G2 BASIC – TRASFORMAZIONI DEL PIANO [Gallo]

Note Title 07/05/2021

→ ISOMETRIE

→ OMOTETIE

→ INVERSIONI CIRCOLARI

□ Def. Una TRASFORMAZIONE DEL PIANO

$$f: \text{Piano} \longrightarrow \text{Piano} \quad \text{bigettiva}$$

□ ISOMETRIA: è una tr. del piano che preserva le distanze

$$\overline{PQ} = \overline{f(Q)f(P)}$$

→ preserva gli angoli

→ parallelismi, tangenze

→ aree

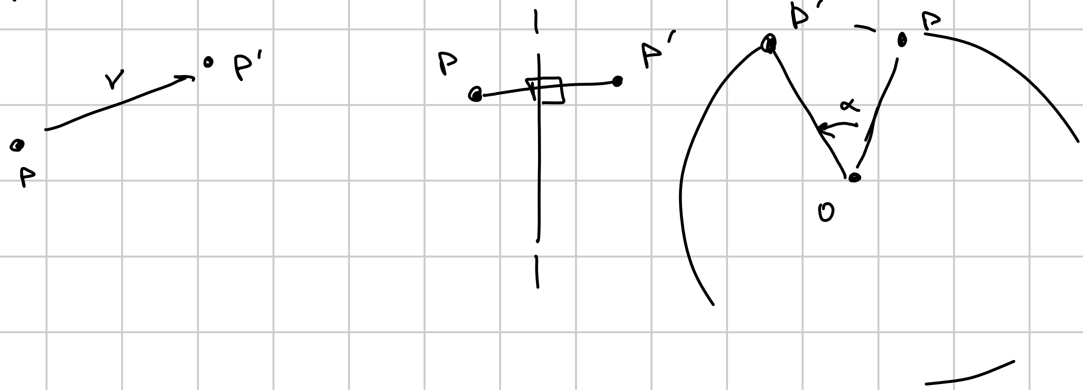
→ le forme

Ogni isometria è composizione di 3 isometrie "base"

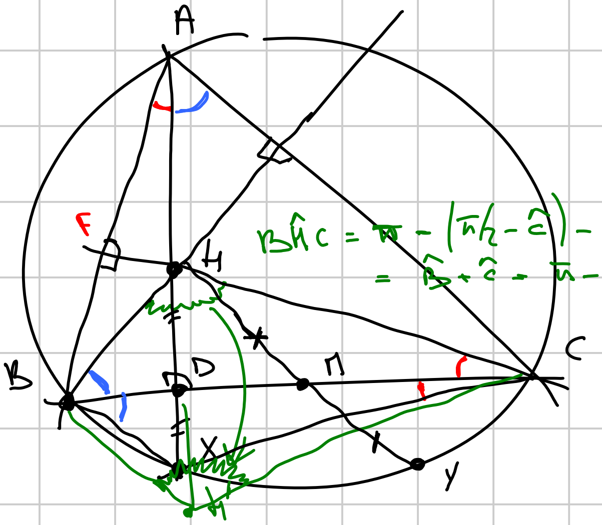
TRASLAZIONE per un vettore $\vec{v}$

SIMMETRIA per un asse

ROTAZIONI di centro O e angolo α



Fatto.



$B\hat{H}C = \pi - (\pi/2 - \hat{C}) - (\pi/2 - \hat{B})$
$= \hat{B} + \hat{C} = \pi - \hat{A}$

H ortocentro

th) $HD = DX$

anche Y simmetrico di H rispetto ad M sta sulla ⊙ABC

TH ⟺ H e X sono simmetrici rispetto a BC

$B\hat{C}H = \pi/2 - \hat{B} = B\hat{A}X = B\hat{C}X$

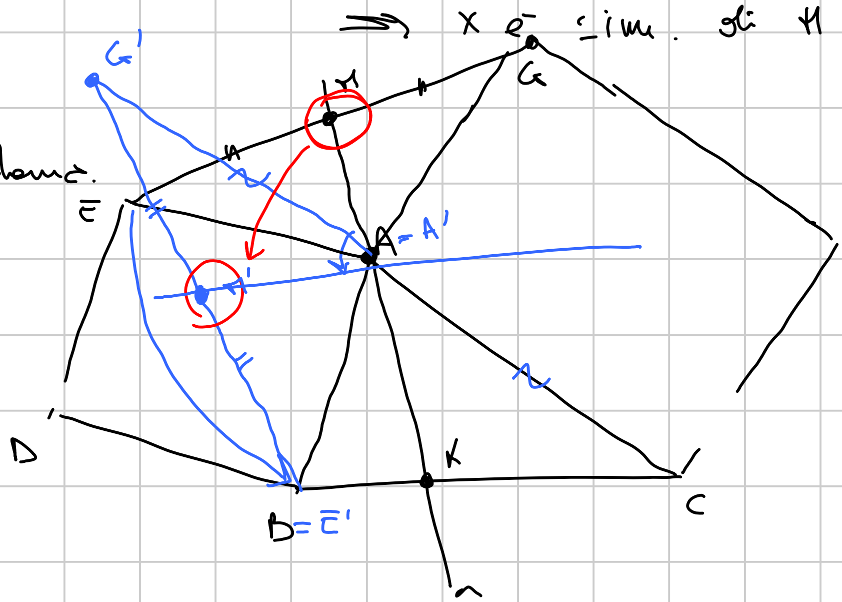
→ ANGOLI BLU

⟹ BX è simm. di BH (BC)

e CX è " " CH (BC)

⟹ X è sim. di H risp. BC

Problema.



$EM = MG$

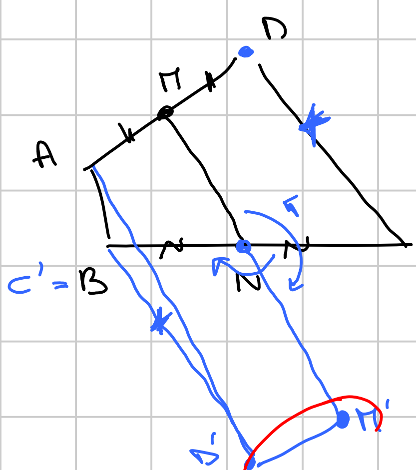
th) $AX \perp BC$

rotazione di centro $\hat{A}$ e angolo $\pi/2$

th ⟺ $AM' \parallel BC$

ma questo è vero per Talete su $\overset{\triangle}{BCG'}$

Problema.



