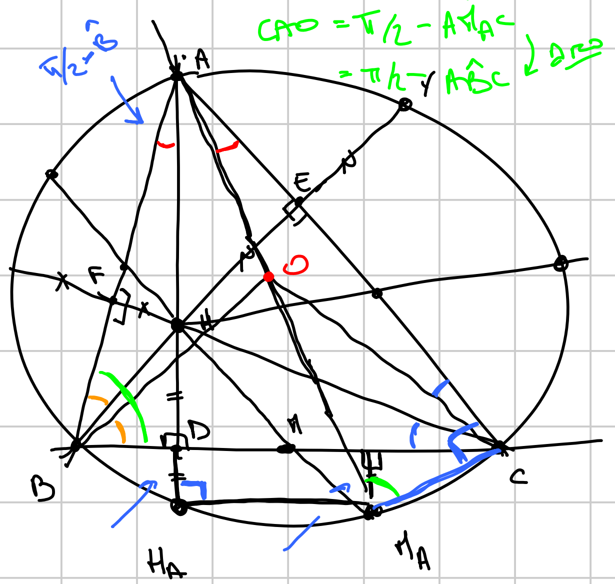
G3 BASIC – CONFIGURAZIONI [Gallo]

Note Title 09/05/2021

→ ORTOCENTRO/CIRCOCENTRO

→ INCENTRO/EXCENTRO

→ CIRCONFERENZE/ASSI RADICALI

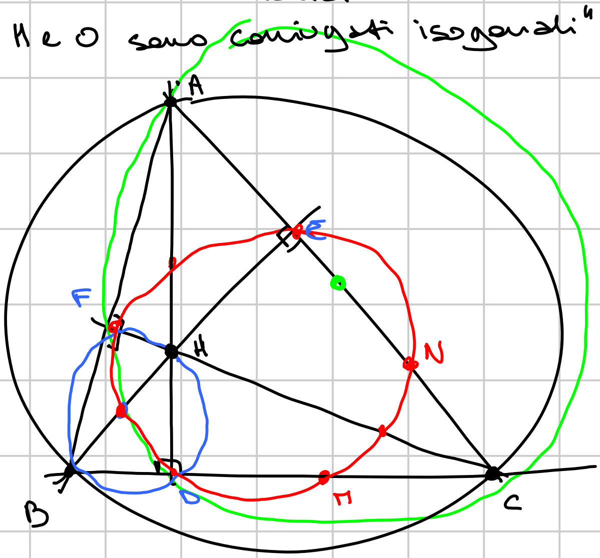


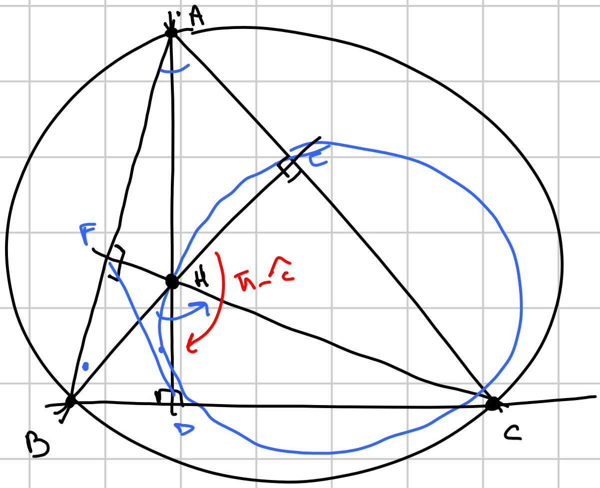
ORTOCENTRO - CIRCOCENTRO

- il simm. di H risp. ~~alla circoscritta~~ ai lati sta sulla circoscritta
- il simm. di H risp. ai pti medi dei lati
  " " "
- AM_A è un diametro
- $B\hat{A}H = C\hat{A}O$ e ciclici
  "H e O sono coniugati isogonali"

le ALTEZZE sono uguali quindi $H_AM_A \parallel BC$

Tracciare tutte le circonferenze →





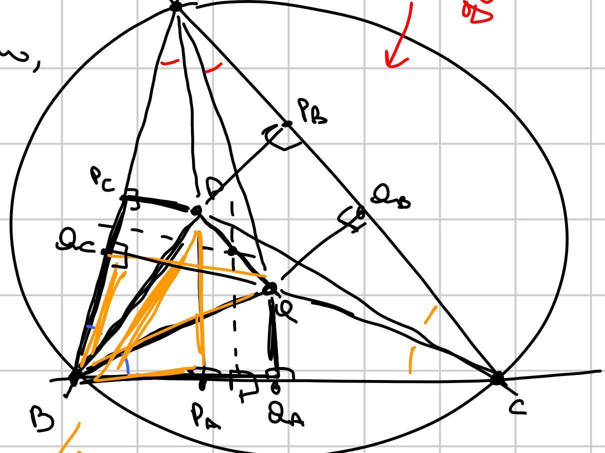
← Tracciare tutti gli angoli

CONIUGATI ISOGONALI

- Dato un punto P dentro un triangolo, il coniugato isogonale esiste.

(per il Teorema di Ceva in versione trigonom.)

si può fare considerando gli assi



- Le proiezioni di P, Q sui lati sono concicliche
  il centro è il pt. medio di PQ

$\triangle BPP_c \sim \triangle BQQ_A$

sim.

