SENIOR 2022 - COMBINATORIA 2

Note Title 08/05/2021

GIOCHI

Def. Un gioco sequenziale è un gioco in cui si alternano a muovere un po' di giocatori (quasi sempre sono 1 o 2)

Alla fine del gioco, ogni giocatore riceve un punteggio, chiamata anche utilità

Es. gli scacchi

Def. Un gioco si dice a informazione perfetta se ogni giocatore è a conoscenza di tutto quello che è già successo

Def. Un gioco è a somma zero se la somma dei punteggi ottenuti è sempre zero

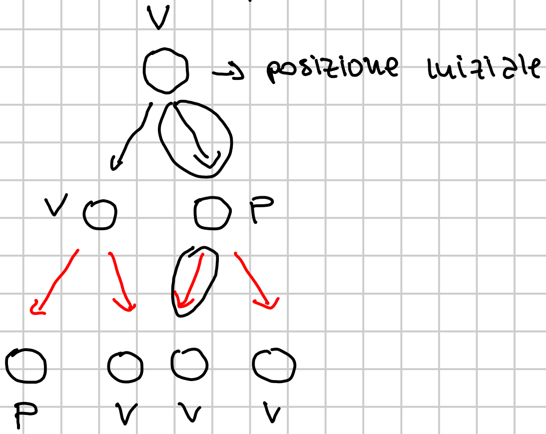
Non esempio: il dilemma del prigioniero

C'i sono due prigionieri, incolpati di un qualche reato, vengono interrogati separatamente.

- se non confessano, fanno 1 anno di carcere a testa
- → se confessano, ne fanno 10 a testa
- se confessa solo uno, quello che ha confessato viene liberato, e l'altro fa millemila anni di carcere.

Non è a informazione perfetta e soprattutto non è a somma zero

A noi interessano i giochi a inform. perf e a somma zero



Una strategia per un giocatore è "decidere quale mossa fare in ogni posizione"

S è una strategia vincente se per ogni strategia S' dell'avversario il gioco termina con la vittoria del giocatore.

$\exists$ mossa di A $\forall$ mossa di B $\exists$ mossa di A ,,, tale che A vince.

Teorema (Zermelo) $\exists$ una strategia vincente per uno dei due giocatori.

Risolvere un gioco sequenziale significa assegnare a ogni posizione un etichetta V o P in modo che

- Da ogni V esiste una mossa che porta a P
- Da ogni P ogni mossa porta a V.

(stiamo supponendo che il gioco sia finito)

Idea per etichettare: andare a ritroso

Problema: pila di monete, tolgo 2 o 5. Chi non può muovere perde

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	P	V	V	P	V	V	P	P	V	V	P

L'idea qua è che stiamo accoppiando le mosse.

Nei giochi in cui chi non può muovere perde spesso le posizioni simmetriche sono perdenti, perché l'altro può copiare la mossa e riportarsi in una situazione simm.

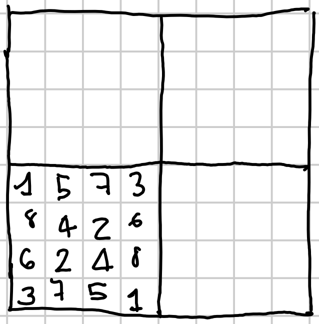
Problema: due pile di monete, posso togliere un po' di monete da una pila perde chi rimane senza.

Dimostrazione: metto P se ho lo stesso numero di monete, e V se ne ho un numero diverso
Dimostro che se parto da P finisco in V e da V esiste un modo per arrivare a P.

IMO 2018/4

Griglia 20×20, Alessandra piazza pietre rosse non a distanza $\sqrt{5}$, Bobo piazza pietre blu come gli pare. Alessandra vuole mettere più pietre rosse possibile.

$\exists$ K tale che
- $\exists$ strategia di A $\forall$ strategia di B: A mette $\geq$ K pietre
- $\exists$ strategia di B $\forall$ strategia di A: A mette $\leq$ K pietre.



Claim: Alessandra mette pietre su 1/4 delle caselle.

→ Alessandra mette al più 1/4 di pietre

Idea: colorazione a scacchiera: Alessandra mette solo pietre sulle caselle bianche anche Bobo cercherà di coprire le bianche, ma Alessandra sicuramente occupa metà delle bianche -> 1/4 del totale

Quando abbiamo un gioco (spesso a un giocatore), spesso ci chiediamo

- Se il gioco prima o poi termina
- Se una certa configurazione è raggiungibile.

