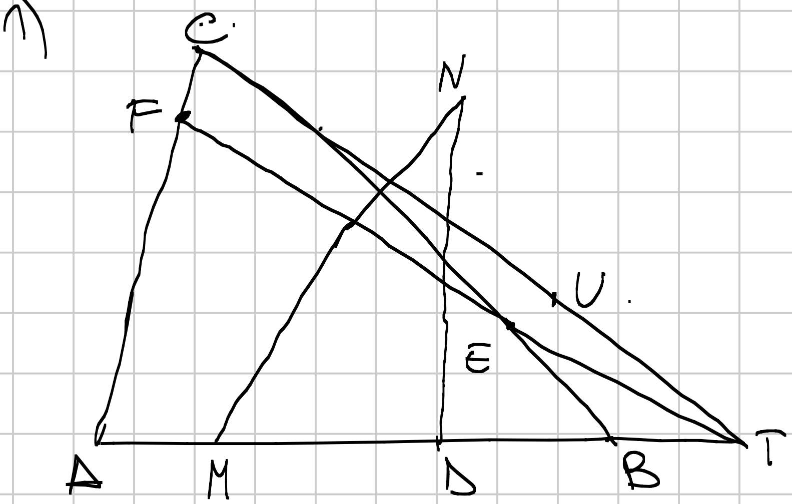
G2 A - Massimiliano

Note Title 06/09/2022

Fonti

1. Bosnia TST 2015/2
2. IMO SL 2010/G3
3. IGO 2016/3
4. IOM 2018/6
5. Israele TST 2022/Day ? - P3
6. USAMO 2016/5
7. Сједињене Америчке Државе ТСТ 2020/6

1)



Sia $M' = (DEF) \cap AB$.
Sia N' il circocentro di $\widehat{CEF}$.

$\widehat{FDA} = 180^\circ - \widehat{BDF} = \hat{C} =$
$= 180^\circ - \widehat{ADE} = \widehat{EDB}$
$\Rightarrow DM'$ è bisettrice esterna di $\widehat{EDF}$ $\Rightarrow M'E = M'F$
$\Rightarrow M = M'$.

$\widehat{FN'E} = 2\hat{C}$; $\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{EDB} - \widehat{FDA} = 180^\circ - 2\hat{C}$

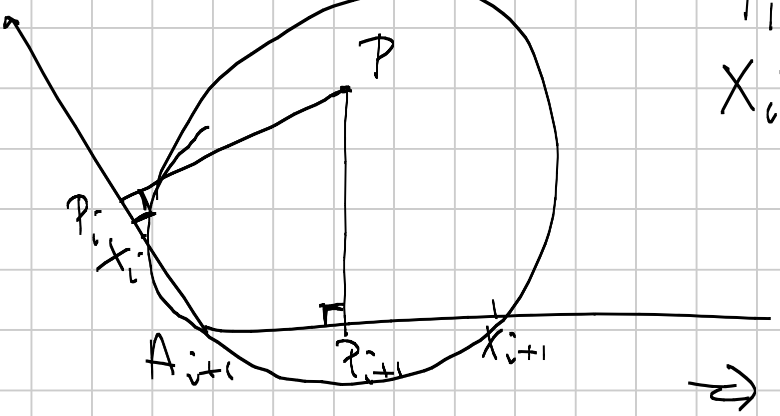
$\Rightarrow DEN'F$ è ciclico. DN' bisettrice di $\widehat{EDF}$ $\in$ $N'E = N'F$, quindi $N'D \perp AB \Rightarrow N = N'$.

Concludendo: $TD \cdot TM = TC \cdot TU =$
$TD \cdot TM = TE \cdot TF$
$\Rightarrow TE \cdot TF = TC \cdot TU \Rightarrow CEFU$ ciclico $\Rightarrow NC = NE = NF = NU$.

---

2) $A_1A_2 \dots A_n$, P_i proiezione di P su A_iA_{i+1}.

