A2 Medium [Tess]

Titolo nota

Disuguaglianze

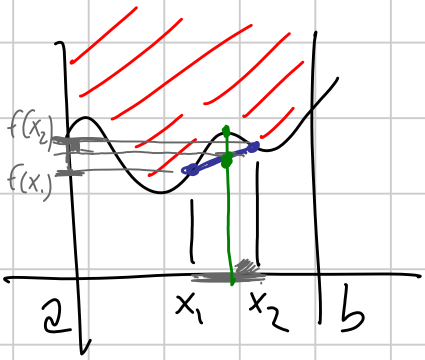
Convessità

Def: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ si dice convessa quando $\{(x,y) \text{ t.c. } x \in [a,b], y \in \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ è convesso.

Equivalentemente posso chiedermi

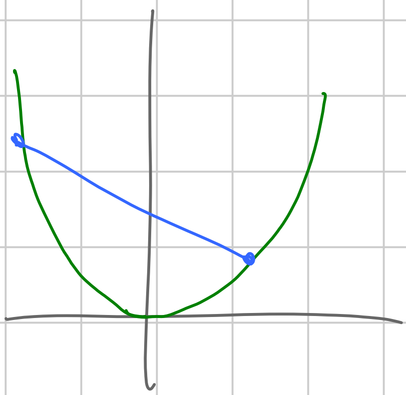
$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \forall \lambda \in [0,1]$

$$\underline{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)}$$



Esempi di funzioni convesse

$f(x) = x^2 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(x) = x$

$f(x) = x^n$ è convessa $\forall n \geq 1$ anche per $n \in \mathbb{R}$ per $x \geq 0$

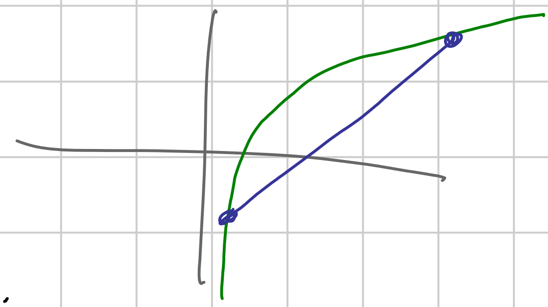
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ è convessa per $x > 0$, $\forall\, n>0, n \in \mathbb{R}$

$f(x) = |x|$ è convessa in $\mathbb{R}$

la verifica è la disuguaglianza triangolare

Def: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è concava quando $-f$ è convessa.

Es: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log x$ è concava



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$ è convessa.

Proprietà:

f, g convesse $\Rightarrow$ $f+g$ è convessa

$\lambda > 0$ $\Rightarrow$ λf è convessa

$\Rightarrow$ $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ è convessa

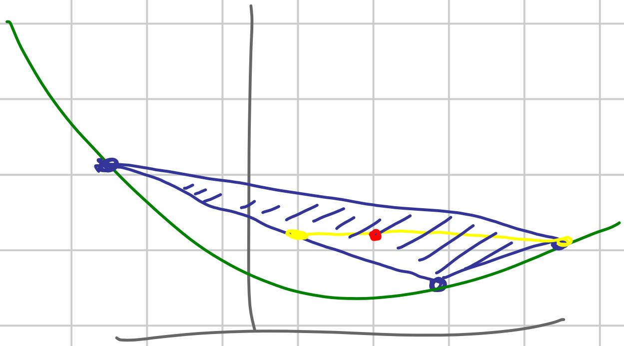
Es: $|x| = \max\{x, -x\}$

Spesso si usano funzioni derivabili molte volte

Se f è derivabile 2 volte e $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

allora f è convessa.

