• Trovare formula chiusa per

$$\begin{cases} a_n = \underbrace{2}_{\text{cost}} a_{n-1} + \underbrace{n}_{f(n)} & n=1,2,3,\dots \\ a_0 = 37 \end{cases}$$

$a_0 = 37$

$a_1 = 2\cdot 37 + 1$

$a_2 = 2^2\cdot 37 + 2\cdot 1 + 2$

$a_3 = 2^3\cdot 37 + 2^2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3$

$a_4 = 2^4\cdot 37 + 2^3\cdot 1 + 2^2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4$

$a_k = 2^k\cdot 37 + 2^{k-1}\cdot 1 + 2^{k-2}\cdot 2 + \dots + 2^0\cdot k$ → trucco: esponente + fattore = k

$= 2^k\cdot 37 + \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j}\cdot j$

Dim: induzione:

$a_n = 2a_{n-1} + n = 2\left(2^{n-1} + \sum \dots\right) \quad \dots \quad = 2^n + \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j}\cdot j$

So dire anche quanto fa la sommatoria?

$$\sum_{j=1}^{k} 2^{k-j}\cdot j = 2^k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j}\cdot j$$

→ sommatoria $\sum_{j=1}^{k} j\cdot x^j = 1\cdot x + 2\cdot x^2 + \dots + k\cdot x^k$ con $x = \frac{1}{2}$

Come si calcola?

Idea: stesso idea che si usa per calcolare $S = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \dots$

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + \dots + x^k \\ -\ xS &= \quad\ \ x + x^2 + \dots + x^k + x^{k+1} \\ \hline (1-x)S &= 1 \qquad\qquad\qquad\quad - x^{k+1} \end{aligned}$$

Per la nostra somma:

$$\begin{aligned} -\quad S &= 2^{k-1}\cdot 1 + 2^{k-2}\cdot 2 + \dots + 2^1(k-1) + 2^0\cdot k \\ +\quad 2S &= 2^k\cdot 1 + 2^{k-1}\cdot 2 + 2^{k-2}\cdot 3 + \dots + 2^1\cdot k \\ \hline S &= 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 - k \end{aligned}$$

$= S = \frac{2^{k+1}-2}{2-1}$ $\quad -k \quad = 2^{k+1}-k-2$

Complessivamente: $a_n = 2^n \cdot 37 + 2^{n+1} - n - 2$

In generale: soluzione di

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \boxed{+n} \\ a_0 = C \end{cases}$$

non omogenee

è dato da

$$a_n = \underbrace{2^n \cdot C}_{\text{soluzione generale di } b_n = 2b_{n-1}} + \underbrace{2^{n+1} - n - 2}_{\text{una soluzione qualunque di } \begin{cases} a_n = 2a_{n-1}+n \\ a_0 = \text{non importa} \end{cases}}$$

$b_n = 2^n \cdot C$

- Trovare formula chiusa per

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} & (1) \\ a_0 = 0 & (2) \\ a_1 = 1 & (3) \end{cases}$$

condiz. iniziali: (2), (3)

ma cerco soluzioni $a_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + 2\lambda^{n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda^2 = \lambda + 2$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ polinomio caratteristico

$0 = p(\lambda) \iff a_n = \lambda^n$ è soluzione di (1)

$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ allora, $a_n = (-1)^n$ soddisfano (1)

$a_n = 2^n$

La soluzione di (1) + (2) + (3)

è del tipo $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$ con α, β che trovo da (2) + (3)

$$\begin{array}{l} (2) \to \\ (3) \to \end{array} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha = -\beta \\ 3\beta = 1 \end{array} \Rightarrow \beta = \frac{1}{3},\ \alpha = -\frac{1}{3}$$

La soluzione di (1) + (2) + (3) è $a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Funziona per tutte le successioni $a_{n+1} = \square\, a_n + \square\, a_{n-1}$

<u>Variante</u>: se $p(\lambda)$ ha una soluzione doppia $\lambda_1 = \lambda_2$,

devo prendere $a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta n \lambda_2^n$

• es. classico: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

p primo, dimostrare che esistono ∞ valori di n tali che $p \mid a_n$

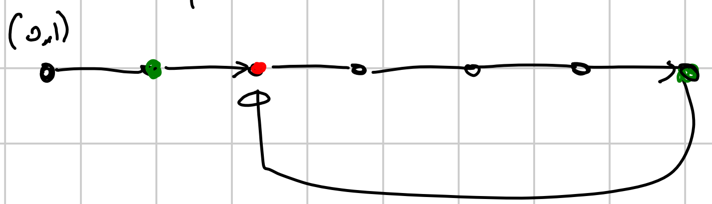
$p = 5$

$a_0 = \boxed{0}$
$a_1 = \boxed{1}$
$a_2 = 1$
$a_3 = 3$
$a_4 = 5 \equiv \boxed{0} \pmod 5$
$a_5 \equiv 0 + 2\cdot 3 \equiv 6 \equiv \boxed{1}$