IN(MONO)VARIANTI

Un invariante è un qualcosa di associato a una posizione che cambia in modo controllato. Spesso sono di 2 tipi

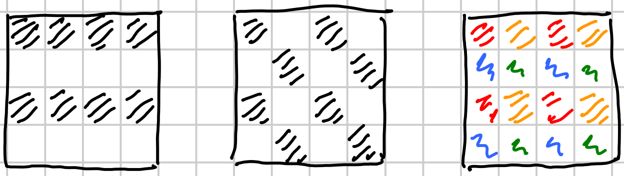
- Quantitativi
- Spaziali (tipo colorazioni).

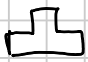
Esempio: se voi avete un cavallo degli scacchi, a ogni mossa cambia colore.

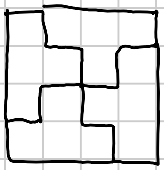
Per quanto riguarda la finitezza del gioco spesso è utile trovare una quantità $\boxed{\text{intera}}$ positiva (o nulla) che decresce sempre.

Esempio del paradosso del campo da calcio

Esempi di colorazioni



Quadrato $n \times n$, posso tassellarlo con  ?

 $\rightarrow$ $4 \mid n$ ok

n dispari? no perché $4 \nmid n^2$

$n \equiv 2 \ (4)$? No, colorazione a scacchiera, ogni tetramino occupa 3 caselle di un tipo e una di un altro

A ogni mossa la # caselle nere − caselle bianche cambia di 2

Quindi dopo un # dispari di mosse $\left(\frac{n^2}{4}\right)$ non è multipla di 4 $\Rightarrow$ non è 0.

IMO 2022/1

Abbiamo $2n$ pietre, n bianche e n nere. Sia k fissato

A ogni mossa prendo il blocco di pietre monocromatico che contiene la k-esima e lo sposto all'inizio. Il gioco finisce quando le nere sono separate dalle bianche.

Per quali n, k il gioco finisce per ogni configurazione iniziale?

Se non finisce, la sequenza di mosse diventa periodica perché ho un numero finito di stati.

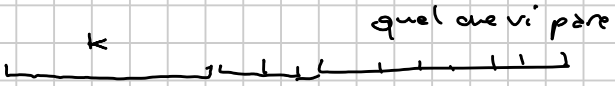
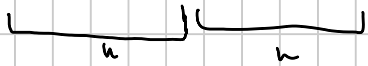
Idea: guardo il numero di blocchi $= M$: non aumenta mai.

- o arriviamo a 2
- o è definitivamente costante

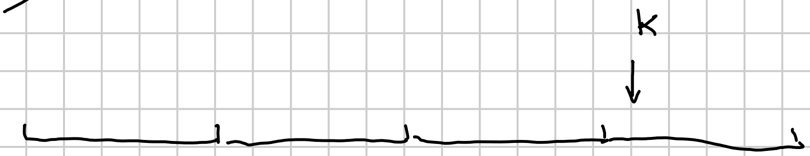
L'unico modo per cui il gioco non finisce è se a un certo punto M smette di decrescere.

Rimane uguale se
- muovo il blocco iniziale
- muovo il blocco finale per sempre e ho # blocchi pari

(Perché se $k \leq n$, allora posso al più muovere il blocco iniziale, e se $k \geq n+1$ quello finale).

- $k \leq n$.
  - Se $k < n$ 
  - Se $k = n$ l'unico caso stazionario è 
- $k \geq n+1$
  Se è stazionario, devo avere $2m$ blocchi di lunghezza almeno $2n-k+1$

$\frac{2n}{4}$? esercizio



↑ state attenti se n dispari

$$(2n-k+1)\cdot 4 \leq 2n$$

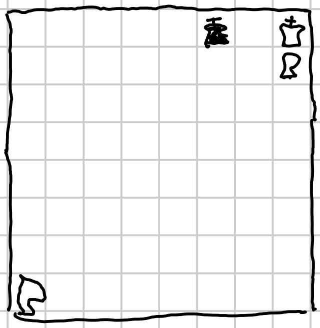
$$6n+4 \leq 4k$$

$$3n+2 \leq 2k$$

$$k \geq \frac{3n+2}{2}$$

ESERCIZI $\boxed{125, 126, 127, 129, 130, 131, 133, 134, 139, 140}$

$\boxed{\text{Il problema 126 chiede un cammino chiuso}}$



Il bianco vince?
per ogni posizione del cavallo

131) n-agono, i monete sull'i-esimo vertice. Mossa è

In quali vertici è possibile spostarle tutte

Idea: $\sum_{m \in M} i_m \pmod n$ dove i_m è l'indice della casella su cui sta la moneta