$AM = MD$, $BN = NC$

$2MN = AB + CD$

Th) $AB \parallel CD$

Rotazione di centro N e di angolo π

$D'M' \parallel AM$ ⟹ $AD'M'M$ è parallelogramma

$\overline{AD'} = 2MN = AB + CD = AB + BD'$

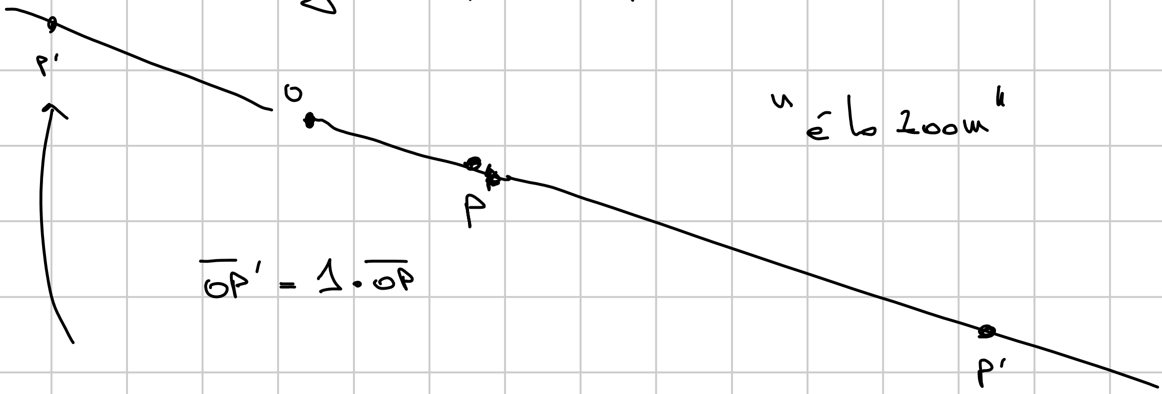
$\Longrightarrow$ per dis. triangolare ho che $B \in AD'$

$\Longrightarrow$ $AB \parallel MN \parallel CD$

OMOTETIA

di centro O e fattore λ (con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$)

"è lo zoom"



$\overline{OP'} = \lambda \cdot \overline{OP}$

• $\lambda < 0$:

→ manda le rette in rette

→ preserva gli angoli

→ manda crf in crf.

→ tangenze e i parallelismi

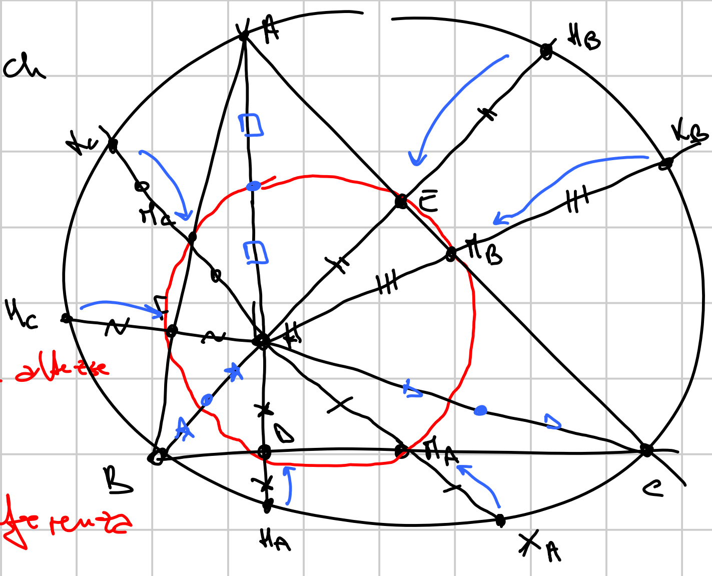
! NON PRESERVA: le lunghezze (vengono però scalate di λ)

le aree (loro di λ^2)

Fatto 2. CRF di Feuerbach

Faccio un'omotetia di centro H e raggio $1/2$

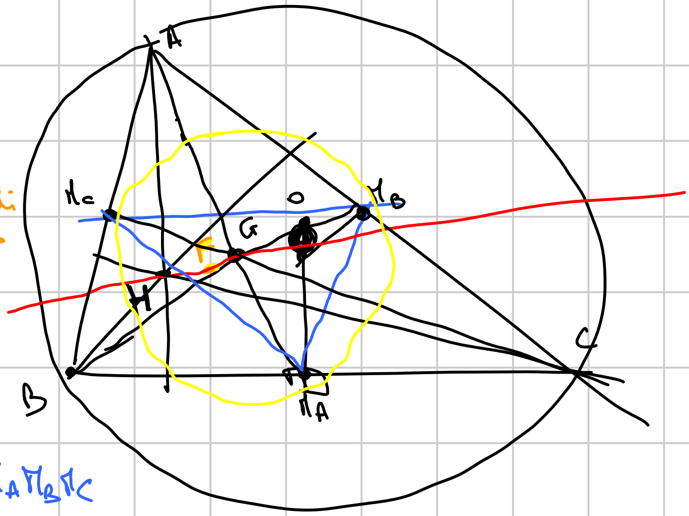
In ogni triangolo i piedi delle altezze e i punti medi dei lati giacciono su un'unica circonferenza