Esiste un i t.c. $(A_{i+1}X_iX_{i+1})$ contenga P.
Se non succede, significa che $\widehat{X_iPX_{i+1}} < \widehat{P_iPP_{i+1}}$
e questo non può succedere sempre.



$$P_iP_{i+1} = A_{i+1}P \cdot \sin \widehat{A}_{i+1}.$$

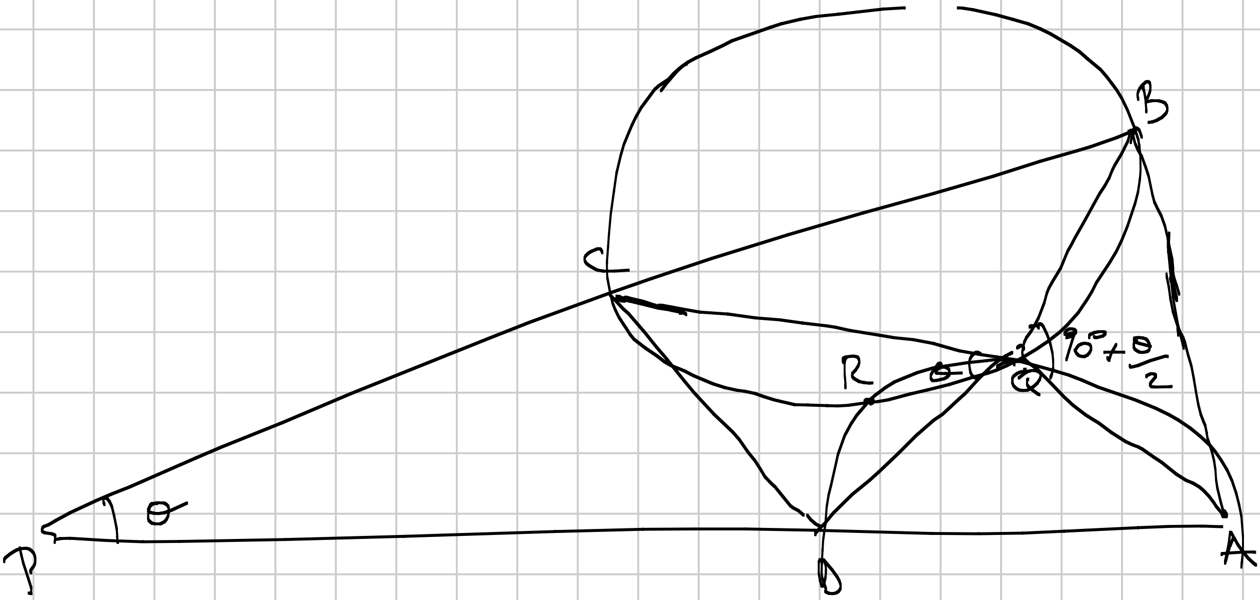
$$X_iX_{i+1} = 2R \sin \widehat{A}_{i+1}.$$

↓

diam. di $(A_{i+1}X_iX_{i+1})$

Ma $A_{i+1}P \le 2R$

$\Rightarrow P_iP_{i+1} \le X_iX_{i+1}$.



- I_1, I_2, O, H sembrano non avere ruoli speciali.

Dimostrare che (detto $\theta = \widehat{APB}$)

$\exists!\ Q$ t.c. $\widehat{AQB} = 90° + \frac{\theta}{2}$ e $\widehat{CQD} = \theta$ $\iff$

$\exists!\ R$ t.c. $\widehat{ARB} = 2\theta$ e $\widehat{CRD} = 90° - \theta/2$

Sia $R = (AQD) \cap (BQC)$.

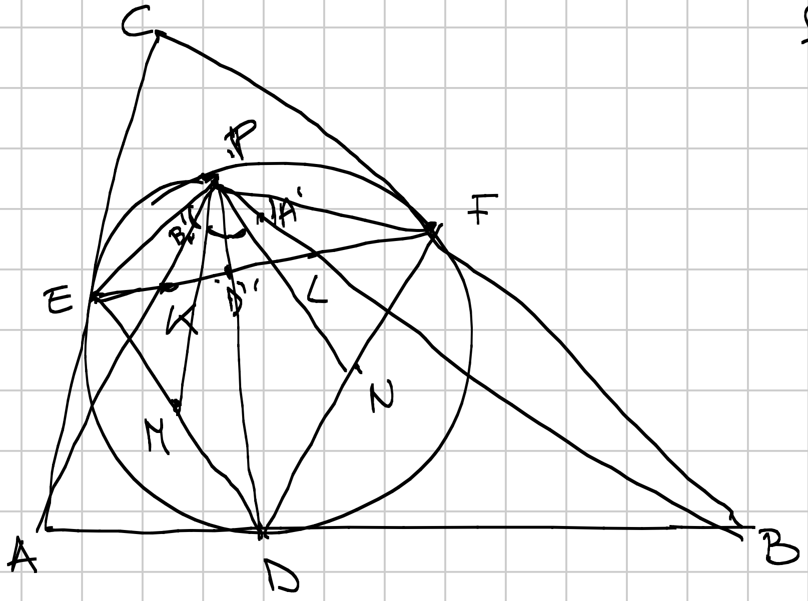
$$\widehat{ARB} = \widehat{ARQ} + \widehat{QRB} = \widehat{BCQ} + \widehat{QDA} = \widehat{CPD} + \widehat{CQD} = 2\theta.$$

