A3 MEDIUM

Titolo nota

1) SUCCESSIONI

2) EQUAZIONI FUNZIONALI

$a_0, \dots$ $\qquad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$a_n = f(n, a_{n-1}, \dots, a_0)$

1) $a_n = \lambda_{n-1} a_{n-1} + \dots + \lambda_{n-k} a_{n-k}$

$p(x) = x^k - \lambda_{n-1} x^{k-1} - \dots - \lambda_{n-k}$, le radici sono $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ con molt. $m_1, \dots, m_\ell$

$a_n = c_1 \alpha_1^n p_1(n) + \dots + c_\ell \alpha_\ell^n p_\ell(n) \qquad \deg(p_z) \leq m_z - 1$

(si dimostra (credo) con Vandermonde o eq. differenziali)

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \qquad p(x) = (x-1)^2 \qquad 1$ con molt. 2

costanti vanno bene e anche $x_n = n \ \forall n$

le soluzione del RL sono uno spazio vettoriale

OMOGENIZZARE

ES: $x_{n+1} = 2x_n + 1$ e $x_0 = 1$, possiamo liberarci dell'1:

guardiamo $y_n - c = x_n$ con $c \in \mathbb{R}$: $y_{n+1} - \cancel{c} = 2y_n - \cancel{2}c + 1$

poniamo $c = 1 \Rightarrow y_{n+1} = 2y_n$ e $y_0 = 2 \Rightarrow y_n = 2^{n+1} \Rightarrow x_n = 2^{n+1} - 1$. ✓

ES: $a_n = a_{n-1} + p(n)$ con $p \in \mathbb{R}[x]$ e $\deg(p) = n$

$b_n + q(n) = a_n \Rightarrow b_n + q(n) = b_{n-1} + q(n-1) + p(n)$, noi vorremmo

$q(n) - q(n-1) = p(n)$ prendiamo x^k, vediamo che $\deg(\underbrace{x^k - (x-1)^k}) = k-1$ (c'è kx^{k-1}), vogliamo determinare gli c_n

P1.1: A1 ISL 1994: $a_0 = 1994$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1}$ per $n \geq 0$, allora $\lfloor a_n \rfloor = 1994 - n$ $\forall n$ tra 0 e 998;

1) $a_n > 0$ $\forall n \geq 0$, 2) $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a_n+1} - a_n = \frac{-a_n}{a_n+1} \Leftrightarrow \underbrace{a_n - a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_n+1} > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ $\forall n \geq 0$

CLAIM: $a_n > (1994-n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1996-k}$ ✓ $\Rightarrow \lfloor a_n \rfloor \geq (1994-n) \Rightarrow a_n > 997$ per $n \leq 997$

3) $a_n = 1994 - n + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+1}\right)$ per $n \leq 998$ i termini della Σ sono $< \frac{1}{998}$ (tranne nel caso $n=998$ dove sappiamo $\leq \frac{1}{998}$ per un termini) e i termini sono al più 998

$\Rightarrow a_n < 1994 - n + \cancel{\frac{998}{998}} \Rightarrow \lfloor a_n \rfloor = 1994 - n$. ✓

P1.2: USA TSTST 1/2012: determinare le $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ strett. crescenti tali che $\exists \infty$ k per cui $a_k = 2k-1$ e $\nexists$ i,j,k tali che $a_i + a_j = a_k$:

prendiamo un $k \mid a_k = 2k-1$ e $A_k := \{a_1, \dots, a_k\}$

$$2k-1 \geq \frac{|A_k - A_k| - 1}{2} + |A_k| \geq \frac{2|A_k| - 2}{2} + |A_k| = 2k-1$$

$(|A_k - A_k| \geq 2|A_k| - 1 = 2k-1)$

$\Rightarrow \frac{|A_k - A_k| - 1}{2} = k-1 \Rightarrow |A_k - A_k| = 2k-1 \Rightarrow a_1, \dots, a_k$ è progressione aritmetica.

se prendo k non il più piccolo per cui $a_k = 2k-1$ trovo ragione $= 2$

$\Rightarrow a_n = 2n-1 \ \forall n \leq k \Rightarrow a_n = 2n-1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. ✓

IMO 2/2018: trovare gli $n \geq 3$ tali che $\exists\, a_1, \dots, a_{n+2}$ di reali con $a_1 = a_{n+1}$ e $a_2 = a_{n+2}$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \text{ per } i = 1, \dots, n:$$

$$a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Rightarrow$ per Riarrangiamento $a_i = a_{i+3}$ con indici mod n

* se $n \neq 3k$ allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costante $\Rightarrow a_1^2 + 1 = a_1$, ma $a_1^2 + 1 \geq 2|a_1|$ $\Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow 1 = 0$, impossibile.