Fatto 3. Retta di Eulero

H, G, O sono allineati

(!) Anche F centro di Feuerbach è retta di Eulero



$M_A O \perp BC$ + $BC \parallel M_B M_C$

$\Longrightarrow M_A O \perp M_B M_C$

$M_A O$ è altezza

del triangolo mediale $\Delta M_A M_B M_C$

$\longrightarrow$ O è l'ortocentro del mediale

- Omotetia di centro G di fattore -2 $\qquad AG = 2\, GM_A$

$M_A \longrightarrow A$, $M_B \longrightarrow B$, $M_C \longrightarrow C$

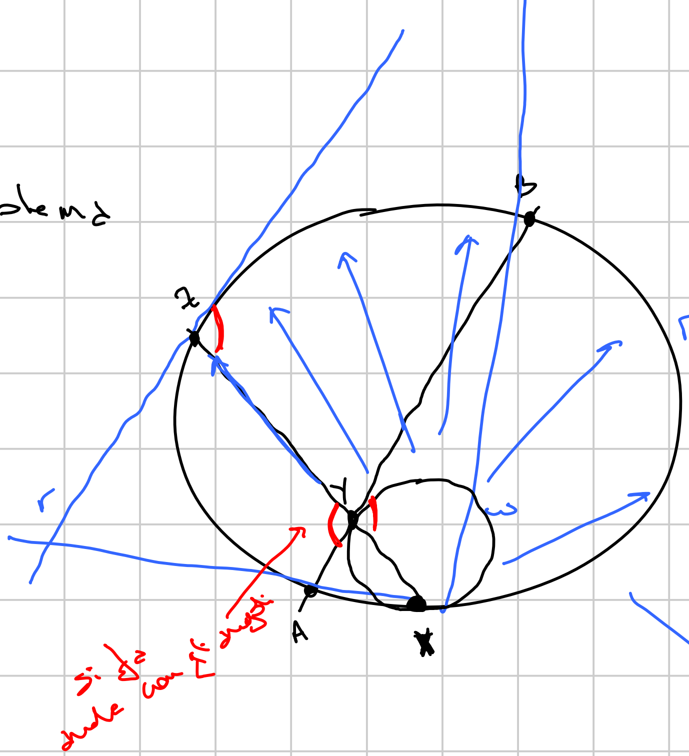
$\Delta M_A M_B M_C \Longrightarrow \Delta ABC$

centro dell'omotetia

$O \longrightarrow H$ $\quad \Longrightarrow$ O, H, G sono allineati!

$GH = 2\, OG$

Problema



th) Z è il punto medio dell'arco $\widehat{AB}$

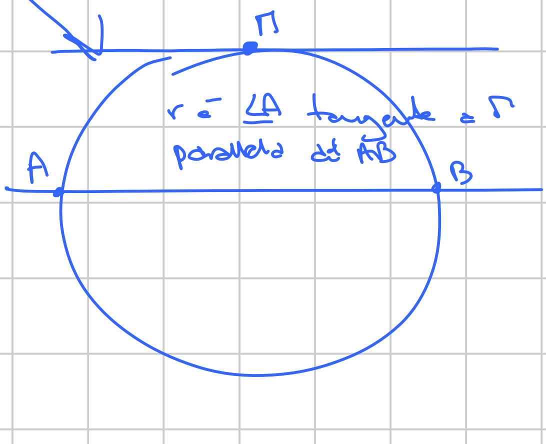
Omotetia di centro K

di raggio $\frac{KZ}{KY}$ $\quad \omega \longrightarrow \Gamma$

$Y \longrightarrow Z$

$\left(\lambda = \frac{XZ}{XY}\right)$ $\quad AB \longrightarrow$ retta per Z tangente a Γ

- la retta $r \parallel AB$ per Talete



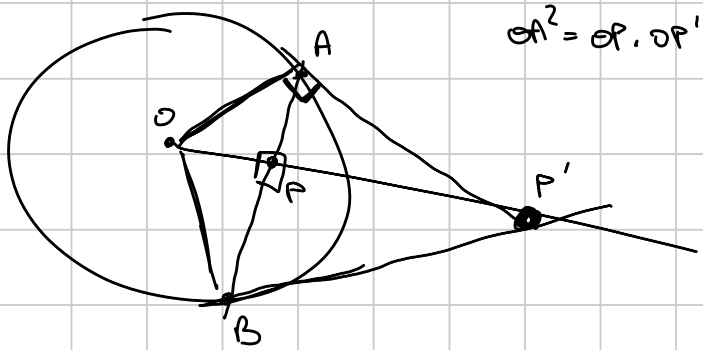
INVERSIONE CIRCOLARE

centro O e raggio R (con $R \in \mathbb{R}^+$)

t.c. $OP \cdot OP' = R^2$

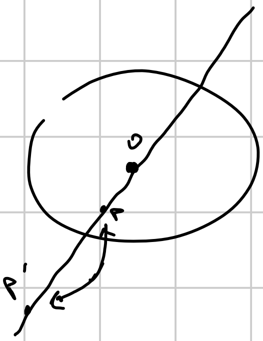
Come la costruisco:

$OA^2 = OP \cdot OP'$ per th. Euclide

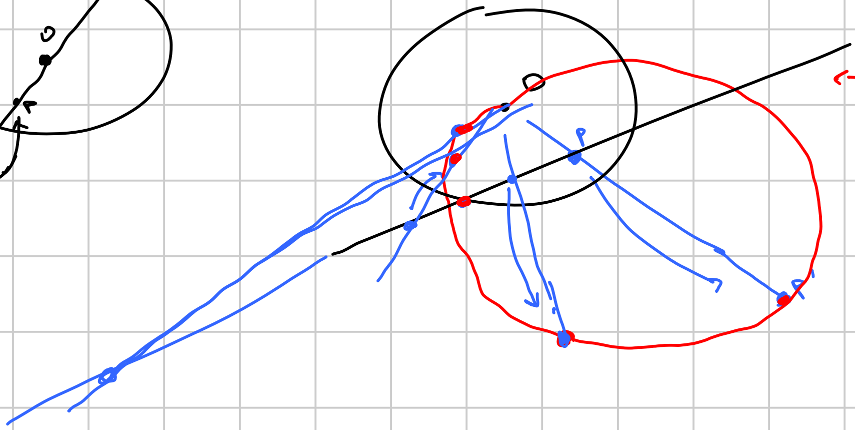


Osservazioni:

1. è un'involuzione (cioè $f \circ f = id$)
2. non preserva niente
3. le rette per l'origine
4. i pt. sulla crf di inv. sono fissati