Qualunque sia il primo p, prima o poi troverò una coppia di valori (a_{n-1}, a_n) ripetuta modulo p

$$\begin{tikzcd} (0,1) \arrow[r] & (1,1) \arrow[r] & (1,3) \arrow[r] & (3,0) \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

Può succedere questo? sì ripetono



"forma a P"

<u>No</u>, perché se $(a_n, a_{n+1}) = (c, d)$ allora a_{n-1} è univocam. determinato:

$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

$d = c + 2a_{n-1}$ $\qquad a_{n-1} = \dfrac{d-c}{2}$

Quindi se succede "P" come sopra, con la prima ripetizione a •
allora anche • = •, quindi è assurdo

• Esercizio: quante sono le stringhe di 12 caratteri (A, B) che non contengono 2 A consecutive né 3 B consecutive

BABBABABBAB..

Idea: conto le sequenze lunghe n suddividendole a seconda del blocco di caratteri uguali con cui terminano.

$$\begin{cases} A_{n+1} = B_n + \boxed{BB}_n \\ B_{n+1} = A_n \\ \boxed{BB}_{n+1} = B_n \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 1 \\ B_1 = 1 \\ BB_1 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{BB}_n = \{$# stringhe lunghe n che soddisfano le cond. e terminano con un blocco $BB\}$

$B_n = \{$# stringhe lunghe n che soddisfano e terminano con una sola $B\}$

$A_n = \{ \ \ldots \}$

$$BB_{n+1} = B_n = A_{n-1} =$$

$$\boxed{A_{n+1}} = B_n + BB_n = A_{n-1} + B_{n-1} = \boxed{A_{n-1} + A_{n-2}}$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \rightsquigarrow \lambda^3 = \lambda + 1 \rightsquigarrow p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1$$

trovo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $A_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n + \gamma\lambda_3^n$

(problema: le soluzioni non sono "facili" da scrivere)

(In gen., quando avete

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha A_{n-1} + \beta B_{n-1} + \gamma C_{n-1} \\ B_n &= \delta A_{n-1} + \varepsilon B_{n-1} + \eta C_{n-1} \\ C_n &= \zeta A_{n-1} + \vartheta B_{n-1} + \iota C_{n-1} \end{aligned}$$

semplificare una qualunque vi dà le stesse ricorrenze)

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + B_n \\ B_{n+1} = A_n + 2B_n \end{cases} \rightsquigarrow$$

Equazioni funzionali

Trovare funzioni incognite che soddisfano identità

es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(f(x)) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tale che $[f(x)]^2 = x$ ② $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x) + f(y) = f(x+y)$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

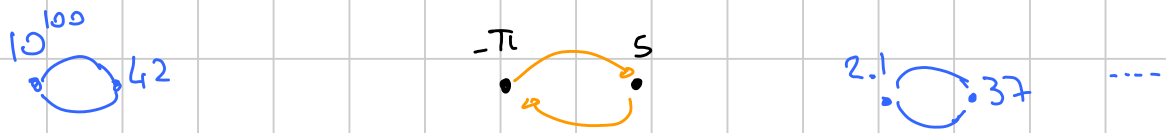
② $\Rightarrow$ $f(x) = \pm\sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Soluzioni:
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = -\sqrt{x}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in (0,1) \\ -\sqrt{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \text{ è razionale} \\ -\sqrt{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se il num. frisa pari} \\ -\sqrt{x} & \end{cases}$

①: $f(f(x)) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

se riapplico due volte la f, ottengo lo stesso numero

$$f(5) = -\pi \quad \Rightarrow \quad f(-\pi) = f(f(5)) = 5$$



③: su $\mathbb{Z}$, soluzioni sono del tipo $f(x) = \lambda x$, dove $\lambda = f(1)$ è un intero a piacere

---

- trovare $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$: $P(x,y)$

$P(0,0)$: $f(0+0) + f(0-0) = 2f(0) + 2f(0) \to 2f(0) = 4f(0)$
$\to f(0) = 0$

$P(x,0)$: $f(x) + f(x) = 2f(x)$ inutile... $\forall x \in \mathbb{Q}$

$P(x,x)$: $f(2x) + \underbrace{f(0)}_{=0} = 2f(x) + 2f(x)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\boxed{f(2x) = 4f(x)}$