$$\widehat{CRD} = 90° - \theta/2.$$

Supponiamo per assurdo che $(AOB) \cap (DI_2C) = \{R_1, R_2\}$.

Siano $Q_1 = (AR_1B) \cap (CR_1D)$, Q_2 analogo.

$Q_1, Q_2 \in (AI_1B) \cap (DHC)$. Assurdo.



Siano M, N punti medi di DE e DF.

$\triangle PEK \overset{+}{\sim} \triangle PDN$

$\triangle PFL \overset{+}{\sim} \triangle PDM$

T simmetrico di E rispetto a K

$\frac{PE}{PT} = \frac{PD}{DF} \Rightarrow \triangle PET \overset{+}{\sim} \triangle PDF$.

T' simm. di F rispetto a L

$\triangle PT'F \overset{+}{\sim} \triangle PED$

$$\widehat{PTE} + \widehat{PT'F} = \widehat{PFD} + \widehat{PED} = 180^\circ \Rightarrow T = T' \Rightarrow KL = \frac{EF}{2}.$$

Invertiamo in P con raggio $\sqrt{PE \cdot PF}$ + simmetria.
$E \leftrightarrow F$. $EF \leftrightarrow \omega$.

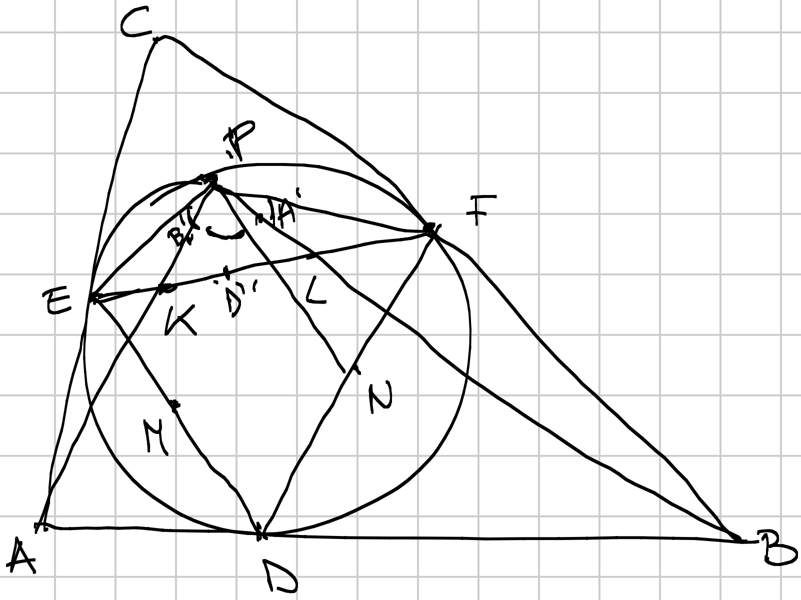
$A' \in PB$. AE tange $\omega \Rightarrow (PFA')$ tange EF.

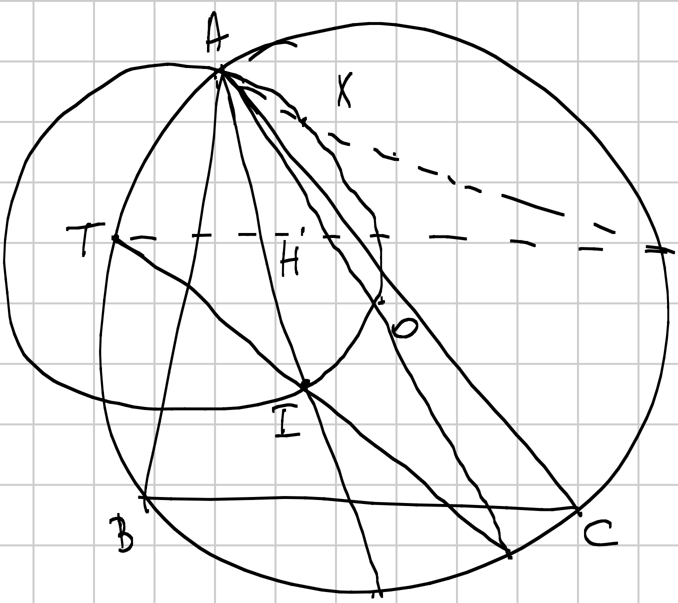
(PEB') tange EF.