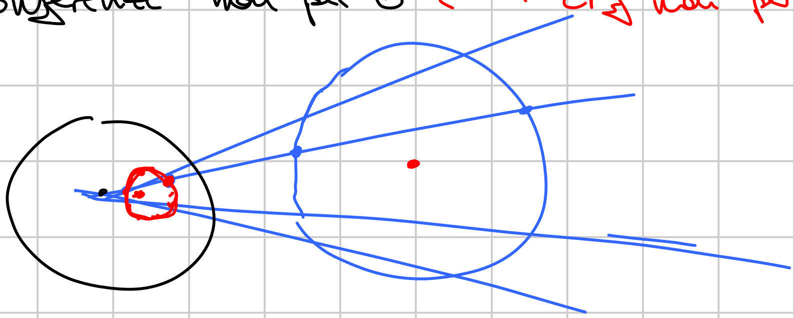


5. le rette non per O $\longleftrightarrow$ circonferenze per l'origine



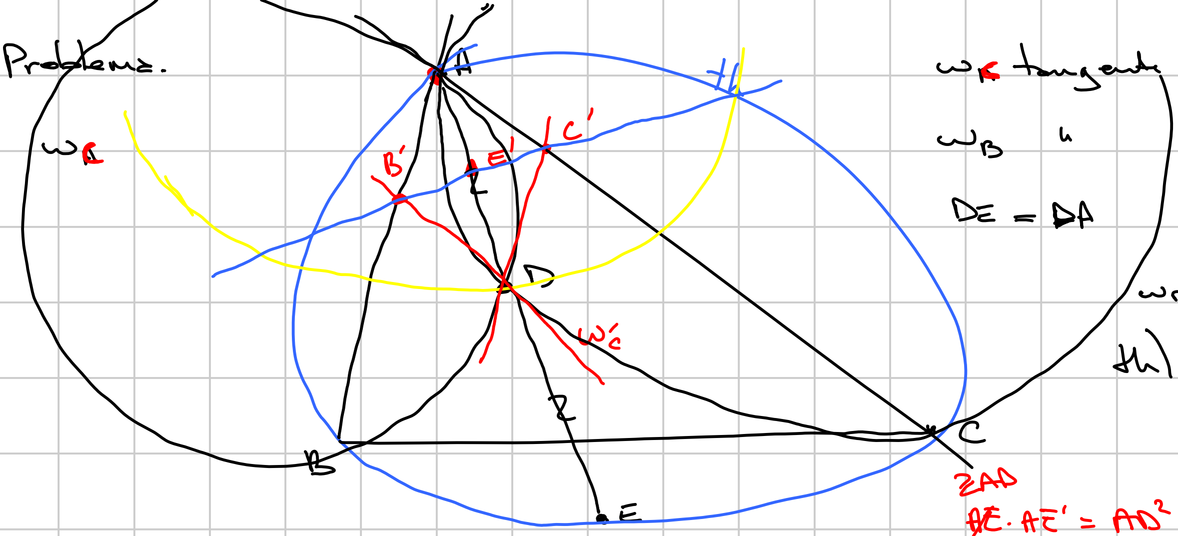
5. circonferenze non per O $\longleftrightarrow$ crf non per O

il centro NON va nel centro



6. non preserva le distanze
7. preserva le tangenze

Problema.



ω_A tangente ad AC in A

ω_B " " AB in A

$DE = DA$

th) $E \in \odot ABC$

2AD

$AE \cdot AE' = AD^2$

$AE' = \frac{1}{2} AD$

• inverto in A di raggio AD

$D \longleftrightarrow D$

$\odot ABC \longleftrightarrow$ retta $B'C'$

$\omega_C \longleftrightarrow$ retta che passa per D, parallela ad AC

$\omega_B \longleftrightarrow$ retta per D, $\parallel$ AB

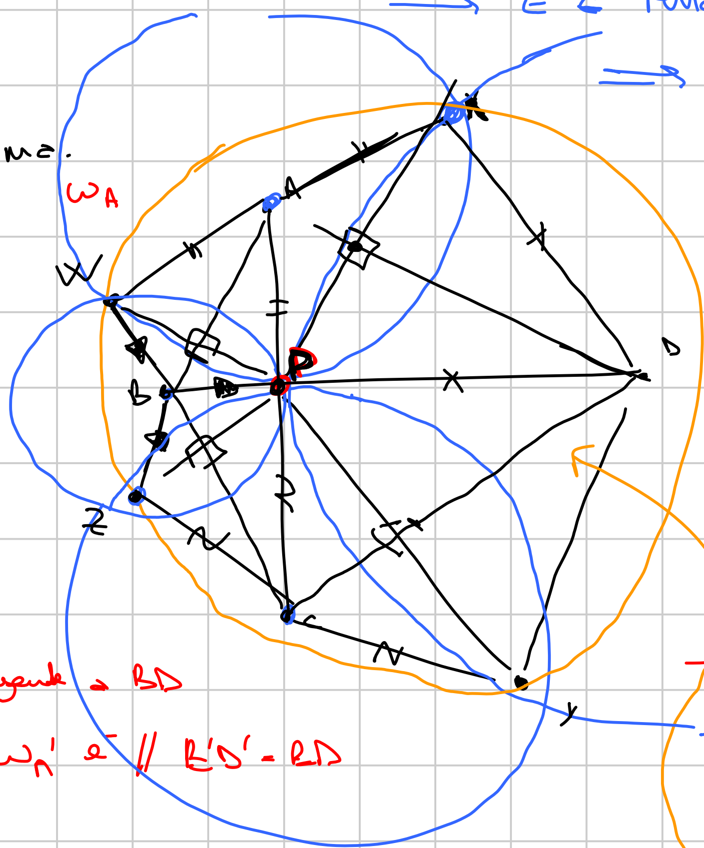
$E' \longleftrightarrow$ pt. medio di AD

$\Longrightarrow$ $AB'DC'$ è parallelogramma

$\longrightarrow$ $E' \in$ retta $B'C'$

$\Longrightarrow$ $E \in \odot ABC$

Problema.



X simm. di P risp. ad AD

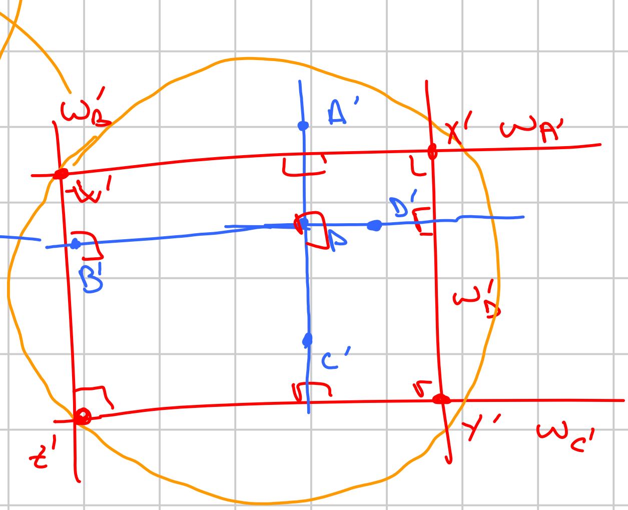
etc.

