N2 ADVANCED FFD

1) N3 2009 + domanda bonus: f deve essere un polinomio
2) FOLKLORE (x residuo quadratico modulo p per ogni p $\Rightarrow$ x quadrato perfetto?)

e in generale residuo k-esimo $\Rightarrow$ x potenza k-esima?

3) N3 2017
4) USA TSTST 8 2013
5) N4 2017
6) N5 2009
7) N4 2018 (ITA 5)

---

1) $f(1+k) - f(1) \equiv 0 \pmod{k}$

$p_1, p_2, \dots, p_n$

$k = (p_1 \dots p_n)^s \to k_s$

$\forall p_i \quad v_p(f(1+k)) = v_p(f(1))$

$\Rightarrow \quad f(1+k_s) = f(1) \quad \forall s > N$

$a = 1 + k_s \qquad \dfrac{f(1) - f(b)}{1 + k_s - b} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ per s grande $\Rightarrow$ $f(1) = f(b)$ $\forall b \in \mathbb{Z}_+$

$1 | 6!3$ No!

$f(x) = x + x(x-1) + x(x-1)(x-2) \dots$

Alternativamente

$$f(n+1) \equiv f(1) \mod n$$
$$f(2) \mod n-1$$

$$f(n) \mod 1$$

$$f(n+1) \equiv \{ \quad \mod \operatorname{lcm}(1, \dots, n)$$
(mcm per Zonta)

Cresce più di un po'! :)
(il corpo è integro?)

---

(3) $x = k^2 p_1 p_2 \cdots p_n$

$$1 = \left(\frac{x}{p}\right) = \cancel{\left(\frac{k^2}{p}\right)} \left(\frac{p_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{p_n}{p}\right)$$

fatto 1 $\left(\frac{2}{p}\right) \to 1$ se $p \equiv \pm 1 \mod 8$
-1 se $p \equiv \pm 3 \mod 8$

$(p \equiv 1 \mod 8)$ $\quad p_i \neq 2$

$p, q \neq 2$ $\quad \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$

$$1 = \left(\frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p}{p_2}\right) \cdots \left(\frac{p}{p_n}\right)$$

$$\begin{aligned} p &\equiv nr \mod p_1 \\ p &\equiv 1 \mod p_2 \\ p &\equiv 1 \mod p_n \end{aligned}$$

$\to \exists$ soluzione x TCR

Ora applichiamo dirichlet e troviamo un siffatto primo.

26 (5) $\quad 16$ è potenza 8-va mod p per ogni p

$$(x^2+1)(x^2+2)(x^2-2)$$

$$x^8-16=(x^4-4)(x^4+4)$$

$$(x^2-2)(x^2+2)$$

N 3 2017

9 SE n PARI >2 POSSIAMO PRENDERE

$$\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0, 0, \dots, 0$$

QUANDO BECCHIAMO DUE DEI TRE $\frac{n}{2}$ SIAMO FREGATI

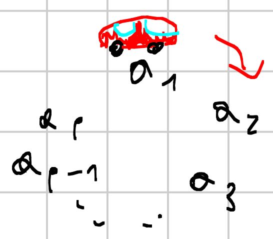
SE n COMPOSTO E $p \mid n$ PRENDIAMO

$$\underbrace{\frac{n}{p}, \frac{n}{p}, \dots, \frac{n}{p}}_{p+1}, \underbrace{0, 0, 0, 0 \dots}_{n-p-1}$$

E COME SOPRA ABBIAMO CHE n NON FUNZIONA

n PRIMO $=p$

FACCIAMO PER ASSURDO



SCRIVIAMO I NUMERI IN CERCHIO
SUPPONIAMO CHE, OVUNQUE PARTA, LA MACCHININA TROVI A UN CERTO

PUNTO CHE LA SOMMA DEI TERMINI SU CUI PASSA
È MULTIPLO DI p.

PARTE AD a_1, IMMAGINIAMO CHE $p \mid a_1 + \dots + a_k$
RIPARTE DA a_{k+1} E ARRIVA A a_j T.C. $p \mid a_{k+1} + \dots + a_j$

ECCETERA.

PER IL PRINCIPIO DEI CASSETTI DOPO UN PO' RITORNA PER LA PRIMA VOLTA IN UN PUNTO IN CUI SI ERA GIÀ FERMATA. LA SOMMA DEI TERMINI CHE HA PERCORSO SARÀ
$\left(\sum_1^p a_i\right) \cdot \#$GIRI, E SARÀ MULTIPLA DI p.

