SENIOR 2022 - COMBINATORIA

Note Title 06/05/2021

TECNICHE DI CONTEGGIO

"Prodotto"

Esempio: contare coppie ordinate in n elementi.

Ho n modi di scegliere il primo elemento, $n-1$ modi di scegliere il secondo

Totale $n \cdot (n-1)$

Problema generale Abbiamo un insieme di oggetti X, vogliamo calcolare $|X|$. Vogliamo costruire una funzione $f: X \to Y$ tale che per ogni $y \in Y$ $|f^{-1}(y)| = k$

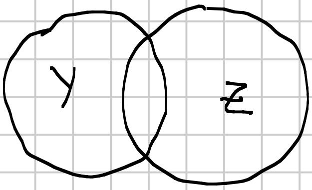
$$\begin{array}{cccc} & \text{coppie di } A & & A \\ f: & (x,y) & \longrightarrow & x \end{array}$$

Allora $|X| = \underset{n-1}{\underset{\uparrow}{k}} \cdot \underset{n}{\underset{\uparrow}{|Y|}}$

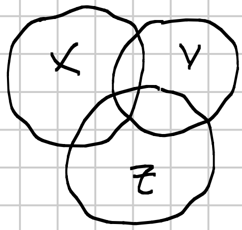
"Somma"

Supponiamo di volere contare $|X|$, ma $X = Y \sqcup Z$ allora $|X| = |Y| + |Z|$

Principio di inclusione-esclusione



$|Y \cup Z| = |Y| + |Z| - |Y \cap Z|$



$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |Z \cap X| + |X \cap Y \cap Z|$

Esempio: vogliamo contare le permutazioni di 4 elementi senza punti fissi.

Noi sappiamo contare le permutazioni che fissano un elemento specifico

Quindi

1. E' più comodo contare quelle che hanno un punto fisso (misterioso)

2 Se chiamo X_i l'insieme delle permutazioni che fissano i, vogliamo calcolare

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 4 \cdot |\underbrace{X_1}_{3!}| - \binom{4}{2}|\underbrace{X_1 \cap X_2}_{2!}| + \binom{4}{3}|X_1 \cap X_2 \cap X_3| - \binom{4}{4} \cap X_i$$

$$= 4 \cdot 3! - 6 \cdot 2! + 4 \cdot 1! - 1 = \text{un numero}$$

Il risultato sarà 24 - un numero.

"Cambiare punto di vista"

Se ho una bigezione tra X e Y, allora $|X| = |Y|$

Esempio: cammini monotoni

Abbiamo una griglia $\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1 \dots m\}$

Vogliamo contare i percorsi da $(0,0)$ a (m,n) che vanno solo verso dx o verso l'alto

Idea: ogni cammino lo posso identificare con una sequenza di indicazioni: verso l'alto (U) o verso destra (R)

I cammini sono in bigezione con le sequenze di lettere U e R devo avere n "U" e m "R": sono $\binom{n+m}{n}$

"Ricorsione"

A volte scomporre il problema lo riduce in pezzi più piccoli.

Esempio: contare le stringhe di n lettere "A" e "B" senza "B" consecutive.

Quindi: distinguiamo le stringhe che finiscono in A e quelle che finiscono in B.

Stringhe di n elementi che finiscono in A $\cong$ stringhe di $n-1$ elementi

Stringhe che finiscono in B $\cong$ stringhe di $n-2$ elementi

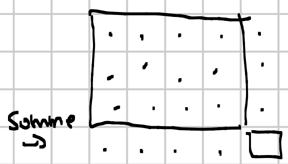
Chiamo $F(n)$ quello che devo contare

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$F(0) = 1$
$F(1) = 2$
$F(2) = 3$

DOUBLE COUNTING

Avete una tabella in cui sono scritti dei numeri, chiamo R_i la somma della riga i, C_j la somma della colonna j.



$$\sum_i R_i = \sum_j C_j$$

A un party abbiamo $12k$ persone, ognuno stringe la mano a $3k+6$

$\exists N$: per ogni coppia, esattamente N stringono la mano a entrambi. Trovare k.

Conta X (coppia, terza persona che stringe la mano a entrambi)

Modo 1: guardo la coppia.

$X \to$ coppie di persone ← sono $\binom{12k}{2}$

la controimmagine è grossa N

$|X| = N \cdot \binom{12k}{2}$

$X \to$ persone ← $12k$

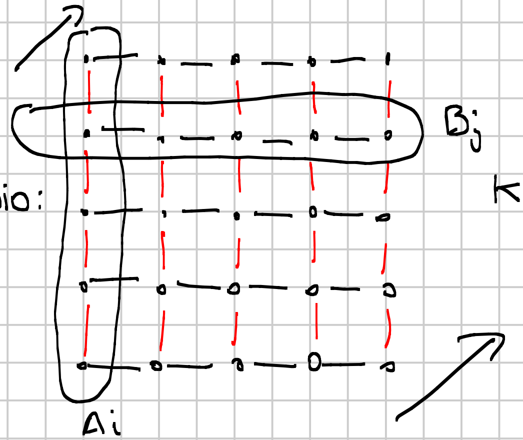
la controimmagine è grossa $\binom{3k+6}{2}$

$|X| = 12k \binom{3k+6}{2}$

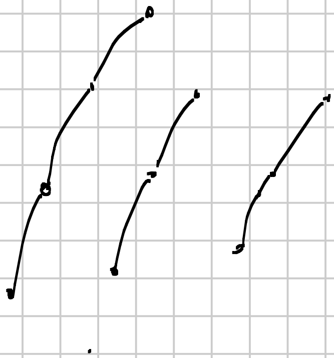
IMO 2020/4

Abbiamo n^2 stazioni sulla montagna, ad altezze diverse, e due compagnie di seggiovisti A, B. Ogni compagnia serve alcune tratte (dal basso verso l'alto) in modo tale che una compagnia abbia al più una linea uscente da ogni stazione e al più una entrante. Inoltre due linee della compagnia non sono "contenute" cioè chi parte in alto finisce in alto. Le tratte servite sono k.
Qual è il minimo k per cui sicuramente due stazioni sono collegate (eventualmente con cambi) da entrambe?