th) WXYZ è ciclico

ω_A è tangente a BD

$\Longrightarrow$ ω_A' è $\parallel$ $B'D' = BD$

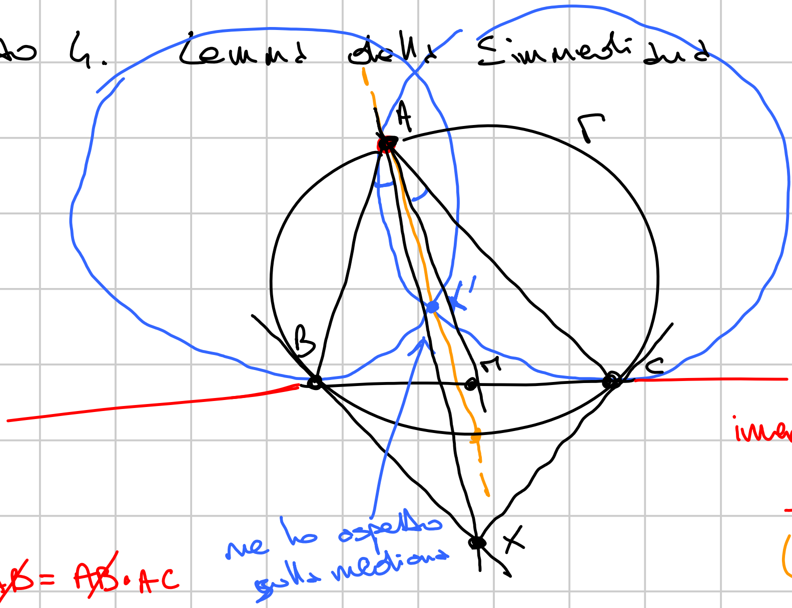
inverto in P di raggio R +



$\Longrightarrow$ $X'Y'Z'W'$ sono i vertici di un rettangolo

$P' \neq X$ però X è l'unico pt. di $M \cap r \cap \omega$

Fatto 4. Lemma della Simmediana



BX, CX tangenti a Γ

th) AX è simmediana di ABC

ovvero $B\hat{A}X = C\hat{A}M$

inversione di centro A e raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$

+ simmetria rispetto alla bisettrice ‖

(lei mi scambia la retta AB con la retta AC)

$AB' \cdot \cancel{AB} = \cancel{AB} \cdot AC$

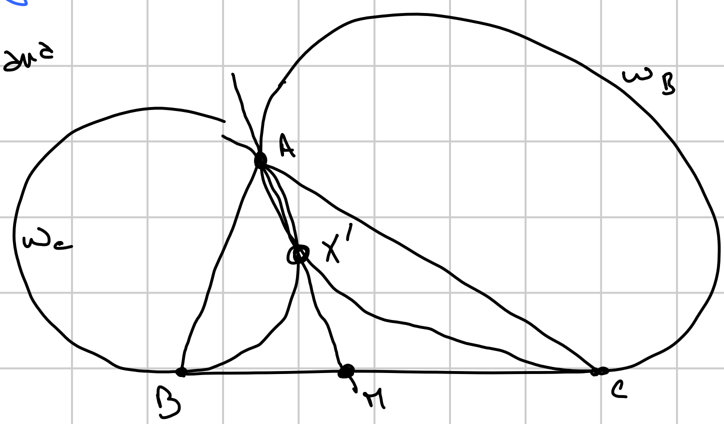
$B \longleftrightarrow C$

retta $BX \longleftrightarrow$ crf. tangente in C alla retta BC

$\odot ABC \longleftrightarrow$ retta BC

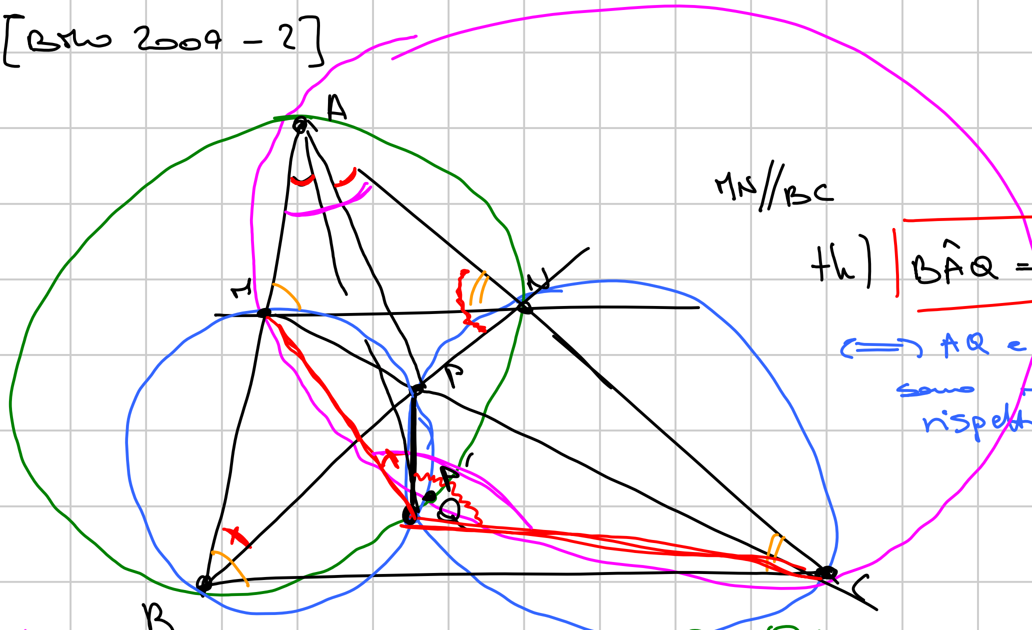
retta $CX \longleftrightarrow$ crf " " B " " BC

th $\iff$ AX' è mediana



$$Pot_{\omega_C}(M) = MB^2 = MX' \cdot MA$$
$$\|$$
$$Pot_{\omega_B}(M) = (MC)^2 = MX' \cdot MA \implies MB = MC$$

Problema [BMO 2009 - 2]