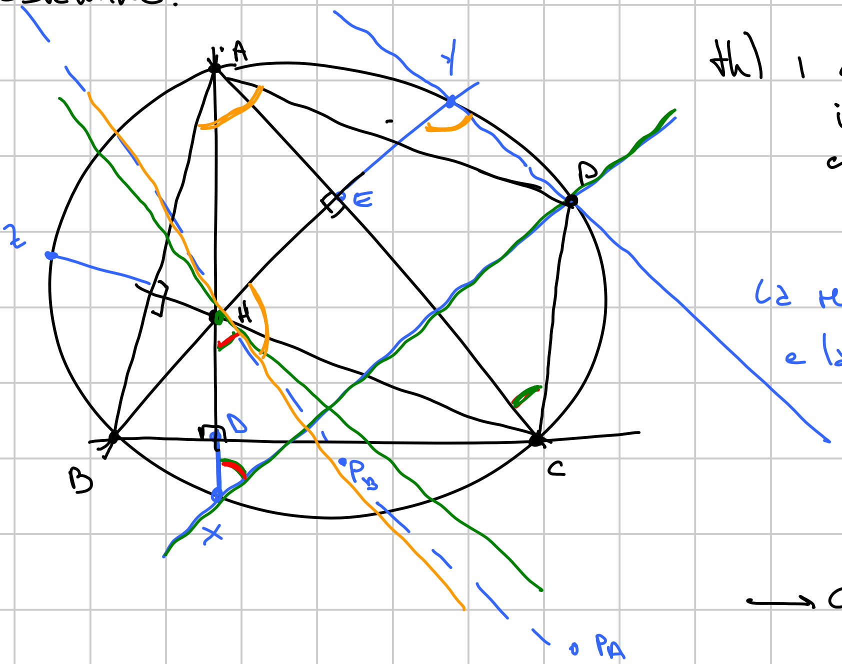
$$\frac{BP_c}{BQ_A} = \frac{BP}{BQ} = \frac{BP_A}{BQ_c} \longrightarrow BP_c \cdot BQ_c = BQ_A \cdot BP_A$$

→ $P_A Q_A P_C Q_C$ è ciclico!

→ Assi di $P_A Q_A \cap P_C Q_C$

⚠ Non abbiamo ancora finito

Problemino.



Th) I simm. di P rispetto a tutti i lati giacciono su una retta che passa per H

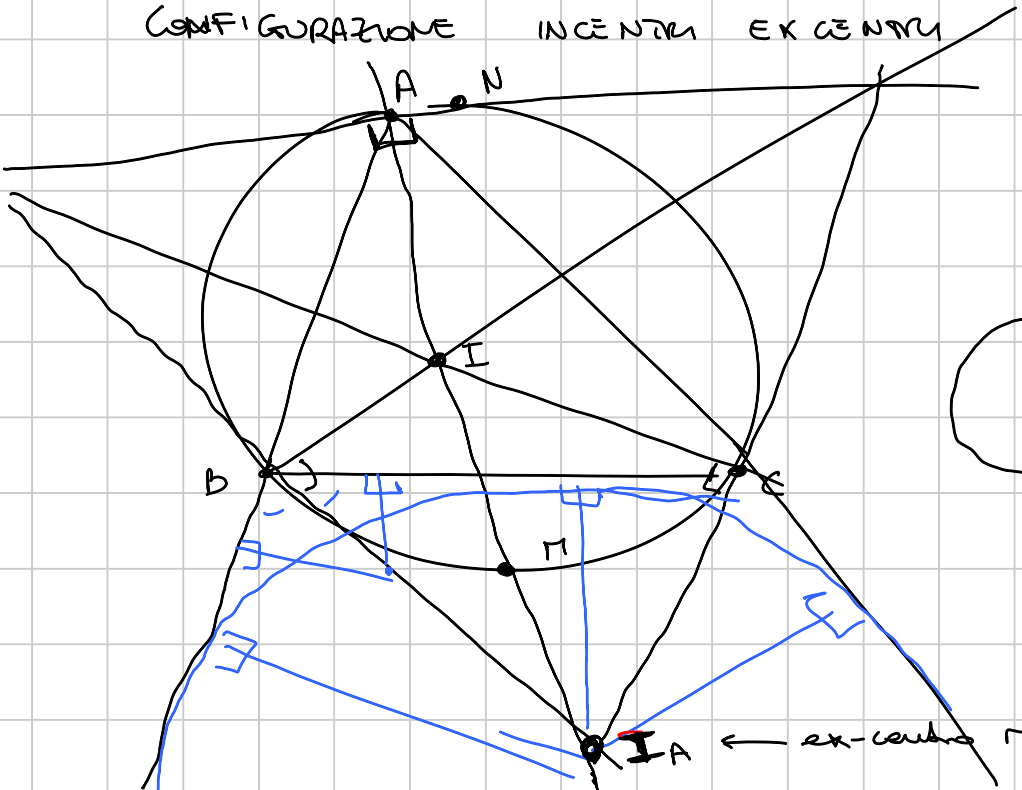
La retta arancione per H e la retta verde per H sono la stessa