Per parametrizzare il segmento fra a e b posso prendere $\lambda \in [0,1]$ e scrivere $\lambda a + (1-\lambda) b$



$\mu := 1-\lambda$

$$\lambda a + \mu b, \quad \lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1$$

$$\lambda a + \mu b + \nu c, \quad \lambda, \mu, \nu \geq 0 \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\lambda}{1-\nu} a + \frac{\mu}{1-\nu} b\right) + \nu(c)$$

Thm: (Jensen)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa allora $\forall\, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c. $\lambda_i \geq 0$ $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \overset{\circledast}{\geq} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$$

Dim: Per $n=2$ è la def. di convessità.
Induzione su n, $n \geq 2$

Vogliamo provare la $\circledast$ con $n+1$ al posto di n

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$(1-\lambda_{n+1})\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots \right)}_{@} + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

è comb. convessa di $f(x_1), \dots, f(x_n)$ con coeff. $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}, \dots, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}$

$$1-\lambda_{n+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Per ip. induttiva $@ \geq f\left(\frac{\lambda_1 x_1}{1-\lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}\right)$

$$\geq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1 x_1}{1-\lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

caso $n=2$

$$\geq f\left(\cancel{(1-\lambda_{n+1})}\left(\frac{\lambda_1 x_1}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} + \dots\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$= f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}).$$

Applicazioni

$$f(x) = -\log x \qquad a_1, \dots, a_n > 0$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

$$-\frac{\log(a_1) + \dots + \log(a_n)}{n} \geq -\log\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Vale una versione pesata:

$$-\frac{\lambda_1 \log(a_1) + \dots + \lambda_n \log(a_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \geq -\log\left(\frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right)$$

$$\sqrt[\lambda_1+\dots+\lambda_n]{a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}} \le \frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

Es (IMO 2020 . 2) $a \geq b \geq c \geq d > 0$ $a+b+c+d=1$.

Dim che $(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Sol: Sistemiamo il pezzo $a^a b^b c^c d^d$

Per AM-GM pesata su a,b,c,d con pesi a,b,c,d

$$\sqrt[a+b+c+d]{a^a b^b c^c d^d} \le \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a+b+c+d}$$

$$(a+2b+3c+4d)\,a^a b^b c^c d^d \le (a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) \overset{?}{<} 1$$

Hope!

La Hope! $\iff$

$$(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) < (a+b+c+d)^3$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 &= \sum a^2\dots + \sum abc \\ &\geq \sum a^2\dots \\ &= a^2(a+3b+3c+3d) \\ &\quad + b^2(3a+b+3c+3d) \\ &\quad + c^2(3a+3b+c+3d) \\ &\quad + d^2(3a+3b+3c+d) \\ &\geq a^2(a+2b+3c+4d) \\ &\quad + b^2(a+2b+3c+4d)\end{aligned}$$

$$+c^2(a+2b+3c+4d)$$
$$+d^2(a+2b+3c+4d)$$
$$=(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Es per casa mostrare che non è sempre vero che

$$\left(\sum i a_i\right)\prod a_i^{a_i} < 1 \,, \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$$
$$a_1 + a_2 \dots + a_n = 1$$

Def: Dati $a_1, \dots, a_n > 0$ e $p \in \mathbb{R}^+$

$$M_p(a_1,\dots,a_n) = \left(\frac{\sum a_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$M_1 = AM$$
$$M_2 = QM$$

$$\lim_{p\to 0} M_p = GM$$

Fatto: se $0<p<q$ allora $M_p \leq M_q$

Dim:
$$\left(\frac{\sum a_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\sum a_i^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$x_i = a_i^p$$

$$\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\sum x_i^{\frac{q}{p}}}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{\sum x_i}{n} \leq \left(\frac{\sum x_i^{\frac{q}{p}}}{n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$M_1 \leq M_{\frac{q}{p}}$$

$$\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{\sum x_i^{\frac{q}{p}}}{n}$$

Ora $f(x) = x^{\frac{q}{p}}$ è convessa perché $\frac{q}{p} \geq 1$ e Jensen su f chiude.