MN // BC

th) $\boxed{B\hat{A}Q = C\hat{A}P}$

$\Longleftrightarrow$ AQ e AP sono rette simm. rispetto alla bisettrice

$M\hat{Q}B = A\hat{B}N$

$C\hat{Q}'P = A\hat{N}P$

$M\hat{Q}C = \pi - \hat{A}$

$\Longrightarrow Q \in \odot AMC$

ANALOGAMENTE $Q \in \odot ABN$

INVERSIONE + SIMMETRIA

(in A di raggio $\sqrt{AC \cdot AM}$) (rispetto alla bisettrice in $\hat{A}$)

$AC' \cdot \cancel{AC} = \cancel{A}C \cdot AM$

$A\cancel{B} \cdot AB' = \dfrac{AC \cdot AM}{AB}$

per Talete o similitudine

$= \dfrac{AN}{AM} \cdot AM$

$M \longleftrightarrow C$

$B \longleftrightarrow N$

retta $MC \longleftrightarrow \odot AMC$

retta $BN \longleftrightarrow \odot BNA$

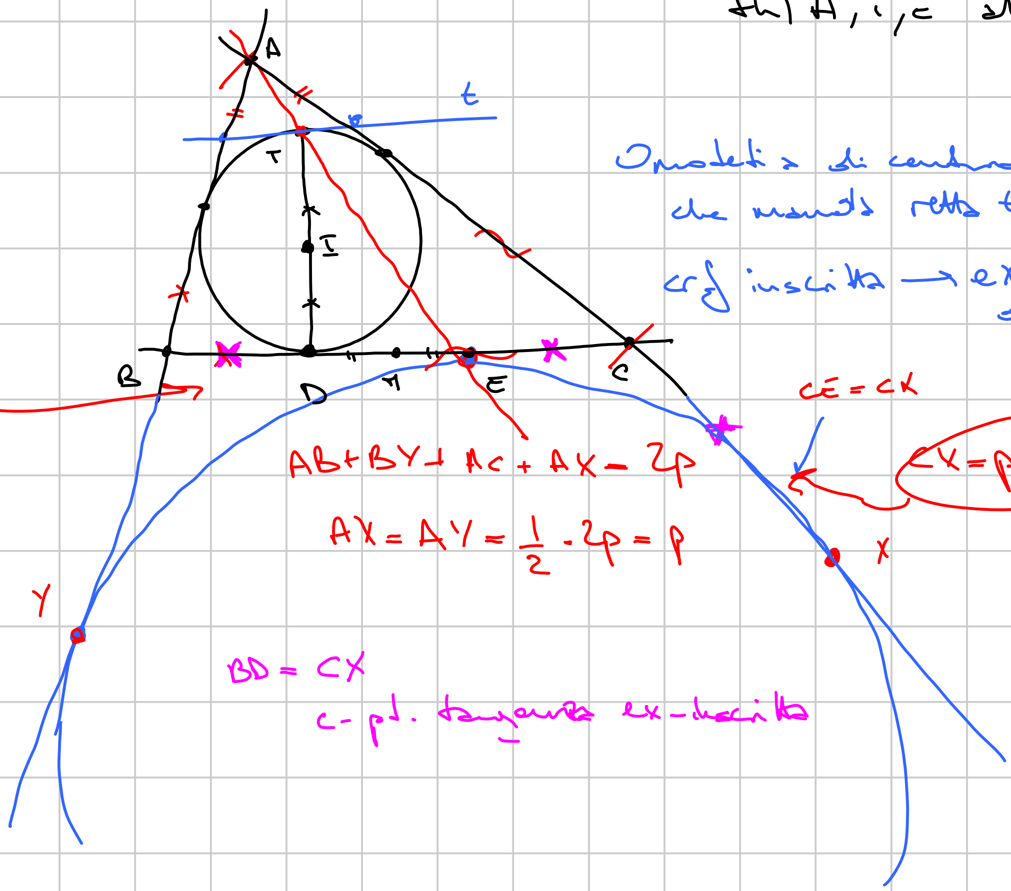
$\odot MBP \longleftrightarrow \odot CNP$??

$Q \longleftrightarrow P$

Hope ??

Problema 1.

Th) A, T, E allineati



Omotetia di centro A che manda retta $t \mapsto BC$

crf inscritta $\to$ ex-inscritta dal lato A

$BD = p - b$

$CE = CX$

$CX = p - b$

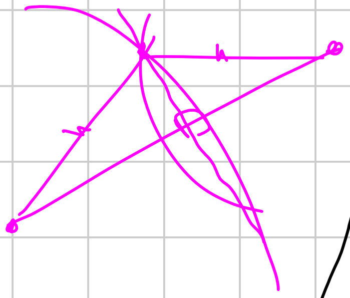
$AB + BY + AC + AX = 2p$

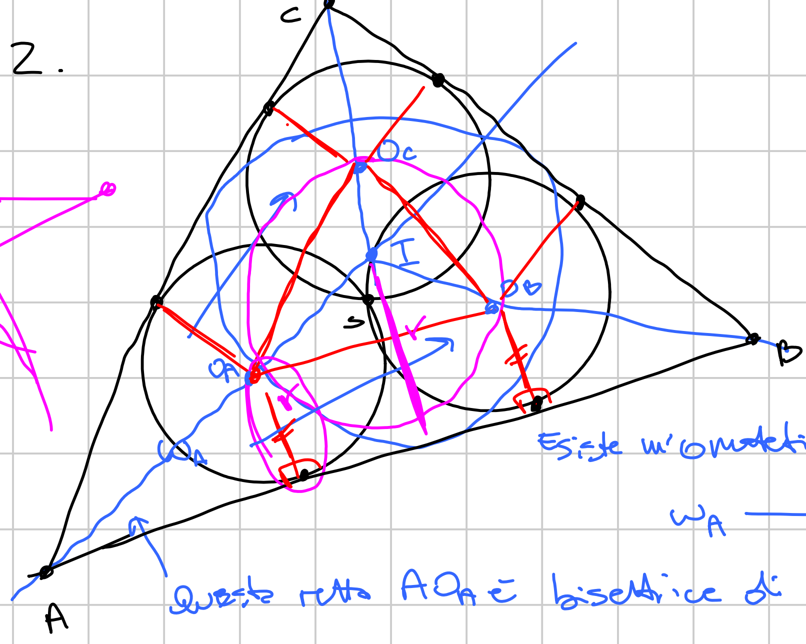
$AX = AY = \frac{1}{2} \cdot 2p = p$

$BD = CX$

c-pt. tangenza ex-inscritta

Problema 2.