$P(2t,t)$: $f(3t) + f(t) = 2f(2t) + 2f(t)$ $\forall t \in \mathbb{Q}$

$\to f(3t) + f(t) = 2 \cdot 4 f(t) + 2f(t) \to f(3t) = 9f(t)$

Idea: dimostro per induzione che $\boxed{f(nt) = n^2 \cdot f(t)}$ $S(n,t)$ $\forall t \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$

Razionali positivi: $S(n, \frac{1}{n})$: $f(1) = n^2 \cdot f(\frac{1}{n})$ Definisco $\boxed{\lambda = f(1)}$

1) $S(n,1)$: $f(n) = n^2 f(1) = n^2 \lambda$ $\rightsquigarrow \mathbb{N}$

2) $S(n, \frac{1}{n})$: $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \cdot \lambda$ $\rightsquigarrow \mathbb{N}^{-1}$

3) $S(m, \frac{1}{n})$: $f(m \cdot \frac{1}{n}) = m^2 f(\frac{1}{n}) = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \lambda$ su $\mathbb{Q}_+$

$P(x,-x)$: $f(0) + f(2x) = 2f(x) + 2f(-x)$

se $x \geq 0$: $0 + (2x)^2 \cdot \lambda = 2x^2 \lambda - 2f(-x)$

$\Rightarrow f(-x) = x^2 \lambda$

Anche: con $P(0,y)$

Quindi $f(x) = x^2 \lambda \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

IMO19-1: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ t.c. $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$ $: P(a,b)$

Oss: se volete, potete vederlo come esercizio sulle successioni:

trovate tutte le successioni a_n tali che $a_{2n} + 2a_m = a_{a_{m+n}}$

$P(0,0)$: $f(0) + 2f(0) = f(f(0))$ $\quad 3f(0) = f(f(0))$

$P(a,0)$: $f(2a) + 2f(0) = f(f(a))$ $\quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$P(0,b)$: $f(0) + 2f(b) = f(f(b))$ $\quad \forall b \in \mathbb{Z}$ no

posso usarle per riscrivere $\quad f(2a) + 2f(b) = f(0) + 2f(a+b)$

⚠ Passaggio che non funziona : sostituisco $f(b) = c$

e ottengo $f(0) + 2c = f(c) \Rightarrow f(c) = 2c + f(0)$

$\forall c$ che si scrive nella forma $f(b)$
$\forall c \in \operatorname{Im} f$

non per forza tutti gli interi!

Idea: sfrutto $a+b$ $\quad 2 = 2+0 = 1+1 = 0+2$

$P(0,2)$: $f(0) + 2f(2) = f(f(2))$

$P(1,1)$: $f(2) + 2f(1) = f(f(2))$

$P(2,0)$: $f(4) + 2f(0) = f(f(2))$

Più in generale:

$P(a,b)$: $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$

$P(b,a)$: $f(2b) + 2f(a) = f(f(a+b))$

$2f(b) - f(2b) = 2f(a) - f(2a) \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$

$S(b) \Rightarrow \boxed{2f(b) - f(2b) = f(0)}$ dev'essere costante $\forall b \in \mathbb{Z}$

Usando queste relazioni possiamo dimostrare che f è lineare (affine)

cioè $\boxed{f(n+1) - f(n)}$ è costante $\Rightarrow f(n) = \alpha n + \beta$

Usando la $S(a)$, sostituisco

$$2f(a) - f(0) + 2f(b) = f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

$$\Rightarrow 2f(a) + 2f(b) = \underbrace{f(f(a+b)) + f(0)}_{\text{dipende solo da } a+b} \qquad \forall\ a,b \in \mathbb{Z}$$

$T(a,b)$

$T(a,b)$: $2f(a) + 2f(b) = f(f(a+b)) + f(0)$

$T(a+b,0)$: $2f(a+b) + 2f(0) = f(f(a+b)) + f(0)$

$U(a,b)$ $\quad f(a) + f(b) = f(a+b) + f(0) \qquad \forall\ a,b \in \mathbb{Z}$

Definiamo $g(x) := f(x) - f(0)$, così $g(0) = 0$

Facendo un cambio di variabile,

$U(a,b)$ diventa $\quad g(a) + \cancel{f(0)} + g(b) + \cancel{f(0)} = g(a+b) + \cancel{f(0)} + \cancel{f(0)}$

$$g(a) + g(b) = g(a+b) \qquad \forall\ a,b \in \mathbb{Z}$$

Equazione di Cauchy su $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow g(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$, per un qualche λ

$$f(x) = g(x) + f(0) = \lambda x + f(0) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Mi dice che ogni f che soddisfa $P(a,b)$ è fatta della forma $f(x) = \lambda x + c$, per opportune costanti $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$.