$\longleftrightarrow \hat{o} + \hat{o} = X\hat{H}Y$

$\pi - \hat{c}$ $\qquad$ $\pi - \hat{c}$

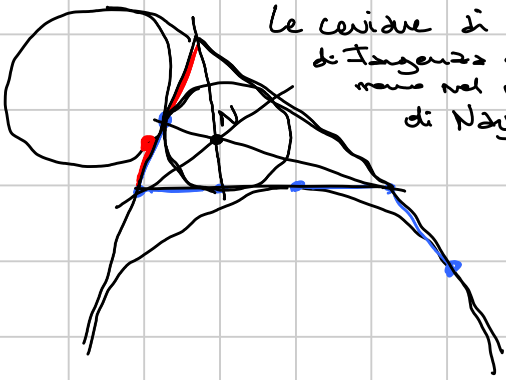
→ Concluso per simmetria

CONFIGURAZIONE INCENTRI EXCENTRI



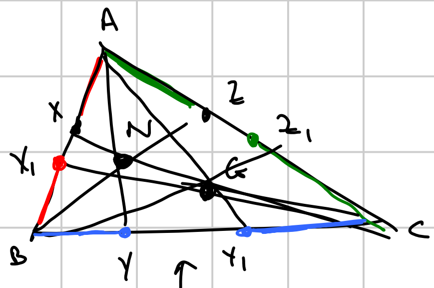
← ex-centro relativo ad A

Le ceviane di pt. di tangenza concorrono nel pt. di Nagel



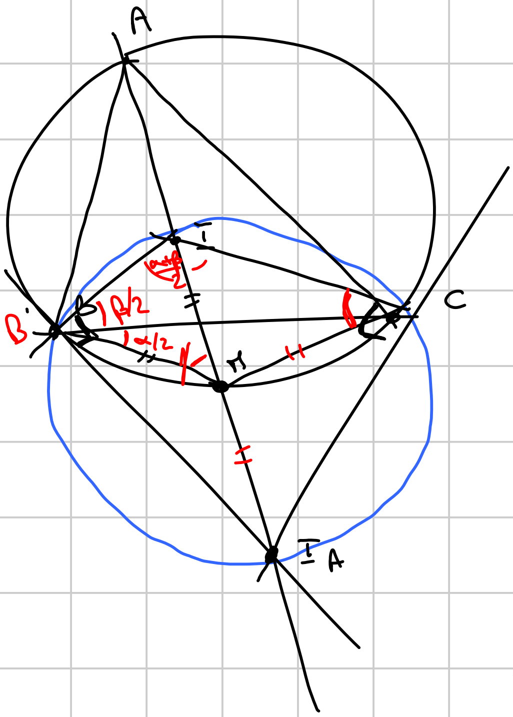
$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$$

per ceva concorrono anche le seconde di Ceviane

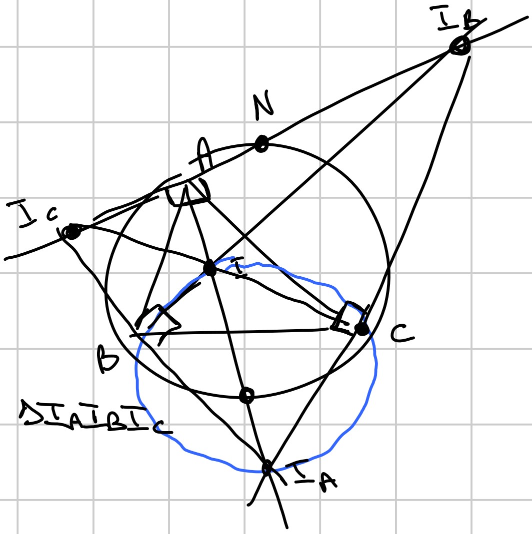


Gergonne

"coniugati isotomici"



- $I B I_A C$ è ciclico
  - $I I_A$ è diametro
  - M è il centro

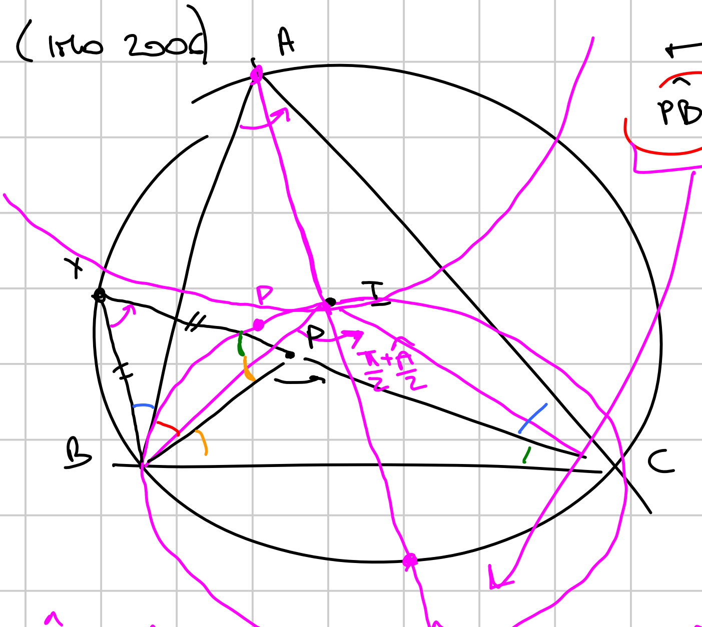


I è ortocentro di $\Delta I_A I_B I_C$

⊙ABC è la crf di Feuerbach di $\Delta I_A I_B I_C$

N è pt. medio di $I_B I_C$

Problema (IMO 2006)