Jensen $\Rightarrow$ lemma di Titu

$$\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i} \qquad a_i, b_i > 0$$

Applichiamo Jensen a $f(x) = \frac{1}{x}$

con : $x_i = \frac{b_i}{a_i}$ $\quad \lambda_i = a_i$

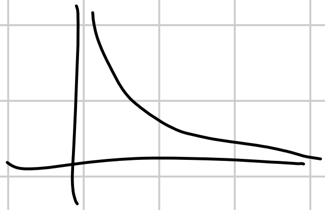
$$\frac{\sum \lambda_i f(x_i)}{\sum \lambda_i} \geq f\left(\frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i}\right)$$

$$\frac{\sum a_i \frac{a_i}{b_i}}{\sum a_i} \geq \frac{1}{\frac{\sum \cancel{a_i} \frac{b_i}{\cancel{a_i}}}{\sum a_i}} \quad \checkmark$$

Es (IMO 2001.2) $a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$$

Sol: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



$\lambda_1 = a \quad \lambda_2 = b \quad \lambda_3 = c$

$x_1 = a^2+8bc$

Per Jensen $$\frac{\sum \lambda_i f(x_i)}{\sum \lambda_i} \geq f\left(\frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i}\right)$$

$$\frac{\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}}{\sum a} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{cyc}(a^3+8abc)}{\sum a}}}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sum_{cyc} a^3+8abc}} \overset{?}{\geq} 1$$ Hope!

Hope! $\iff$ $$\left(\sum_{cyc} a\right)^3 \overset{?}{\geq} \sum_{cyc}\left(a^3+8abc\right)$$

$$\cancel{\sum_{cyc} a^3} + 3\sum_{sym} a^2b + \cancel{6}abc \overset{?}{\geq} \cancel{\sum_{cyc} a^3} + \cancel{24}^{18}abc$$

$$\sum_{sym} a^2b \geq 6abc.$$

Es (CHN 2005) $\quad a+b+c=1 \quad a,b,c>0$

$$10\sum_{cyc} a^3 - 9\sum_{cyc} a^5 \geq 1.$$

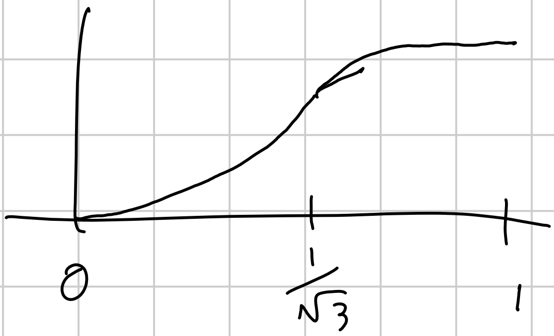
Sol:

$$\iff \sum_{cyc}\left(10a^3 - 9a^5\right) \overset{?}{\geq} 1$$

$f(a) \qquad f(x) = 10x^3 - 9x^5$

$$f''(x) = \left[10x^3-9x^5\right]'' = \left[10\cdot 3\cdot x^2 - 9\cdot 5\cdot x^4\right]' = 60x - 180x^3 \overset{?}{\geq} 0 \text{ per } x\in[0,1]$$

$$\iff x \geq 3x^3 \iff 1 \geq 3x^2 \iff x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Ci sono 2 casi: uno fra a,b,c è $> \frac{1}{\sqrt{3}}$

tutti sono $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

nel secondo caso applichiamo Jensen

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{27} - \frac{\cancel{9}}{3^{\cancel{5}\,3}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

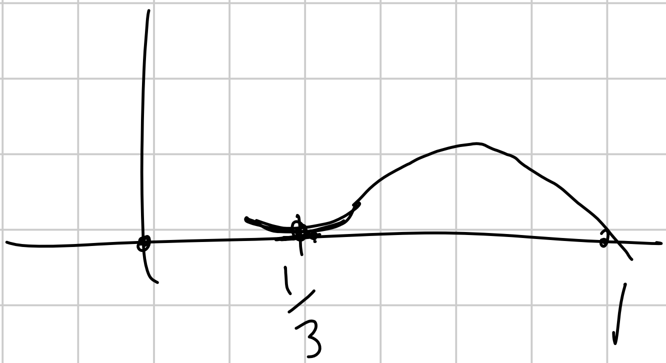
Nell'altro caso ^{wlog} $a > b, c \Rightarrow b, c \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