Se vado a sostituire,

$P(a,b)$: $\quad \lambda \cdot 2a + c + 2(\lambda b + c) = \lambda(\lambda(a+b) + c) + c$

$$2\lambda a + 2\lambda b + 3c = \lambda^2 a + \lambda^2 b + \lambda c + c \qquad \forall\ a,b$$

Dev'essere $2\lambda = \lambda^2$ $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ $\qquad 3c = (\lambda+1)c$ $\begin{cases} \text{se } \lambda = 2, \text{ tutti i } c \text{ vanno bene} \\ \text{se } \lambda = 0, \text{ solo } c = 0 \end{cases}$

Soluzioni dell'equazione: $f(x) = 2x + c$ per ogni $c \in \mathbb{Z}$

$f(x) = 0$

(Basta sost. nel testo iniziale $P(a,b)$, $P(b,a)$, $P(a+b, 0)$ e confrontare tutto)

Eserciziario pagina 2

1 $f(f(n)) = n+1$

4 $f(x+f(y)) = f(x) + y$

5 pulce

6 $x_{n+1} = 6x_n - 2\sum x$

10 $f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2 + y$

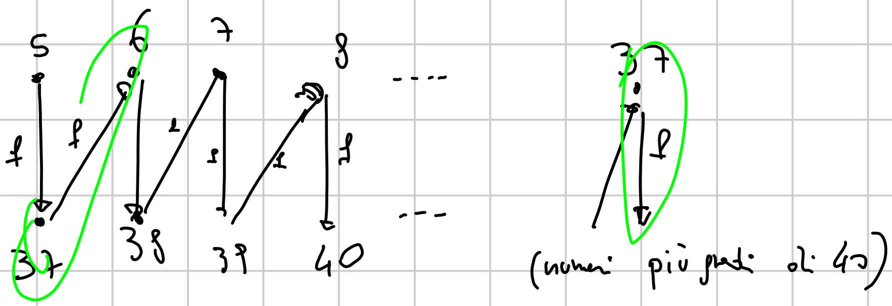
1. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(f(n)) = n+1$

$f(5) = 37$

$\Downarrow$

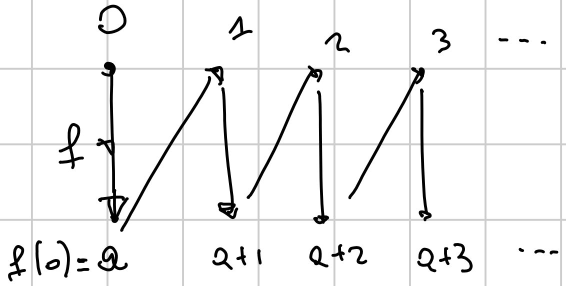
$f(37) = f(f(5)) = 5+1 = 6$

$f(6) = f(f(37)) = 38$



Costruisco uno "zig-zag" di valori

Questi valori prima o poi si incontreranno.



Se $a > 0$, trovo prima o poi a nella riga di sopra, e un numero $> a$ sotto

Se $a < 0$, trovo 0 nella riga di sotto e $f(0) > 0$ Assurdo!

Oppure:

$$f(f(f(n))) = f(n+1)$$

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1$$

$f(n+1) = f(n) + 1$

$\Rightarrow f(n) = n + c$ (induzione) $\forall n$

↳ intero, $c = f(0)$

$$\Rightarrow f(f(n)) = f(n+c) = n+c+c = n+2c \neq n+1$$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona $\quad f(x+f(y)) = f(x)+y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$P(x,y)$

$P(0,0)$: $f(f(0)) = f(0)$

(ii) $P(0,y)$: $\boxed{f(f(y)) = y + f(0)}$

(iii) $P(x,0)$: $f(x+f(0)) = f(x)$ $\leftarrow$ se $f(0) \neq 0$, f sarebbe periodica, ma non può essere periodica e monotona! (a meno che non sia costante)

$$\boxed{\Rightarrow f(0) = 0}$$

Oppure, per dire che $f(0) = 0$:

(ii) $(f \circ f)(y) = y + f(0)$ $\hookrightarrow$ sia iniettiva che suriettiva!

$\Rightarrow f$ è sia iniettiva che suriettiva!