$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B$

th) $AP \geq AI$

[con $=$ $\longleftrightarrow$ $P = I$]

1. Devo riuscire a calcolare $B\hat{P}C$

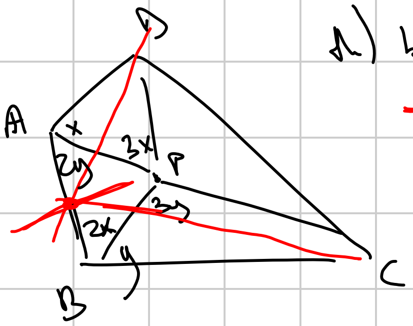
2. Cerco di spostare gli angoli

$B\hat{X}P = \hat{A}$ $\longrightarrow$ $P\hat{B}A + P\hat{C}A = \frac{\pi - \hat{A}}{2}$ $\longrightarrow$ $B\hat{P}C = \pi - \left(\frac{\pi - \hat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$

$\longrightarrow$ BPIC ciclico

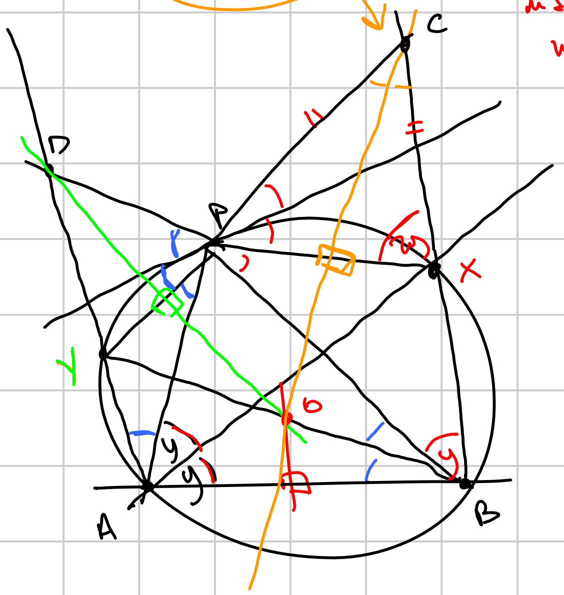
$\longrightarrow$ le due crf rosa sono tangenti perché hanno centro sulla bis!!

$\longrightarrow$ IMO 2020/1

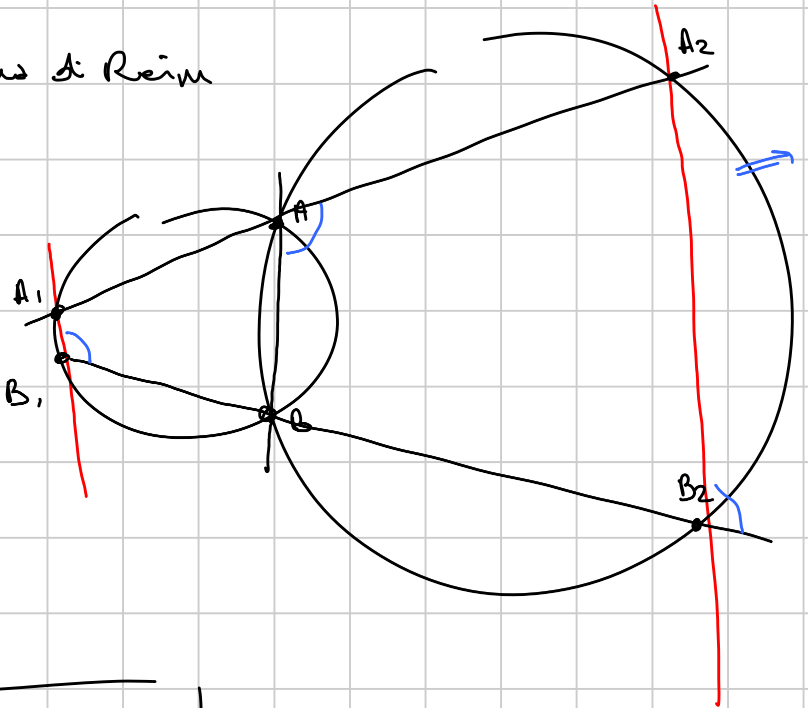


1) bis di $\hat{ADP}$, bis di $\hat{PCB}$, asse di AB concorrono
= asse di PY = asse di PX

ma gli assi concorrono nel centro della circ

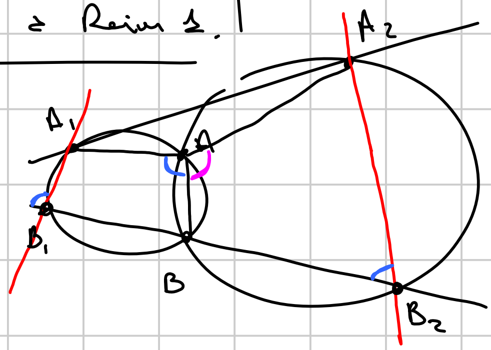


Teorema di Reim

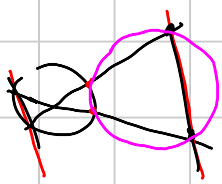


$\Rightarrow$ $\boxed{A_1B_1 \,//\, A_2B_2}$

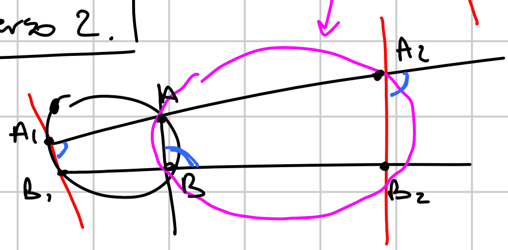
Inverso a Reim 1.