Se l'invariante cambia tra posizione iniziale e finale, siamo fregati

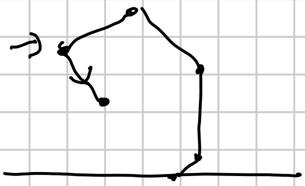
Altrimenti, siamo a posto?

Idea: la posizione iniziale fa schifo. Costruire una strategia esplicita è difficile

costruiamo la strategia in modo implicito: diamo un algoritmo generale

Algoritmo greedy:

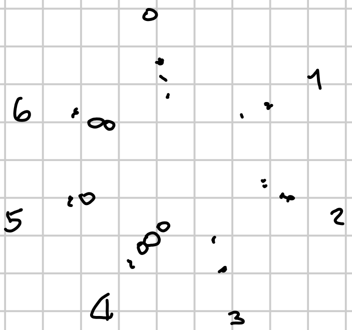
Scelgo una moneta e la uso per muovere le altre.



Metto a posto una moneta alla volta usando Sol quella da parte come contrappeso

Le metto a posto tutte tranne una. Dov'è quella rimanente? Guarda l'invariante!

Se l'invariante era uguale, dato che ho raggiunto la posizione finale tranne per al più una moneta, l'uguaglianza dell'invariante garantisce che anche lei sia a posto



Ho un po' di monete: so che la somma è multipla di $n=7$

Le sposto tutte sullo 0 tranne una: ma deve essere su 0 perché la somma sia multipla di n.

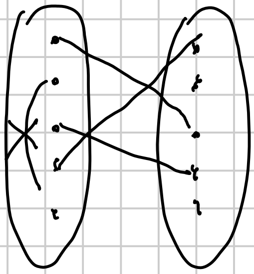
140 6x6 tassellato con 2x1. Dimostrare che si può tagliare in due rettangoli senza tagliare nessuna tessera.

Idea: se lo divido in due, sto tagliando almeno due tessere! Per parità

Ho 10 tagli possibili, ma ogni taglio taglia tessere diverse => ho almeno 20 tessere assurdo

126. Coloro a scacchiera: un cammino alterna bianche e nere => un ciclo ha per forza lunghezza pari => non ho cammini chiusi

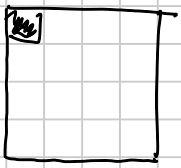
Cioè: il grafo in cui le caselle sono i vertici i lati collegano due caselle a salto di cavallo, è bipartito



Lemma: un grafo è bipartito se e solo se i cammini chiusi (cicli) hanno tutti lunghezza pari

134) Scacchiera 8×8 colorata a scacchiera: potete

- Invertire una riga
- Invertire una colonna
- ✓ un quadrato 2×2



?

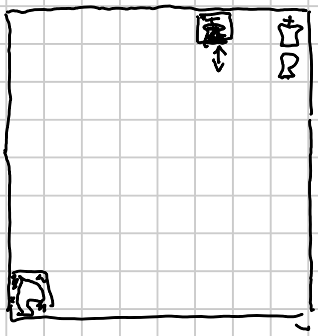
Quando inverto un numero pari di caselle la differenza tra bianche e nere cambia di 4K

Parto da 0, arrivo a 62 → non ce la faccio

Finiamo con il problema di scacchi

Idea: ho un invariante che

tratto + colore su cui sta il cavallo
+ colore del Re nero



Il bianco vince?
per ogni posizione del cavallo

Se tocca il bianco e re e cavallo sono sullo stesso colore, allora a ogni mossa del Bianco sono sullo stesso colore e a quella del Nero sono su colori opposti.

L'unico modo per vincere è se quando tocca al Nero il Cavallo controlla la casella in cui vuole andare, e per farlo il Cavallo deve stare su una casella dello stesso colore del Re (con mossa al Nero)

La posizione con mossa al Bianco è patta: oscilla tra f7 e f8 e l'invariante garantisce che la mossa è legale.