$D \to D' \in EF$. $(PA'D'B')$ tange EF.

$LF^2 = LA' \cdot LP = LD'^2$ e $KE^2 = KB' \cdot KP = KD'^2$

$\Rightarrow LF = LD'$ e $KE = KD'$ $\Rightarrow 2KL = EF$.





Lemma!: Tesi $\Longleftrightarrow$ $O\underline{I}$ tange (IHT)

Tesi: $\measuredangle(TH, AX) = \measuredangle(TI, AO)$

OI tange (IHT)

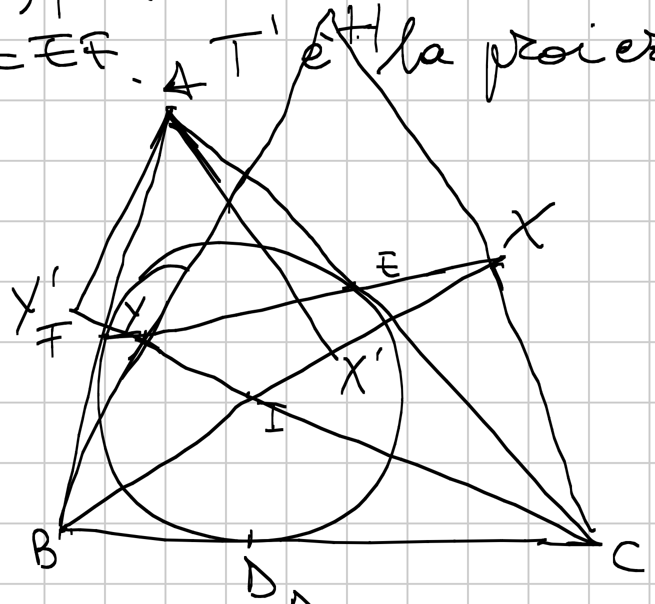
$\measuredangle(TH, HI) = \measuredangle(TI, OI)$

Equivalenza segue da:

$\measuredangle(HI, AX) = \measuredangle(OI, AO)$

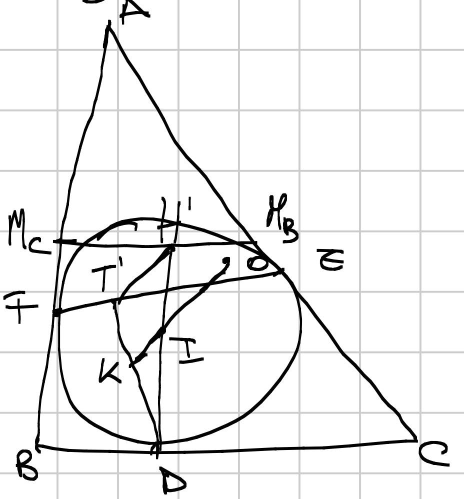
$\measuredangle IXA = \measuredangle IOA$ (ciclicità).

Se invertiamo nell'inscritta, la tesi è $T'H' \parallel OI$.
$T \in (ABC)$, $T' \in$ Feuerbach di $\triangle DEF$, $T \in (AI)$
$\Rightarrow T' \in EF$. T' è la proiezione di D su EF.



H, Y, I, X sono conciclici.
H', X', Y' allineati.
X', Y' sono su M_BM_C.
$H' = DI \cap M_BM_C$.

$OI \parallel T'H'$
K ortocentro di $\triangle DEF$ giace su OI.