se $A_1B_1 \,//\, A_2B_2$, allora $A \in A_1A_2$

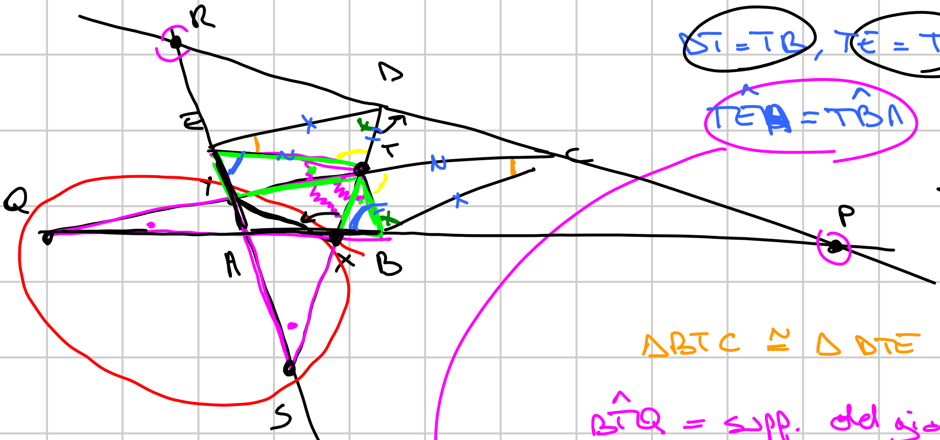


Inverso 2.



se $A_1B_1 \,//\, A_2B_2$, allora ABB_2A_2 è ciclico

Problema (IMO 2022-4)



$DT = TB$, $TE = TC$, $BC = DE$

$T\hat{E}A = T\hat{B}A$

Th) PRQS è ciclico

$\Delta BTC \cong \Delta DTE$

$B\hat{T}Q$ = supp. dell'angolo $= E\hat{T}S$

Δ + angoli blu

$\Delta ETS \sim \Delta QBT$

$\longrightarrow$ QSXY ciclico

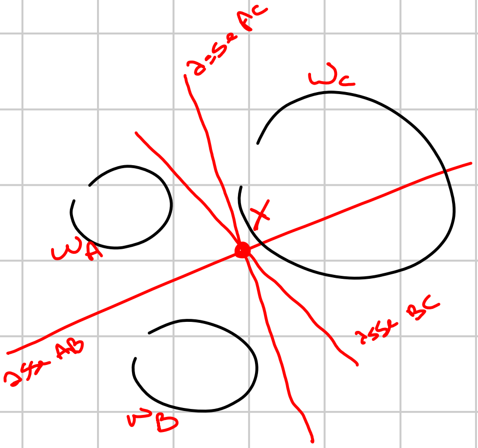
Se $\boxed{RP \parallel XY}$, avremo finito per Reim

$\Delta BXT \sim \Delta EYT$ perché hanno 2 angoli uguali (quello blu e $E\hat{T}X = E\hat{T}S = X\hat{T}Y = B\hat{T}X$)

$$\frac{BT}{TX} = \frac{ET}{TY} \longleftrightarrow \frac{TX}{TY} = \frac{BT}{ET} = \frac{TD}{TC} \longrightarrow \Delta TXY \sim \Delta TDC$$

oppure, per Talete $XY \parallel CD$/PR

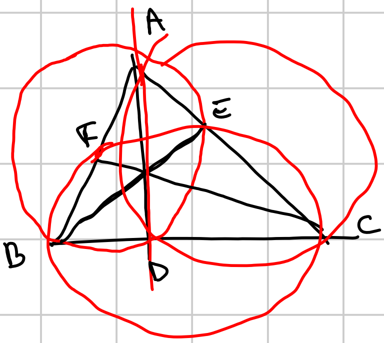
ASSI RADICALI



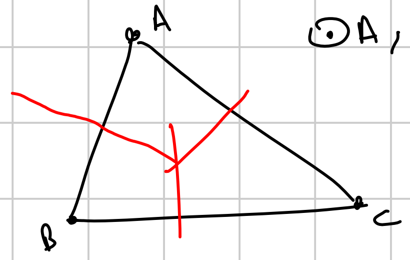
gli assi radicali delle coppie di 3 cerchi concorrono

X è int. asse AB ∩ asse BC

$$Pow_{\omega_A} X = Pow_{\omega_B} X = Pow_{\omega_C} X \implies X \in \text{asse } AC$$