Esempio:



$k > n(n-1)$



Ora bisogna mostrare che se $k > n(n-1)$ allora c'è la coppia

Se ho k tratte, ho $n^2 - k$ componenti connesse (cioè insiemi di stazioni collegate da una stessa compagnia)

Vogliamo che intersezione tra una componente A e una componente B abbia al più un elemento (per assurdo)

Scrivo meglio: supponiamo che $k > n(n-1)$ e per assurdo di avere un esempio in cui non ho coppie super collegate.

Allora $|A_i \cap B_j| \le 1$

Se ho ho un elemento $x \mapsto (i, j)$

$S \longrightarrow \{1, \dots, c\} \times \{1, \dots, c\}$ $\quad c = n^2 - k \Rightarrow c < n$

S ← n^2 $\quad$ ← n^2

Oss. sul double counting.

In generale non sarà vero che le controimmagini avranno tutte la stessa cardinalità

A volte capita che contando in un modo, gli elementi dello stesso tipo siano "pochi", e contando in un altro siano "tanti". Così ottenete una disuguaglianza

$$|Y| C_y \leq |X| \leq |Z| C_z$$

$C_y \leq f^{-1}(y)$ $\qquad$ $C_z \geq f^{-1}(z)$

Esercizi: dimostrare le seguenti identità

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

Conto i modi di scegliere k elementi (blu) su n, + un elemento speciale (rosso) al di fuori di quei k.

Double counting: prima i blu $\binom{n}{k} \cdot (n-k)$

prima il rosso $n \cdot \binom{n-1}{k}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

$\boxed{119, 122, 121, 123, 124}$

- $\sum_{\substack{k=0 \\ \text{pari}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{dispari}}}^{n} \binom{n}{k}$

- Nella regione di Matelandia ci sono 20 città. Ci sono 18 aerei, ciascuno collega cinque città in modo consecutivo

Da ogni città passano almeno 3 aerei, e ogni coppia è collegata da al più un aereo. Dimostrare che si può andare ovunque

- Ci sono 72 stagisti. Al T1 ognuno risolve almeno 1 esercizio:

$\exists P$ sottoinsieme non vuoto di problemi risolto da un numero pari di persone.

- X un insieme, $Y = P(X)$

$$\sum_{(A,B)\in Y^2} |A \cup B|, \quad \sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|, \quad \sum_{A,B,C} |A \cap B \cup C^c|, \quad \sum_{A,B,C} |A \cap B \cap C|^2$$

119. $\sum_{A,B\subseteq X} |A\cup B|$

$\|$

$\|$

Esempio base : $\sum_{A\subseteq X} |A| = \left|\left\{ (x,A) : x\in X, A\subseteq X, x\in A \right\}\right|$

$= \sum_{x\in X} \left|\left\{ A : x\in A \right\}\right|$

$= \sum_{x\in X} 2^{n-1} = n2^{n-1}$

$$\left|\left\{ (x,A,B) : x\in A\cup B \right\}\right| = n\cdot \left|\left\{ A,B : x\in A\cup B \right\}\right| = n\cdot 4^{n-1}\cdot 3$$

$$\sum_{A,B,C} |A\cap B\cap C|^2 = \left|\left\{ x,y,A,B,C : \{x,y\}\subseteq A\cap B\cap C \right\}\right|$$

$\|$

Se sono uguali $\quad n\cdot 2^{3(n-1)}$

Se sono diversi $\quad n(n-1)\cdot 2^{3(n-2)}$

$|X| = n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = | x,y,A : x,y\in A | = \sum_{k=0}^{n} | x,y,A : x,y\in A, |A|=k |$$

$$= \sum \binom{n}{k}\cdot k^2$$

$=$ vedi sopra, $\quad n\cdot 2^{(n-1)} + (n-1)n\cdot 2^{(n-2)} = (n^2+n)\,2^{n-2}$

Grafo con 20 vertici, 18 pentagoni. Per ogni vertice passano almeno 3 pentagoni.

Volete dimostrare che è connesso

Abbiamo 90 archi, ogni vertice ha grado ≥ 6 pari

- 13 − 7 : ho 7 città, per ogni città passano 3 compagni
  $\#$ compagnie $= \frac{7\cdot 3}{5} = 4{,}2$ compagnie
- 12 - 8 : Come sopra $\frac{8\cdot 3}{5} = 4{,}8$ compagnie
- 10 − 10 : problema di parità + condizione sharp sul numero di archi
- 11 − 9 : ho 90 archi aerei, 91 archi possibili. Ma l'arco che levo mi manda a farfalle la parità.

72 stagisti, ognuno risolve ≥ 1 problema $\Rightarrow \exists P$ sottoinsieme di problemi risolto da un numero pari di stagisti

$$|(P, s) : s \text{ risolve } P| = \sum_{s \in S} 2^{\text{nobo positiva}} \rightarrow \text{pari}$$

$$= \sum_{P \subseteq Q} s(P) \rightarrow \text{pari}$$

$2^{|Q|}$

se $P = \emptyset$, $s(P) = 72$, altrimenti è dispari $\lightning$