Jensen su b e c,

$$f(b)+f(c) \geq 2f\left(\frac{b+c}{2}\right) = 2f\left(\frac{1-a}{2}\right)$$

$$f(a)+f(b)+f(c) \geq f(a) + 2f\left(\frac{1-a}{2}\right) \overset{?}{\geq} 1$$

questa è una dis. polinom. in a di grado 5, con un caso di uguagl. in $a = \frac{1}{3}$



$$-1 + f(a) + 2f\left(\frac{1-a}{2}\right) = \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 q(a)$$

1 è un'altra uguaglianza!

$$= \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 (a-1)\, q_1(a).$$

In generale se una funzione $f(x)$ non è esatt. convessa in $[a, b]$ ma è metà e metà

eg: $[a, c]$ è convessa e in $[c, b]$ è concava

Come faccio a ottere il min di:

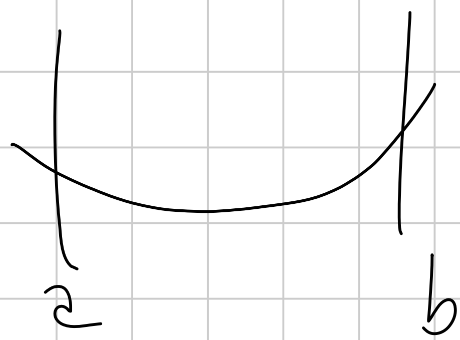
$f(x_1) + \ldots + f(x_n)$ con il vincolo $x_1 + \ldots + x_n = C$

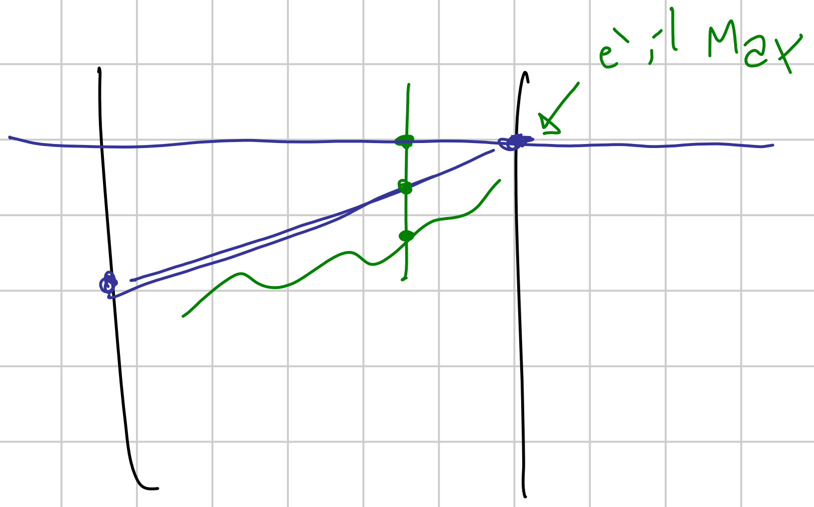
Se fosse convessa (eg: $c=b$) : per Jensen

$$f(x_1)+\dots+f(x_n) \geq n f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) = n f\left(\frac{C}{n}\right)$$

Altrimenti: lavoro separatamente nella parte convessa e nella parte concava.
Nella parte convessa faccio Jensen
$\Rightarrow$ posso assumere che tutti i termini nella parte convessa siano uguali

Troviamo massimi in funzioni convesse





Es: $0<a,b,c<1$

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1.$$

Dim: Oss: come funzione in a il LHS è una funzione convessa

$\Rightarrow$ il max sta in $a=0$ o $a=1$ (lavoro in $[0,1]$)

lo stesso vale per b e c

e dunque devo solo controllare i casi in cui $a,b,c\in\{0,1\}$.