CHIARAMENTE A OGNI PASSAGGIO PASSA SU $\leq p-1$ TERMINI
$\Rightarrow$ IN TOTALE PASSERÀ SU $\leq p(p-1)$ TERMINI $\Rightarrow \leq p-1$ GIRI
$\Rightarrow p \nmid \#$GIRI $\Rightarrow p \mid \sum$ TERMINI, ASSURDO $\blacksquare$

Fatto 1) $f(n)$ è dispari $\forall n \in \mathbb{Z}_+$

2) INDUZIONE
$k=1$ vero

3) $\phi(3^{k+1}) = 2 \cdot 3^k$

$f(3^k+1) - f(1)$

$= 2^{f(3^k)} + 2^{f(3^k-1)} \dots + 2^{f(1)}$

$= 2^1 + 2^3 \qquad + 2^{2\cdot 3^k - 1}$

$= 2\left(\dfrac{4^{3^k} - 1}{3}\right) = c \cdot 3^k \qquad c \not\equiv 0 \bmod 3$

mod 3^{k+1}

$f(1)\ ,\ f(3^k+1)\ ,\ f(2\cdot 3^k+1)$

$f(m)\ ,\ f(3^k+m)\ ,\ f(2\cdot 3^k+m)\qquad m\leq 3^k$

5 N4 2017

$\frac{a}{b}$ HA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE FINITA $\Leftrightarrow$ b HA SOLO FATTORI 2 E 5
(a,b COPRIMI)

QUINDI, SE $f(n)$ È $\dfrac{n}{2^{v_2(n)}\cdot 5^{v_5(n)}}$, CIOÈ n SENZA

FATTORI 2 E 5, $\frac{a}{b}$ È CORTO $\Leftrightarrow$ $f(b)=1$

VOGLIAMO t = ORDINE DI 10 MODULO $f(m\cdot c)$
$(c\in\{1,\dots,2022\})$

VOGLIAMO TROVARE IL MASSIMO DELLA CARDINALITÀ DELL'INSIEME DEGLI ORDINI DI 10 MODULO $f(cm)$, CON c CHE VARIA TRA 1 E 2022

BOUND OVVIO: $|S(m)|\leq |\{f(m\cdot c),\ 1\leq c\leq 2022\}|$

$$= |\{c \text{ COPRIMI CON } 10 \text{ E } \leq 2022\}|$$

$$= 2022-1011-404+202=809$$

NON RIUSCIAMO A TROVARE ALTRE CONDIZIONI
$\Rightarrow$ PROBABILMENTE È LA RISPOSTA.

CHE COS'È L'ORDINE DI 10 MODULO a (COPRIMO CON 10)?

$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots$

L'ORDINE DI 10 MOD α SARÀ IL MINIMO COMUNE MULTIPLO DEGLI ORDINI DI 10 MODULO $p_i^{\alpha_i}$

CHE COS'È L'ORDINE DI 10 MODULO p^α?

$\alpha = 1 \rightarrow$ L'ORDINE SARÀ QUALCOSA (DICIAMO $d \mid p-1$)

$\alpha = 2 \rightarrow$ BOH (DIPENDE SE $p^2 \mid 10^d - 1$ O MENO)

$\alpha = 3 \rightarrow$ IDEM

$\alpha = V_p(10^d - 1) \rightarrow$ SAPPIAMO CHE L'ORDINE È d

$\alpha = V_p(10^d - 1) + 1 \rightarrow$ L'ORDINE SARÀ kd

$$V_p(10^{kd} - 1) = V_p(10^d - 1) + V_p(k) \rightarrow \text{MINIMO } k \text{ È } p$$

$\Rightarrow$ ORDINE $= pd$

ANALOGAMENTE $\alpha = V_p(10^d - 1) + 2 \rightarrow$ ORDINE $= p^2 d$

$\vdots$

VOGLIAMO m T.C. GLI ORDINI DI 10 MOD cm PER $c \leq 2022$ COPRIMO CON 10 SIANO TUTTI DISTINTI

$\Rightarrow$ PRENDIAMO $m = (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2017)^N$ CON N GRANDE

QUANTO GRANDE? $N > V_{p_i}(10^{\text{ORDINE DI 10 MOD } p_i} - 1)$

IN QUESTO MODO SE D È L'ORDINE DI 10 MOD m AVREMO CHE L'ORDINE DI 10 MODULO cm SARÀ cD PER QUELLO CHE ABBIAMO DETTO PRIMA ∎