(iii) $\cancel{f}(x+f(0)) = \cancel{f}(x) \underset{\boxed{\text{iniett}}}{\Rightarrow} x+f(0) = x \quad \Rightarrow f(0) = 0$

(ii) $+ f(0)=0$: $\boxed{f(f(y)) = y} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$P(x, f(y))$: $\quad f(x+f(f(y))) = f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

Cauchy + monotonia $= f(z) = \lambda z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

+ verificare quali λ funzionano $\quad (\lambda = \pm 1)$

---

5. Pulce su tetraedro

probabilità di essere in A dopo n passi $= \dfrac{\# \text{ percorsi } A \dots A}{3^n}$

$A_n = \mathbb{P}[\text{essere nel vertice } A \text{ dopo } n \text{ salti}]$

$B_n =$ ..

$C_n =$ ..

$D_n =$ ..

$$\begin{cases} A_{n+1} = \frac{1}{3}B_n + \frac{1}{3}C_n + \frac{1}{3}D_n \\ B_{n+1} = \frac{1}{3}A_n + \frac{1}{3}C_n + \frac{1}{3}D_n \\ C_{n+1} = \frac{1}{3}A_n + \frac{1}{3}B_n + \frac{1}{3}D_n \\ D_{n+1} = \frac{1}{3}A_n + \frac{1}{3}B_n + \frac{1}{3}C_n \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = 1 \\ B_0 = 0 \\ C_0 = 0 \\ D_0 = 0 \end{cases}$$

Modo 1: $B_n = C_n = D_n$ ad ogni passo

$$\begin{cases} A_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot 3B_n = B_n \\ B_{n+1} = \frac{1}{3}A_n + \frac{2}{3}B_n = \frac{2}{3}B_n + \frac{1}{3}B_{n-1} \end{cases}$$

$$\lambda^2 = \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} \quad \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$A_n = \frac{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{4}$$

Modo 2: $A_n + B_n + C_n + D_n = 1$

$$A_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - A_n) = -\frac{1}{3}A_n + \frac{1}{3}$$

Ricorrente a un passo non omogenea

6

$$X_0 = 1$$

$$X_{n+1} = 6X_n - 2\sum_{i=0}^{n} X_i$$

Modo 1: Gli diamo un nome, e vediamo cosa fa:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} X_i \qquad \begin{cases} Y_n = Y_{n-1} + X_n \\ X_{n+1} = 6X_n - 2Y_n \end{cases}$$

Modo 2:

$$X_{n+1} = 6X_n - 2(X_0 + X_1 + \dots + X_n)$$

$$X_n = 6X_{n-1} - 2(X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1})$$

$$X_{n+1} - X_n = 6X_n - 6X_{n-1} - 2X_n$$

→ ricorrente con dip. dai due termini precedenti

$\underline{10}$: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2+y \qquad P(x,y)$

$P(0,y)$: $f(f(y)) = [f(0)]^2+y \qquad \forall y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ iniettiva e $\underline{\text{suriettiva}}$

$\Rightarrow$ esiste un valore $a\in\mathbb{R}$ tale che $f(a)=0$

$P(a,y)$: $f(f(y)) = 0+y \quad \Rightarrow f(0)=0 \quad \Rightarrow f(f(y))=y \quad \forall y\in\mathbb{R}$

$P(x,0)$: $f(xf(x)) = [f(x)]^2$

$$f(\underbrace{xf(x)}_{z}+\underbrace{f(f(y))}_{y}) = f(\underbrace{xf(x)}_{z})+f(y)$$

È vero che $xf(x)$ può assumere tutti i valori reali?

$P(f(x),y)$: $f(f(x)x+f(y)) = [f(f(x))]^2+y$

$P(x,y)$: $f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2+y$

$$\Rightarrow [f(f(x))]^2 = [f(x)]^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

+ suriettività $\quad \Rightarrow [f(w)]^2 = w^2 \qquad \forall w\in\mathbb{R}$

(perché $f(y)=w$ assume tutti i valori reali)

$$f(w) = \pm w \qquad \forall w\in\mathbb{R}$$

- $f(w)=w \quad \forall w\in\mathbb{R}$
- $f(w)=-w \quad \forall w\in\mathbb{R}$
- $f(w) = \begin{cases} w & w\in[1,2] \\ -w & \text{altri} \end{cases}$
- $f(w) = \begin{cases} w & w\in\mathbb{Q} \\ -w & w\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

Dobbiamo trovare un modo di escludere che ci possano essere a t.c. $f(a)=a$, b t.c. $f(b)=-b$ contemporaneamente

Basta sostituire $P(a,b)$ e vedere cosa succede (TODO).