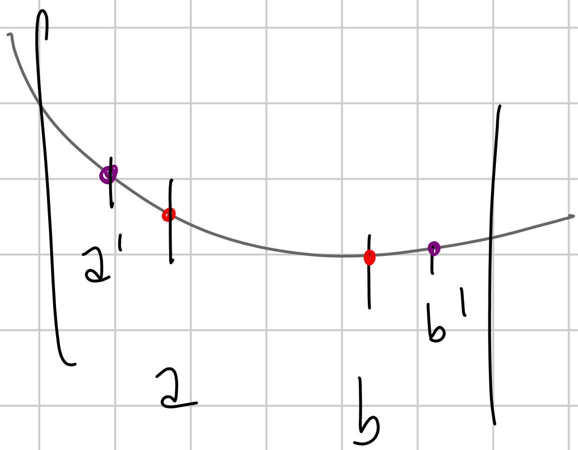
Karamata

$a,b\in I$, $f: I\to\mathbb{R}$ convessa

al variare di a',b' t.c. $a',b'\in I$, $a'+b'=a+b$

cosa succede all'espressione

$$f(a')+f(b')$$



$(a+b = a'+b')$

Supponiamo che $a' < a < b < b'$. Allora

$$f(a') + f(b') \geq f(a) + f(b)$$

Si applica Jensen, un termine di destra alla volta

$$a = \lambda a' + (1-\lambda) b' \qquad \exists \lambda \in [0,1]?$$

$$\lambda = \frac{b'-a}{b'-a'}$$

$$\lambda f(a') + (1-\lambda) f(b') \geq f(\overbrace{\lambda a' + (1-\lambda) b'}^{a})$$

$$(1-\lambda) f(a') + \lambda f(b') \geq f((1-\lambda) a' + \lambda b')$$

$$= a' - \lambda(a'-b')$$

$$= a' + (b'-a)$$

$$= a' + b' - a$$

$$= a + b - a = b$$

Thm (Karamata) Siano $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in I$

t.c. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$
$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$

$$a_1 \geq b_1$$

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$$

$$\vdots$$

$$a_1 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + \dots + b_{n-1}$$

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa, allora

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(b_i).$$

Dim: per casa. (sfruttando Jensen)

Jensen $\Rightarrow$ Karamata

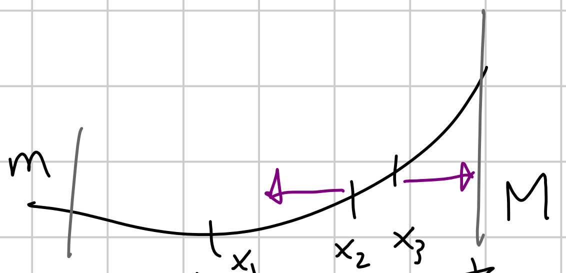
In realtà Karamata $\Rightarrow$ Jensen

Perché se prendo $b_i = \frac{\sum a_i}{n}$,

$$\sum_i f(a_i) \geq \sum_i f(b_i) = n\, f\left(\frac{\sum a_i}{n}\right)$$

Es: Karamata $\Rightarrow$ Bunching

Prima volevo il minimo di $f(x_1) + \dots + f(x_n)$
con $x_1 + \dots + x_n = C$ e f in parte convessa
in parte concava



e vogliamo aumentare la somma di $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

Con Karamata sistemo questa parte:

$y_1 = y_2 = \dots = y_{i-1} = M$, $\quad y_i = C - (i-1)M - (n-i)m$

$y_{i+1} + \dots + y_n = m$

voglio che $y_i \in [m, M]$

Verifico che $(y_1, \dots, y_n) \succ (x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \sum_i f(y_i) \geq \sum_i f(x_i)$$

La config. del minimo è:

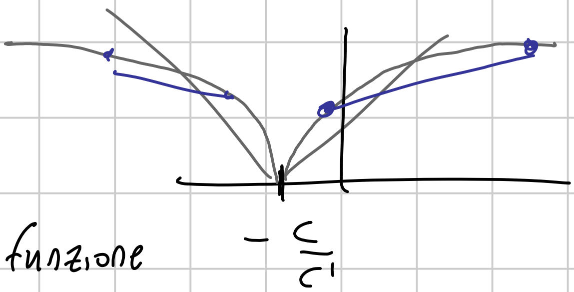
Es (IMO 2021.2) $\quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_i \sum_j \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_i \sum_j \sqrt{|x_i + x_j|}$$

Oss: se al posto di x_i pongo $x_i + t$ con $t \in \mathbb{R}$ ottengo

$$\sum_i \sum_j \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_i \sum_j \sqrt{|x_i + x_j + 2t|}$$

$$\sqrt{|c + c't|}$$



Allora il RHS è una funzione in t a tratti concava.