Tesi $\Leftrightarrow \dfrac{DK}{DT'} = \dfrac{DI}{DH'}$

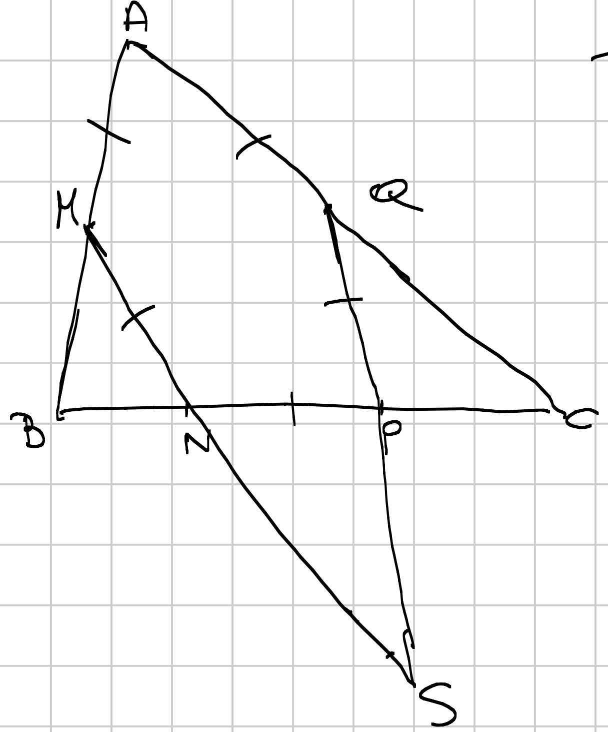
J_A, J_B, J_C excentri. H_A piede dell'altezza da A, D_1 punto di tangenza dell'A-excerchio con BC.

$\triangle DEF \sim \triangle J_AJ_BJ_C \Rightarrow \dfrac{DK}{DT'} = \dfrac{J_AA}{J_AI} = \dfrac{D_1D}{D_1H_A}$.

Sia D' il diam. opposto di D in ω.

$\dfrac{DI}{DH'} = \dfrac{DD'}{AH_A}$, A, D', D_1 allineati.

Per similitudini $\dfrac{DD'}{AH_A} = \dfrac{D_1D}{D_1H_A}$. $\blacksquare$

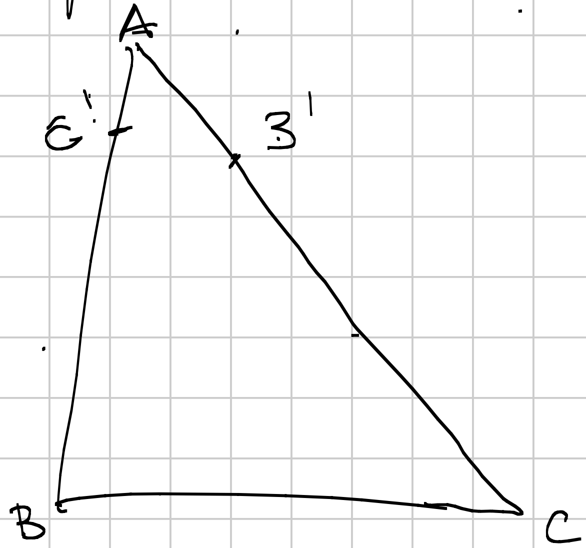


Tesi: bisettrice di $\widehat{MSQ}$ $\parallel$ retta OI

Lemma.

Dato $\overset{\triangle}{ABC}$ non equilatero e $K \in \mathbb{R}$ il luogo dei punti X del piano t.c. $d(X, BC) + d(X, CA) + d(X, AB) = K$ è una retta perpendicolare a OI.

$B' \in AC$, $C' \in AB$
tali che
$BC' = BC = CB'$.



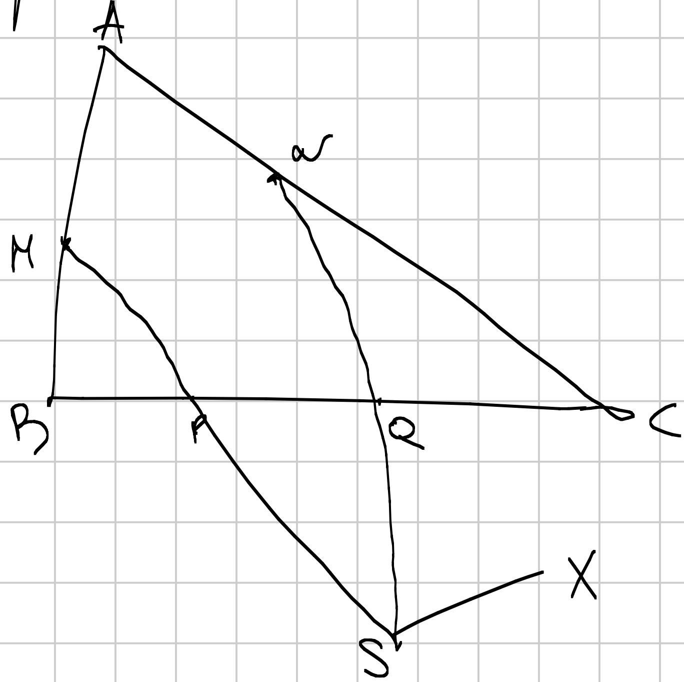
$$d(C', BC) + d(C', AC) = d(B', BC) + d(B', AB)$$
$$a \sin\beta + (c - \cancel{a}) \sin\alpha = a \sin\gamma + (b - \cancel{a}) \sin\alpha$$
$$\frac{ab}{2R} + \frac{ac}{2R} = \frac{ac}{2R} + \frac{ab}{2R} \quad \checkmark$$