Gli assi di ⊙BCEF, ⊙CAFD, ⊙ABDE sono AD, BE, CF le altezze



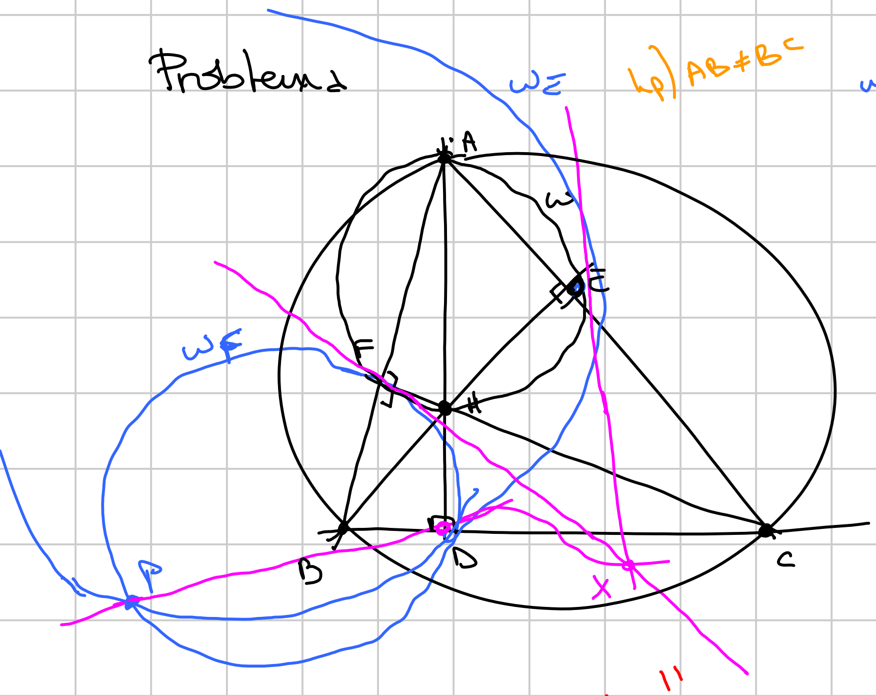
$\odot A$, $\odot B$, $\odot C$

Problema

hp) $AB \neq BC$

ω_F tangente a $\odot AFHE$ in F e dall'altro lato uguale

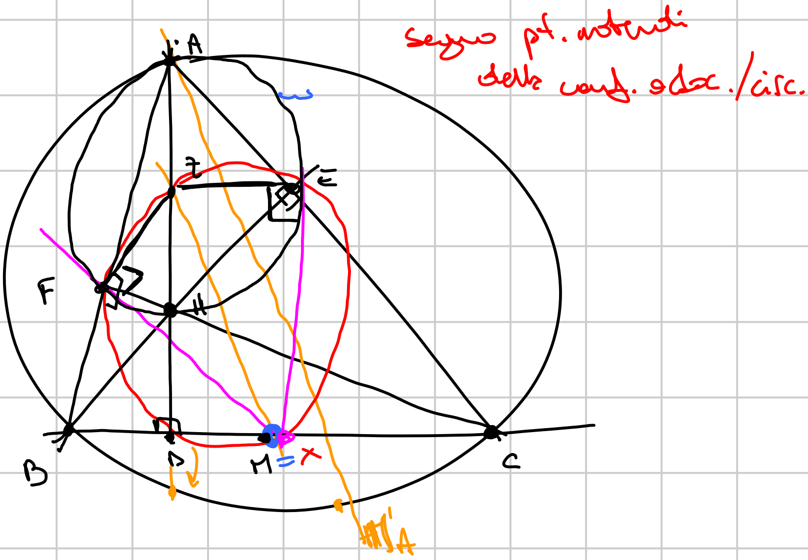
th) $P \in$ retta BC



se $X \in BC$ abbiamo finito perché BC dovrebbe essere l'asse radicale di ω_F, ω_E.

posso dimenticarmi delle CRF blu!

segno pt. notevoli della conf. ortoc./circ.



$\rightarrow ZFXE$ è ciclico!!

ma $\odot ZFE$ è Feuerbach

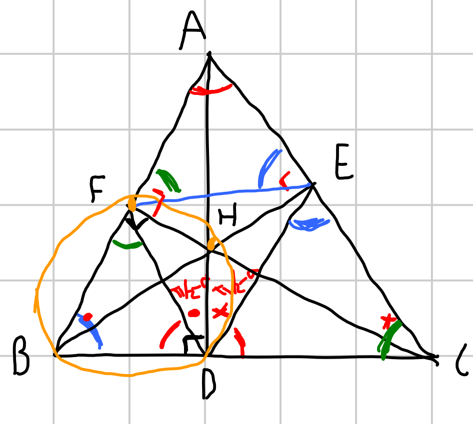
Quindi se $X \in BC$ è D oppure M.

$\rightarrow$ Voglio mostrare che MF è tangente a ω

$\Longleftrightarrow MF \perp ZF \Longleftrightarrow ZM$ è un diametro di Feuerbach (perché $Z\hat{D}M$ è retto o per costruzione)