$\Rightarrow$ il minimo non sta all'interno di un intervallo in cui è concava

$\Rightarrow$ il minimo sta in uno dei punti ai bordi di uno di questi intervalli.
Capitano nei punti $-\frac{x_i+x_j}{2}$

$\Rightarrow \exists\, i,j$ t.c. $RHS(t) \geq RHS\left(-\frac{x_i+x_j}{2}\right)$

con le nuove variabili traslate posso assumere che $x_i+x_j=0$

$i=j=k$

$i\neq j$

Facciamo il primo: sto assumendo che $x_k=0$

$$\sum_i \sum_j \sqrt{|x_i-x_j|} \overset{?}{\leq} \sum_i \sum_j \sqrt{|x_i+x_j|}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\sqrt{|x_i-x_j|} + \cancel{\sum_j \sqrt{|x_j|}} + \cancel{\sum_i \sqrt{|x_i|}}$$

$$\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\sqrt{|x_i+x_j|} + \cancel{\sum_i \sqrt{|x_i|}} + \cancel{\sum_j \sqrt{|x_j|}}$$

L'altro caso è simile (per casa)

Poi induzione.

Disuguaglianze simmetriche polinomiali in a, b, c di grado basso, e omogenee

Es: $x+y+z=1$, $x, y, z \geq 0$ $\qquad 0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$

Sol: posso omogeneizzare con $0 \leq (x+y+z)(xy+yz+zx) - 2xyz \leq$
$\leq \frac{7}{27}(x+y+z)^3$

Thm (Fondamentale sulle funzioni simmetriche):

Dato un polinomio $p(a,b,c)$ simmetrico, $\exists\, q(x,y,z)$ polinomio t.c.

$$p(a,b,c) = q(\underbrace{a+b+c}_{= s}, \underbrace{ab+bc+ca}_{= q}, \underbrace{abc}_{= p}).$$

Nel nostro caso abbiamo $sq - 2p \geq 0$
e $sq - 2p - \frac{7}{27}s^3 \leq 0$

Lemma ABC: Sia $f(a,b,c)$ polinomio simmetrico omogeneo di grado ≤ 5 allora il minimo e il massimo in I si trovano quando una delle variabili è sul bordo dell'intervallo oppure 2 variabili sono uguali.

Dim: $f(a,b,c) = P(s,q,p)$

dico che trovo altre terne a', b', c' t.c.

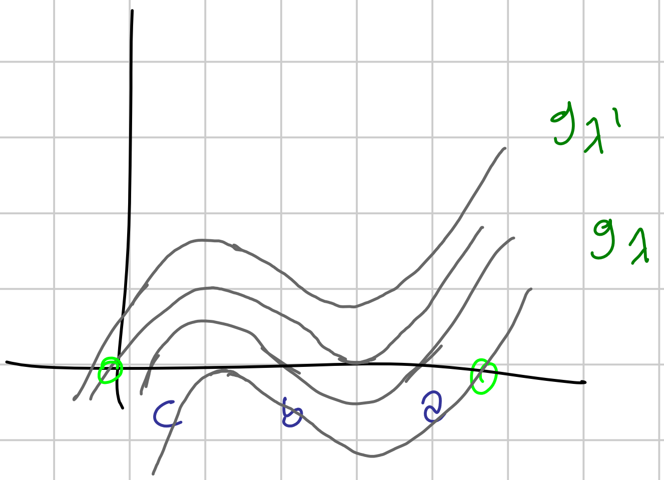
$s = a'+b'+c'$

$q = a'b'+b'c'+c'a'$

facendo variare p

$$g_\lambda(t) = t^3 - st^2 + qt - \lambda$$

con $\lambda = abc$ $\quad g_\lambda$ ha radici reali $= a, b, c$



Posso prendere λ un po' più grande o un più piccolo!