* se $n = 3k$ $(2,-1,-1)$ iterata k volte funziona. $\Rightarrow$ funzionano i multipli di 3. ✓

EQ. FUNZIONALI

Equazione di Cauchy

La forma principale è $f(x) + f(y) = f(x+y)$ con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ per induzione trovo: $f(n\alpha) = nf(\alpha)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$
$\big(f(2\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha) = 2f(\alpha)$, $f(3\alpha) = f(2\alpha) + f(\alpha) = 3f(\alpha), \dots \big)$

$P(0,0)$; $f(0) = 0 \Rightarrow P(x,-x) \Rightarrow f(x)$ è dispari

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$ $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ (si dimostra ponendo $q = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$: $f(\frac{a}{b}\alpha) = af(\frac{\alpha}{b}) = \frac{a}{b} f(\alpha) = qf(\alpha)$. ✓

f é una applicazione lineare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ visto come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.

BASI DI HAMEL

In ZFC é dimostrato che ogni spazio vettoriale ammette una base.

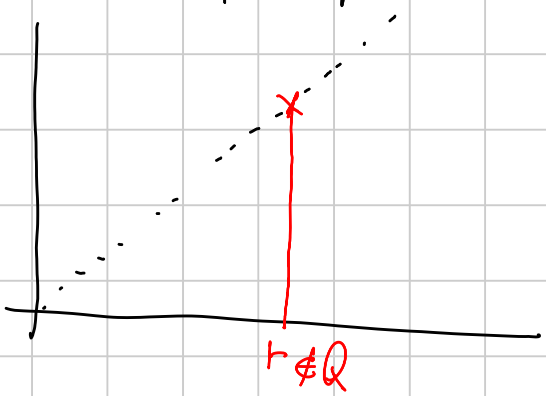
Le basi di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale si dicono basi di Hamel.

Le soluzioni alla Cauchy sono $End(\mathbb{R})$:

ad esempio $f(1)=1$, $f(\sqrt{2})=\sqrt{3}$ funziona.

Se abbiamo continuità, monotonia o limitatezza in un intervallo (o $\exists$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ in cui non passa la funzione) allora ci sono solo le soluzioni lineari cx con $c \in \mathbb{R}$:

CLAIM: $f(x) = f(1)x \quad \forall x \in \mathbb{R}$:



mentini razionali

continuità $\Rightarrow \lim_{x \to r} f(x) = f(r)$

$q_1, \dots, q_n$ in $\mathbb{Q}$ con $\lim_{n\to\infty} q_n = r$

$\Rightarrow f(r) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} f(1) q_n = f(1) r$

altre forme: $f(x)f(y) = f(x+y) \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$\exists\, g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = e^{g(x)} \ \forall x \Rightarrow g(x) + g(y) = g(x+y)$

eq. di Jensen: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

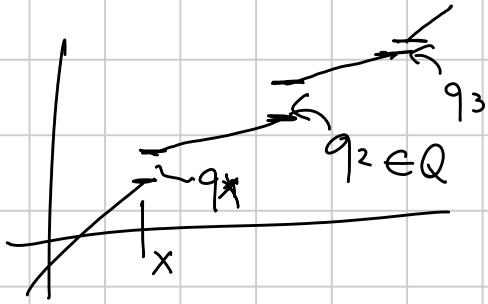
DIGRESSIONE su tecniche risolutive

1) continuità, monotonia, convessità

2) surgettività, iniettività, involuzione ($f(f(x))=x$)

3) guessare le soluzioni
4) disuguaglianze
5) introdurre variabili/funzioni
6) determinare proprietà di insiemi (ES: APMO 5/2021)

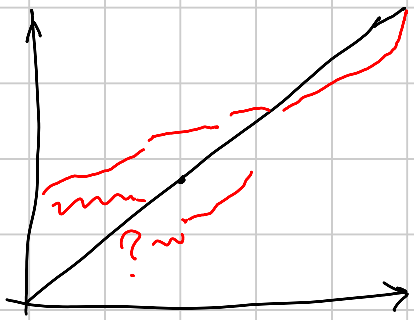
Le monotone hanno limiti destri e sinistri, a $\pm\infty$ e sono continue a meno di un insieme numerabile



troviamo una iniettiva dai pt. di disc. in Q che ha $|Q|=|\mathbb{N}|$
$\Rightarrow$ # pt. di disc. $\leq |\mathbb{N}|$

P2.1: $f:[a,b]\to[a,b]$ crescente (debol.) $\Rightarrow f$ ha un punto fisso ($\exists x\in[a,b] \mid f(x)=x$): dimostriamo che $f(x)-x$ passa per zero.