th) O, S, I allineati

$\frac{IO_A}{IA}$ = r cirf piccola / r inscritta

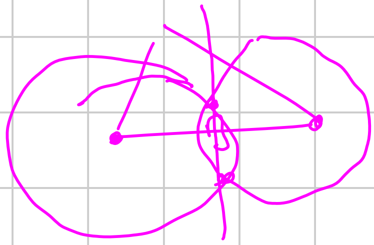
Esiste un'omotetia di centro A

$\omega_A \longrightarrow$ cirf inscritta

Questa retta AO_A è bisettrice di $\hat{A}$ e coincide

$O_AO_B \parallel AB$, $O_BO_C \parallel BC$, $O_CO_A \parallel CA$

$\rightarrow \Delta ABC \sim \Delta O_AO_BO_C$

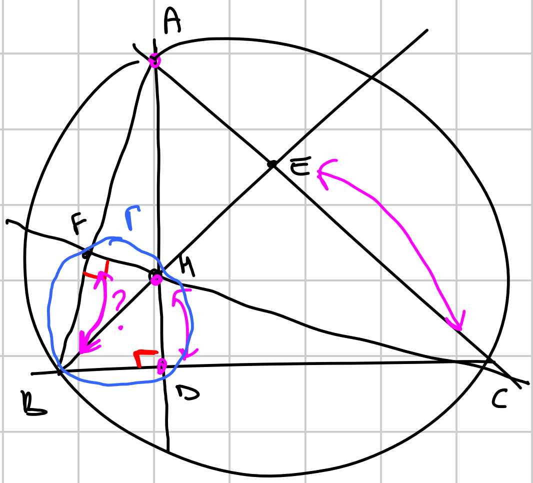


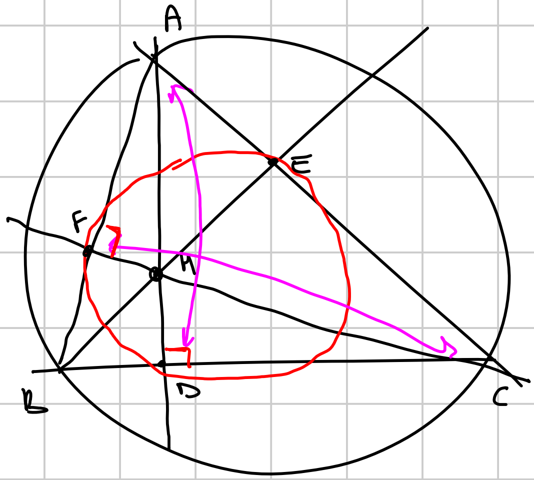
C'è un'omotetia di centro I: $\Delta O_AO_BO_C \longrightarrow \Delta ABC$

th) S centro cirf rossa

che è vero per costruzione!

Problema 3.





centro A raggio $\sqrt{AH \cdot AD}$

$AH' \cdot \cancel{AH} = \cancel{AH} \cdot AD$

$AF \cdot AB = Pow_\Gamma A = AH \cdot AD$

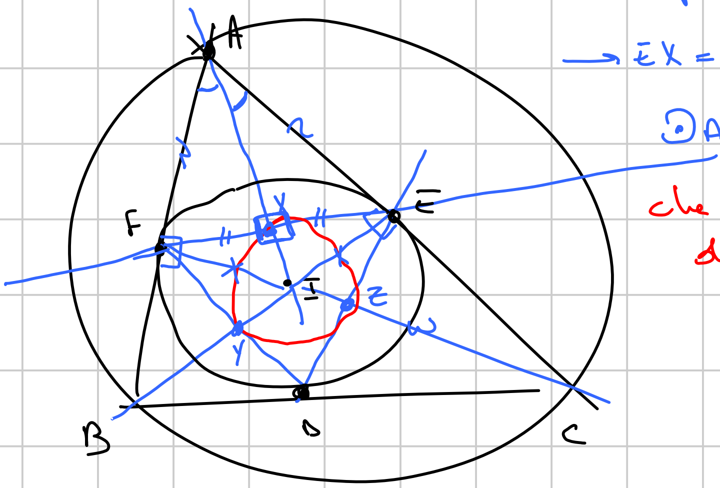
$AB' \cdot \cancel{AB} = AH \cdot AD \overset{\Downarrow}{=} AF \cdot \cancel{AB}$