$B'C' \perp OI$.

Due approcci:

1. $IB'^2 - IC'^2 = OB'^2 - OC'^2$

2. Sia F il piede della bis. ext. su AB, E su AC.
$BB' \parallel CF$ e $CC' \parallel BE$.
Invertendo in A, $B' \leftrightarrow F$, $C' \leftrightarrow E$.
Quindi $B'C' \parallel EF$
EF è l'asse ortico del triangolo degli excentri, che è perpendicolare a OI.

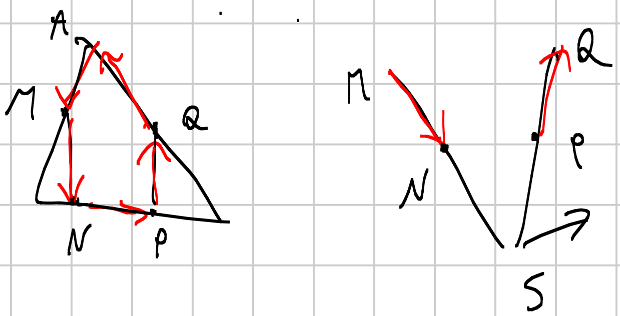


Sia X sulla bisettrice esterna di MSQ.

$[XAM]+[XAN]-[XPQ]=[AMN]+[XMN]-[XPQ]=$
$=[AMN]+[XMN]+[XMP]-[XQN]-[XPQ]=[AMPQN]$.

$\sum_{cyc} d(X, BC) = \dfrac{2\cdot[AMPQN]}{\ell}$, $\ell = AM = MP = PQ = QN = NA$.

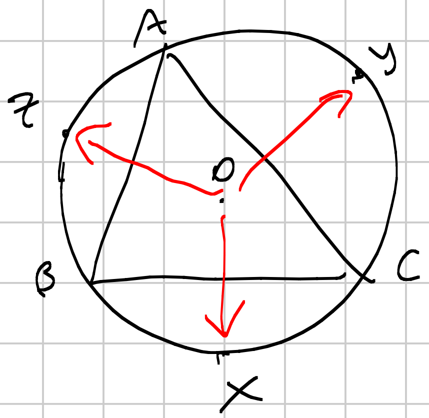
SOL. ALTERNATIVA:



LA BISETTRICE ESTERNA DI $\angle MSQ$ È PARALLELA A $\vec{MN}+\vec{PQ}$ (SOLO SE HANNO LA STESSA LUNGHEZZA E SONO ORIENTATI "OPPOSTI")

$\vec{AM}+\vec{MN}+\vec{NP}+\vec{PQ}+\vec{QA}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ LA DIREZIONE DI $\vec{MN}+\vec{PQ}$ È UGUALE A QUELLA DI $\vec{AM}+\vec{NP}+\vec{QA}$



$\vec{OX} = \vec{NP}$ RUOTATO DI 90° IN SENSO ORARIO E SCALATO DI UN FATTORE

$\vec{OY} = \vec{QA}$ RUOTATO DI 90° IN SENSO ORARIO E SCALATO DELLO STESSO FATTORE

$\vec{OZ} = \vec{AM}$ ''

QUINDI $\vec{AM}+\vec{NP}+\vec{QA}$ È UGUALE A

$\vec{OX}+\vec{OY}+\vec{OZ}$ RUOTATO DI 90° E SCALATO

$\|$

$\vec{OH}$, DOVE H È L'ORTOCENTRO DI $\triangle XYZ$, CIOÈ I

$\Rightarrow \vec{AM}+\vec{NP}+\vec{QA} \perp \vec{OI}$

$\|$

$-(\vec{MN}+\vec{PQ}) \perp$ BISETTRICE INTERNA DI $\angle MSQ$ ■