Correzione

1



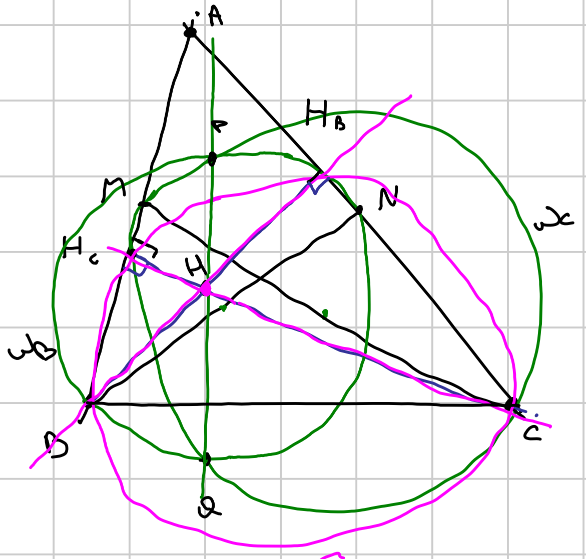
th) H incentro triangolo ΔDEF

$\Longleftrightarrow F\hat{D}H = H\hat{D}E$

$\bullet = \pi/2 - \hat{A}$ $\quad\times = \pi/2 - \hat{A}$

Ma anche $\Delta AEF \sim \Delta DBF \sim \Delta DEC \sim \Delta ABC$

$\boxed{2}$



Th) P, Q, H allineati

• MH_cC è retto $\Longrightarrow$ $H_c \in$ alla circ. di diametro MC.

• PQ è l'asse radicale delle circ verdi

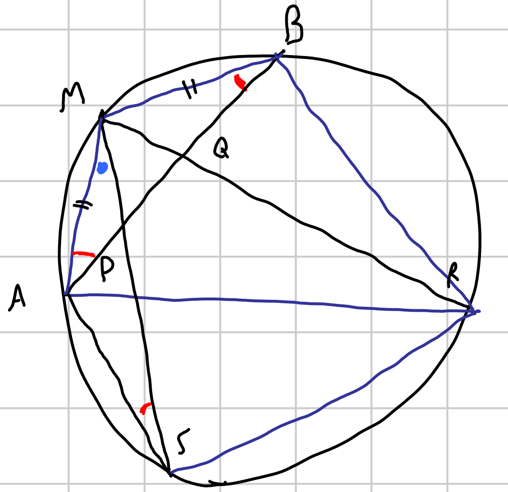
th $\iff$ $Pow_{\omega_B} H = Pow_{\omega_c} H$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ HB\cdot H_B & \overset{?}{=} & HC\cdot H_c \\ /\!/ & & /\!/ \end{array}$$

$$Pow_{\Gamma} H$$

oppure H centro radicale di $\odot BCH_BH_c$, ω_B, ω_c

$\boxed{3}$



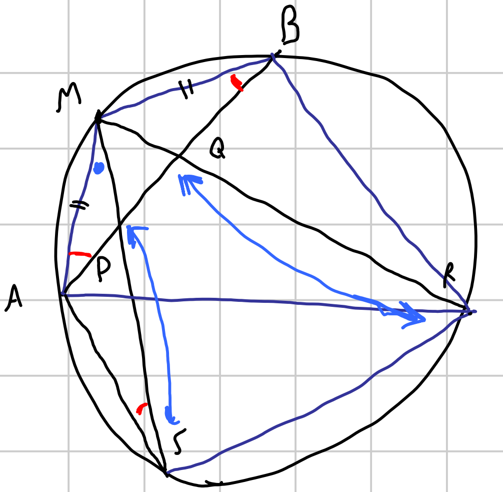
th) PSRQ è ciclico

$\iff MP\cdot MS = MQ\cdot MR$

$\triangle AMS \sim \triangle APM$ (angolo rosso e • in comune)

riscrivo $\frac{MA}{MS} = \frac{MP}{MA}$

$MS\cdot MP = MA^2 = MB^2 = MQ\cdot MR$



inverto in M di raggio MA

A ↺ B ↺

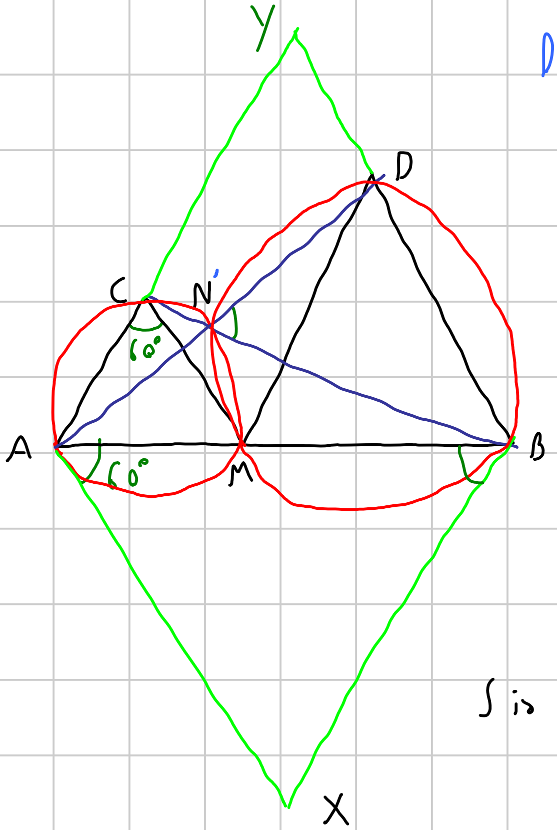
retta AB $\longleftrightarrow$ circ AMB

$P \longleftrightarrow S$

$Q \longleftrightarrow R$

$MP\cdot MS = MA^2 = MQ\cdot MR$

$\boxed{5}$



Definisco $N' = BC \cap AD$, e dimostro che sta su entrambe le cfr.