(Se avessimo una f continua generica sarebbe facile:
$g(x):=f(x)-x \Rightarrow g(a)\geq 0$ e $g(b)\leq 0 \Rightarrow$ per Teorema degli zeri
$\exists \alpha \mid f(\alpha)-\alpha=0$)



$f(b)\leq b \quad A:=\{x\in[a,b] \mid f(x)\leq x\}\neq\emptyset$

$\alpha:=\inf A$

- se $f(\alpha)=\alpha$ ✓
- se $f(\alpha)<\alpha$: $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)\leq f(\alpha)$

ma $\exists\, x_n\to\alpha^-$ tale che $f(x_n)>x_n \Rightarrow \lim_{x\to\alpha^-} f(x)\geq\alpha$, assurdo

- $f(\alpha)>\alpha$: analogo

BMO 2/2007: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y$$

$f\equiv 0$, oppure $\exists\, \alpha\in\mathbb{R} \mid f(\alpha)\neq 0$

$P(\alpha,y)$: $f(f(\alpha)+y) - f(f(\alpha)-y) = 4f(\alpha)y$ RHS é surgettivo

$\Rightarrow f(x)-f(y)$ assume tutto $\mathbb{R}$ al variare di x,y

$P(x, f(y)+z)$: $f(f(x)+f(y)+z) = f((f(x)-f(y))-z) + 4f(x)f(y) + 4f(x)z$

$P(y, f(x)+z)$; $\overset{\parallel}{\text{LHS}} = f(-(f(x)-f(y))-z) + 4f(x)f(y) + 4f(y)z$

Per quanto detto pongo $t := f(x)-f(y)$

$\Rightarrow f(t-z) + \cancel{4f(x)f(y)} + 4f(x)z = f(-t-z) + \cancel{4f(x)f(y)} + 4f(y)z$

$f(t-z) = f(-t-z) - 4tz$ $t = -z = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow f(x) = f(0) + x^2$, funziona $\forall f(0)$. ✓

PROBLEMI

1) A2 ISL 2001
2) IMO 1 2017
3) ENGEL 20 e 39 del capitolo 11
4) IMO 2 2022
5) A3 ELMO SL 2013
6) N4 ISL 2019
7) BMO 1 2019

CORREZIONI

A2 ISL 2001: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reali positivi

$\exists \infty\ n \mid \quad 1+a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$;

per assurdo: da m in poi $1+a_n \le a_{n-1}\sqrt[n]{2}$

CLAIM: $\sqrt[n]{2} \le 1+\frac{1}{n}\ \forall n \ge 1$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\ldots \ge 2$ ✓

$1+a_n \le a_{n-1}\sqrt[n]{2} \le a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\quad b_n := \frac{a_n}{n+1}$ è quella che mi serve

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \le \frac{a_{n-1}}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + b_n \le b_{n-1} \Leftrightarrow b_{n-1} - b_n \ge \frac{1}{n+1}$

$b_n - b_1 \le -\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \Leftrightarrow 0 < b_n \le b_1 - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}$

FATTO: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (fidatevi) $\Rightarrow$ assurdo. ✓

IMO 1 2017: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}^+$

tale che $a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{se } a_n = \square \\ a_n + 3 & \text{se } a_n \ne \square \end{cases}$ / per quali a_1 è periodica?

- se $a_1 \equiv 2\ (3) \Rightarrow$ sempre 2^a opzione
- se $a_1 \equiv 1\ (3)$; per assurdo $a_n \equiv 1\ (3)\ \forall n \ge 1$;

  $(3k-1)^2 \le a_m < (3k+2)^2 \quad \exists m' > m \mid a_{m'} = 3k+1$

  quando $3k+1 < (3k-1)^2 \quad k \ge 2$ funziona $\Rightarrow$ trovo sotto succ. dec. e quindi $\exists m \mid a_m \le 24$ $\quad 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$ non vanno bene
- se $a_1 \equiv 0\ (3) \Rightarrow a_n = 3b_n\ \forall n \in \mathbb{N}^+$, voglio dimostrare che finisce nel ciclo $(3,6,9)$, analogamente a prima $\exists m \mid a_m$ è piccolo. ✓

A3 ELMO SL 2013;

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$f(x)^{2013}=f(x^{2013})\ \forall x\in\mathbb{R}$

$x\in\mathbb{R},\ q\in\mathbb{Q}$ $\quad f(x+q)^{2013}=f\left((x+q)^{2013}\right)$, so che $f(q)=qf(1)$

$$LHS=(f(x)+f(q))^{2013}=\sum_{k=0}^{2013}\binom{2013}{k}f(x)^k f(q)^{2013-k}=\sum\binom{2013}{k}q^{2013-k}f(x)^k f(1)^{2013-k}$$

$$f\left((x+q)^{2013}\right)=f\left(\sum_{k=0}^{2013}\binom{2013}{k}x^k q^{2013-k}\right)=\sum_{k=0}^{2013}\binom{2013}{k}q^{2013-k}f(x^k)$$

$$\cancel{\binom{2013}{k}}f(x^k)=f(x)^k f(1)^{2013-k}\cancel{\binom{2013}{k}}\Rightarrow f(x^{2012})=f(x)^{2012}f(1)$$

$x>0\Rightarrow f(x)$ è concorde con $f(1)$

- $f(1)=0\Rightarrow f(x)=0\ \forall x\geq 0$ (dispari e estendo)
- $f(1)>0\Rightarrow f(x)>0\ \forall x>0$
- $f(1)<0\Rightarrow f(x)<0\ \forall x>0$

$f(x)=cx\Rightarrow c^{2013}=c\Rightarrow c\in\{0,\pm 1\}$.