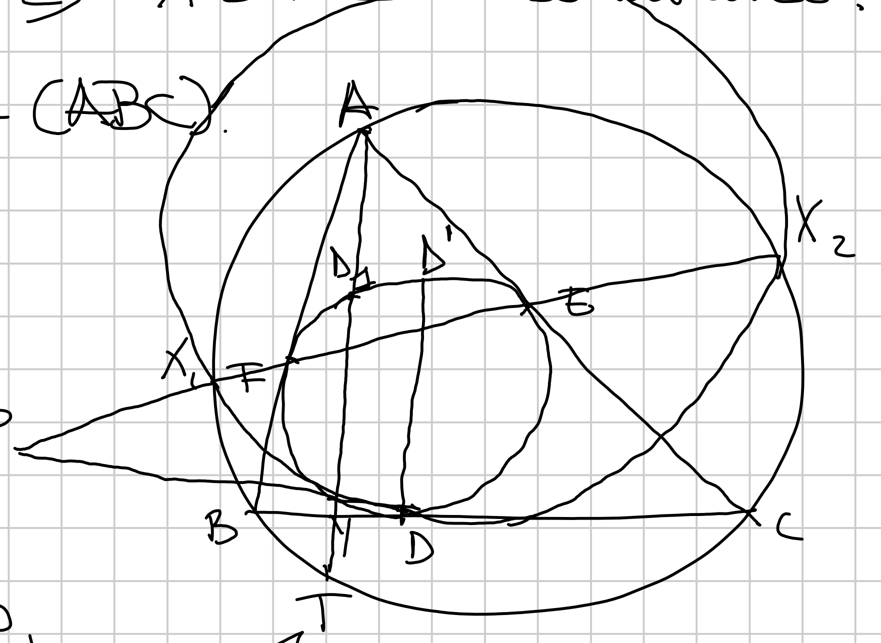


T è il punto di tangenza della A-mistilinea.
Sia M_A il punto medio di BC. $P = EF \cap BC \cap TM_A$.
• $\widehat{XBF} \sim \widehat{XCE} \Rightarrow \frac{XB}{XC} = \frac{BF}{CE}$.

• $\frac{BF}{\cancel{FA}}\cdot\frac{\cancel{AE}}{EC}\cdot\frac{CP}{PB}=1 \Rightarrow \frac{BF}{CE}=\frac{PB}{PC}$.

• Infine per il teorema della bisettrice esterna
$\frac{BT}{TC}=\frac{PB}{PC}$.

$\Rightarrow \frac{XB}{XC}=\frac{TB}{TC} \Rightarrow XBTC$ è armonico.



(2) $\omega=(DEF)$, $\Gamma=(ABC)$.

• Sia $P=DY\cap EF$.

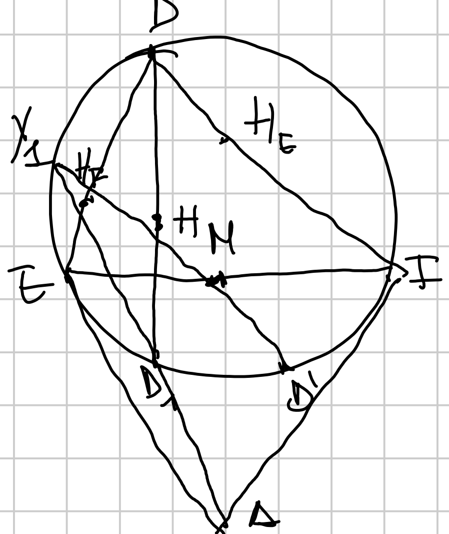
$PX_1\cdot PX_2=PD\cdot PY=$
$=PE\cdot PF$

$\Rightarrow pow_\Gamma(P)=pow_\omega(P)$.

• Invertendo in ω,
$\Gamma\to\Gamma'$ Feuerbach di $\triangle DEF$.

L'asse radicale tra Γ e ω è l'asse radicale tra ω e Γ' $\to$ asse ortico.