centro H e raggio $\sqrt{HA \cdot HD}$

+ simmetria

$A \longleftrightarrow D$, $C \longleftrightarrow F$, $B \longleftrightarrow E$

$\odot ABC \longleftrightarrow$ Feuerbach ☺



inverso rispetto ω

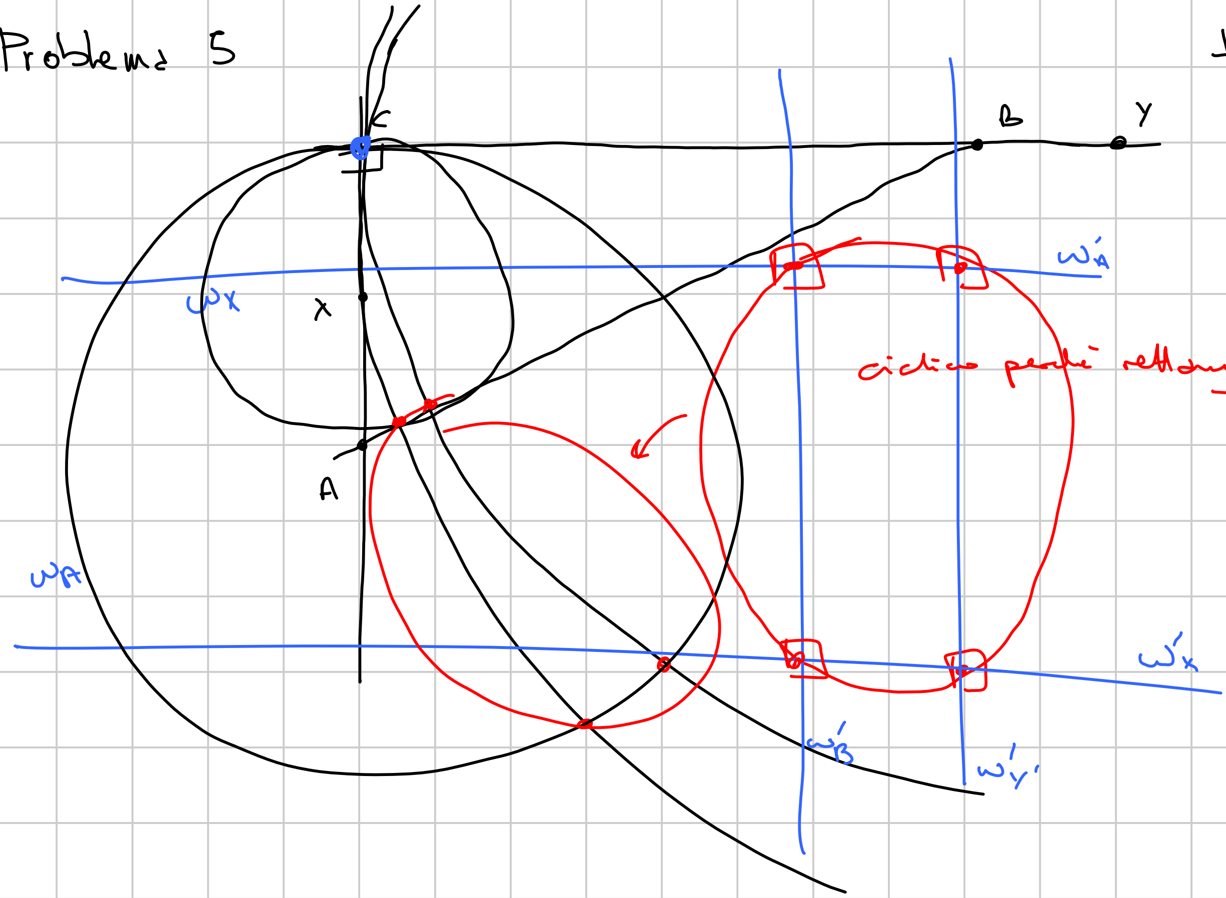
$\longrightarrow EX = XF$ per mille ragioni

$\odot ABC \longleftrightarrow \odot XYZ$

che è la Feuerbach di ΔDEF

Problema 5

th) pt. rossi conciclici

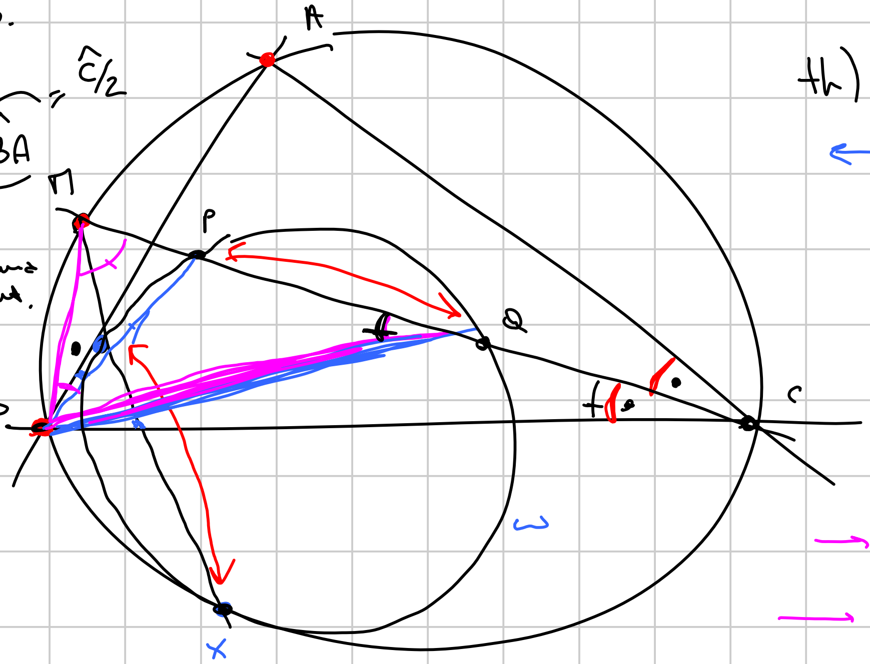


Problema 6.

$\hat{ABP} = \hat{MBP} - \overbrace{\hat{MBA}}^{= \hat{C}/2}$

$= \hat{MQB} - \hat{MCB}$

$= \hat{QBC}$ ↙ per somma angoli int.



th) $\hat{ABP} = \hat{QBC}$

⟷ simmetriche per bisettrice in $\hat{B}$

$MP \cdot MQ = MB^2$

$\frac{MP}{MB} = \frac{MB}{MQ}$

$\rightarrow \overset{\triangle}{MPB} \sim \overset{\triangle}{MBQ}$

$\rightarrow \hat{MBP} = \hat{MQB}$

Per problema della lezione xy incontra ⊙ABC in M dove M è il pt. medio di $\overset{\frown}{AB}$

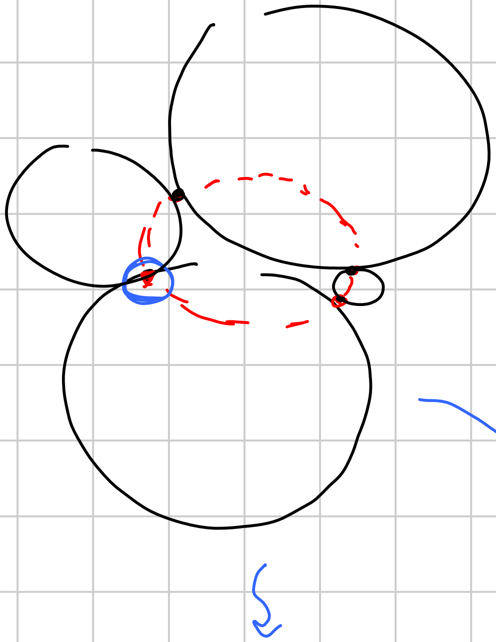
- Inversione in M di raggio $\sqrt{MP \cdot MQ} = \sqrt{MX \cdot MY} =$

circ ω ⟷ circ ω

retta AB ⟷ circ tangente a ω in X

⊙ABC ⟷ retta tangente a ω in Y

Problema 4.



inversione mi trasforma un problema di ciclicità in uno di allineamenti