allora $g_{\lambda'}$ ha 3 radici 2 delle quali coincidenti

Oppure una radice tocca il bordo di I

Se f ha grado ≤ 5

$P(s,q,p)$ ha p che compare in grado ≤ 1

$\Rightarrow$ il massimo, fissato s e q si trova cambiando p

Tornando al nostro problema abbiamo

$$sq - 2p - \frac{7}{27}s^3 \leq 0$$

$\Rightarrow$ posso assumere per il lemma ABC che

$$a = 0 \quad \vee \quad b = c$$

$$(b+c)bc - \frac{7}{27}(b+c)^3 \leq 0 \quad \ldots$$

$\vee$

$$(a+2b)(2ab+b^2) - 2ab^2 - \frac{7}{27}(a+2b)^3 \leq 0$$

divido per b^3

$$\left(\frac{a}{b}+2\right)\left(2\frac{a}{b}+1\right) - 2\frac{a}{b} - \frac{7}{27}\left(\frac{a}{b}+2\right)^3 \leq 0$$

$t = \frac{a}{b}$ è un polinomio in t!

Stimare i singoli termini.

Nesbitt: $a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{b+c} \overset{?}{\geq} \cancel{\frac{\frac{3}{2}\overset{?}{}a}{a+b+c}} \qquad \overset{?}{\geq} \frac{\lambda a + \mu b + \nu c}{a+b+c}$$

$a+b+c \geq \frac{3}{2}(b+c)$ t.c. $\lambda+\mu+\nu=\frac{3}{2}$

t.c. $\mu=\nu$

in realtà vogliamo che $a(a+b+c)-(b+c)(\lambda a+\mu(b+c))$ abbia uno zero doppio in $a=\frac{b+c}{2}$

Es (molteplice apparizione) $abc=1$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+b+1}\leq 1$$

Sol:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

$a=x^3$ e cyc

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz}$$

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\frac{1}{x^2y+xy^2+xyz}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\sum_{cyc}\frac{1}{xy}\,\frac{1}{x+y+z}$$

$$=\cancel{\frac{1}{x+y+z}}\,\frac{1}{xyz}\,\cancel{\sum_{cyc}z}$$

Es (IMO 2005.3) $\quad xyz \geq 1$, $x,y,z>0$

$$\sum_{cyc} \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq 0$$

Sol:

$$\sum_{cyc} \frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} \geq \sum_{cyc} \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}$$

$$\sum_{cyc} \left(1 - \frac{y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\right) \geq \sum_{cyc} \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}$$

$$3 \geq (x^2+y^2+z^2) \sum_{cyc} \frac{1}{x^5+y^2+z^2}$$

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \overset{C-S}{\leq} \frac{(a^2+b^2+c^2)}{(x^{\frac{5}{2}}a+yb+zc)^2}$$

scelgo $b=y \quad c=z \quad a=x^{\lambda}$

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{x^{2\lambda}+y^2+z^2}{(x^{\frac{5}{2}+\lambda}+y^2+z^2)^2} \qquad \lambda=-\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(\sum_{cyc} \frac{1}{x} + 2\sum_{cyc} x^2\right)$$

resta $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{cyc}\frac{1}{x} \overset{?\text{ Hope!}}{\leq} 1$

$$\sum_{cyc} xy \leq (x^2+y^2+z^2)\,xyz$$

è vera perché prodotto di cose vere

$1 \leq xyz$ l'ipotesi.

$\sum_{cyc} xy \leq \sum_{cyc} x^2$ la solita

— $a, b, c > 0$ $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq 2$

— $a, b, c > 0$

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \geq \sum_{cyc}\sqrt{2a^4+a^2bc}$$