Considero una rotazione di centro M e $\theta = 60°$ (in senso antiorario)

$MB \longrightarrow MD$

$MC \longrightarrow MA$

$\Rightarrow BC \longrightarrow DA \Rightarrow BN'D = 60° = AN'C$

$B\hat{M}D = 60° = A\hat{M}C \Rightarrow AMN'C$ ciclico $\Rightarrow$ Th.

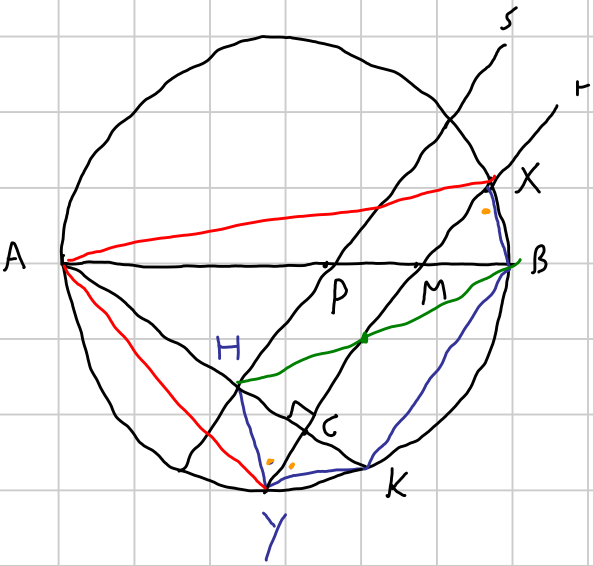
Sia X tale che ABX equilatero... come in figura

AX è tangente a $\Omega = \odot AMC$ in A, e quindi $pow_\Omega(X) = AX^2$

$\omega = \odot BMD \quad pow_\omega(X) = BX^2 =$

X sta sull'asse radicale, che è MN. $(\forall M)$

$\boxed{4}$



$AK \perp r\cap Y$

$AK \perp KB$ poiché AB diametro

$KB // r // s$

$PM = MB \Rightarrow HC = CK$ per Talete

Nel triangolo ΔHKY, chi è CY?

Asse, altezza, mediana

$\Rightarrow YK = HY$ $\quad$ $BKYX$ è un trapezio inscrivibile in una cfr, quindi è trap. isoscele e perciò $B\hat{X}Y = K\hat{Y}X = K\hat{Y}H$

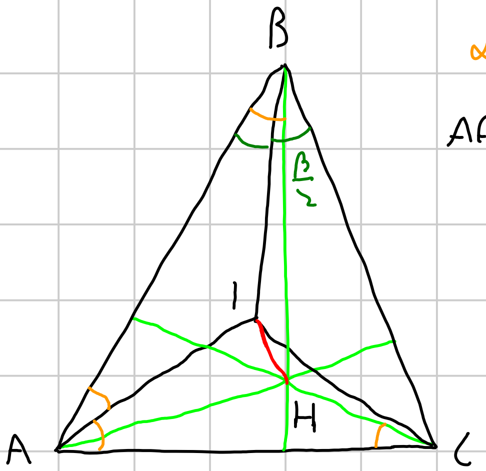
$HY // BX$, inoltre $HY = YK = BX \Rightarrow HYBX$ parallelogramma

Ossi: AK è altezza in ΔAYX

H è simmetrico di K che è altezza $\cap$ circoscritta, quindi H è l'ortocentro

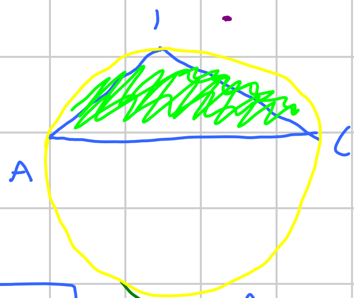
Configurazione dell'ortocentro! ☺

$\boxed{6}$



$\alpha = 60°$ $\quad AB > AC$

Affinché H stia "all'interno" di ΔAIC, è necessario che $A\hat{H}C > A\hat{I}C$



digressione...

$A\hat{I}C = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2} = \frac{5}{6}\pi - \frac{\gamma}{2}$

$A\hat{H}C = \pi - \beta$ $\quad \frac{\pi}{3} + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{2}{3}\pi$

$\pi - \beta = \frac{\pi}{3} + \gamma > \frac{5}{6}\pi - \frac{\gamma}{2}$ $\quad AB > AC \Rightarrow \gamma > \alpha > \beta$

$I\hat{B}H = A\hat{B}H - A\hat{B}I = \frac{\pi}{6} - \frac{\beta}{2}$

$I\hat{C}H = I\hat{C}A - H\hat{C}A = \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{\gamma - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{\pi}{3} - \beta}{2}$

$\Rightarrow I\hat{B}H = I\hat{C}H$

Passiamo alla dimostrazione...

Th: $2\,I\hat{H}A = 3\beta \iff I\hat{H}A = 3\cdot\frac{\beta}{2}$

$$I\hat{H}A = B\hat{H}A - \underset{\substack{\| \\ B\hat{C}I}}{B\hat{H}I} = \pi - \gamma - \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{3}{2}\gamma = \pi - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - \beta\right) = \pi - \pi + \frac{3}{2}\beta = \frac{3}{2}\beta \qquad \square$$