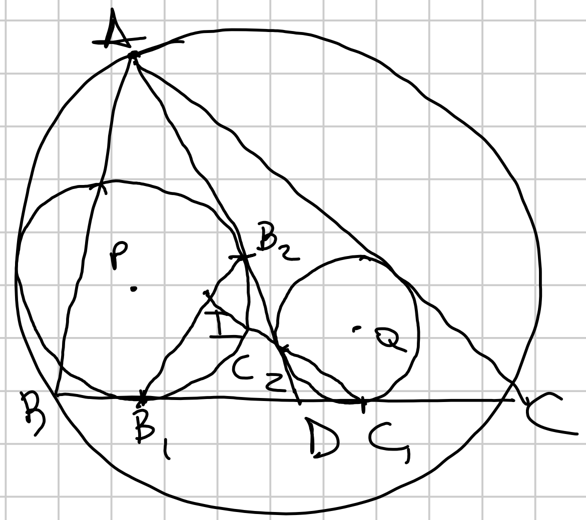
• Sia $D_1\in\omega$ t.c. $DD_1\perp EF$.
D' il diametralmente opposto di D in ω.
AD_1 passa per il punto di tangenza della A-mistilinea.
$Y'=AD_1\cap\omega$. Tesi $\Leftrightarrow$ $DY'\cap EF$ stia sull'asse ortico di $\triangle DEF$.



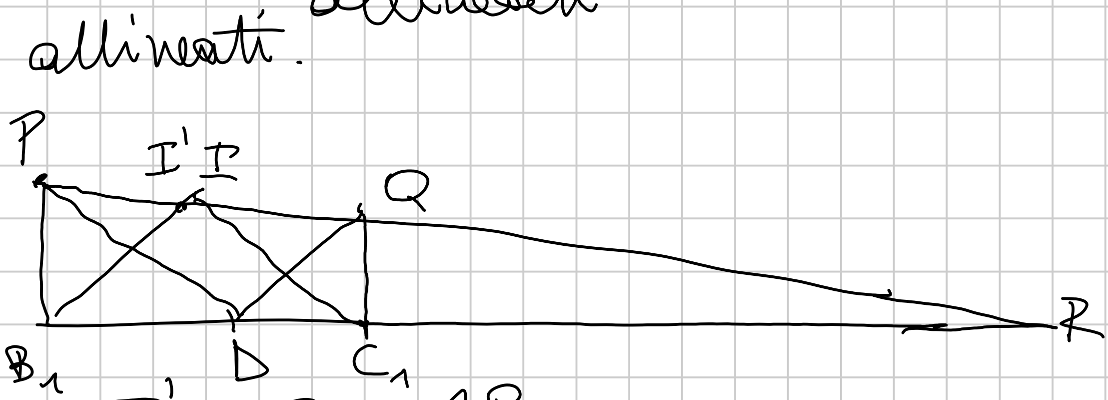
D_1FY_1E è armonico,
Y_1D_1 è simmediana in $Y_1\triangle EF \Rightarrow Y_1D'$ è mediana in $Y_1\triangle EF$.

$H_E \in DF$ t.c. $EH_E \perp DF$, H_F simile.
H l'ortocentro.
$HED'F$ è parallelogramma $\Rightarrow Y_1, H, M, D'$ allineati.
$\Rightarrow \widehat{AY_1H} = 90° \Rightarrow DY_1H_FHH_E$ ciclico.
Per assi radicali su (DH) (EFH_EH_F), ω
$\Rightarrow EF$, H_EH_F e DY_1 concorrono $\Rightarrow$ tesi.

③ Thm Sawayama - Thébault



Tesi: P, I, Q.
$I \in B_1B_2$ come a C_1C_2
$B_1I \perp DP$
$DP \perp DQ$
$\Rightarrow B_1I \parallel DQ$.
$C_1I \parallel DP$.
$B_1P \parallel C_1Q$.
$X_\infty = B_1I \cap DQ$, $Y_\infty = C_1I \cap DP$, $Z_\infty = B_1P \cap C_1Q$.
Pappo su (B_1, C_1, D) e $(Y_\infty, X_\infty, Z_\infty)$.
$B_1X_\infty \cap C_1Y_\infty$, $B_1Z_\infty \cap DY_\infty$, $C_1Z_\infty \cap DX_\infty$ allineati
I, P, Q allineati.



$R = PQ \cap B_1C_1$. $I' = B_1I \cap PQ$.
$B_1P \parallel C_1Q \Rightarrow RB_1 \cdot RQ = RP \cdot RC_1$.

$B_1I' \parallel DQ \Rightarrow RI' \cdot RD = RB_1 \cdot RQ$

$\Rightarrow RI' \cdot RD = RP \cdot RC_1 \Rightarrow C_1I' \parallel DP \Rightarrow I = I'$

$\Rightarrow$ allineamento.

4) RMM 2013/3

5) TST Taiwan 2014 – Round 3 – Mock Day 1 – P3.