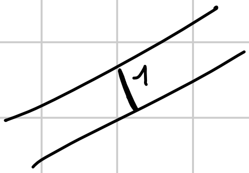
Combinatoria 1 Medium [Tess]

Titolo nota

Combinatoria geometrica

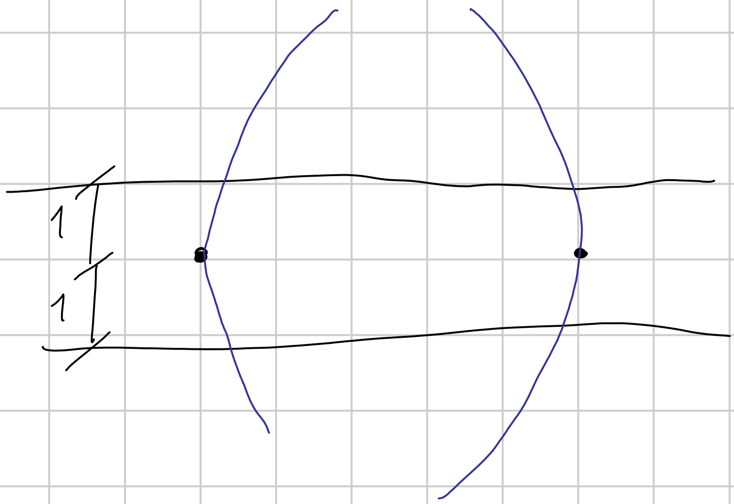
Es (vecchio BMO): Sono dati n punti nel piano con $n \geq 3$ t.c. comunque scelti 3 punti $\exists$ una striscia di larghezza 1 che li contiene tutti e 3. Dimostrare che tutti i punti stanno dentro una striscia di larghezza 2.

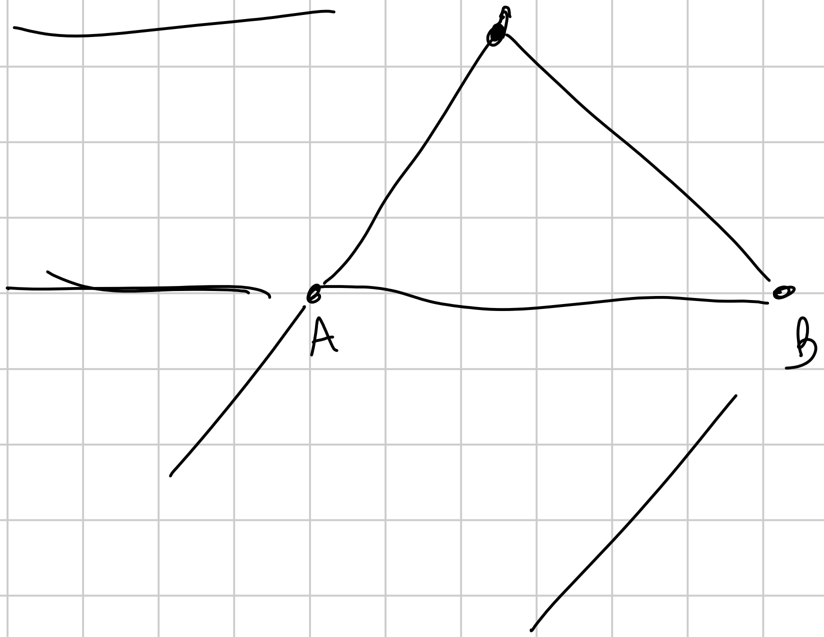


Oss: il problema ci chiede di dimostrare che un oggetto esiste con una certa proprietà.

Idea da casa: considerare un oggetto il più grande o il più piccolo possibile rispetto una quantità Q e usare questo oggetto per costruire quello voluto dalla tesi.

Sol: Tra i finiti segmenti che congiungono 2 dei punti dati, ne prendo 1 di lunghezza massima





L'altezza minore è relativa alla base maggiore

e dunque la striscia dell'ipotesi è larga almeno quanto questa altezza.

Es: Sono dati n punti nel piano distinti

$\forall$ coppia, coloro di rosso il punto medio di loro due

Determinare il minimo numero di punti rossi del piano.

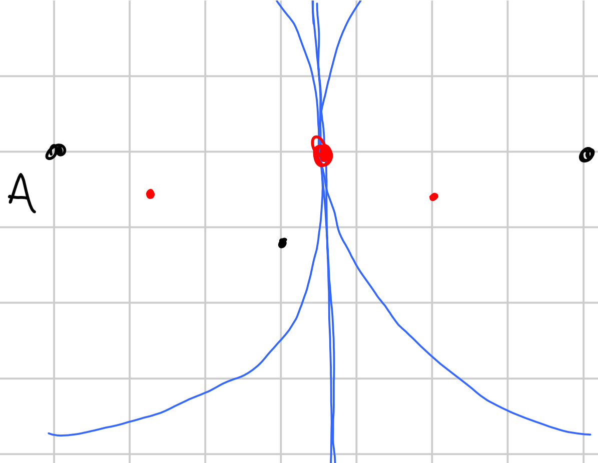
Sol:

1^a costruzione: prendere n punti allineati lungo l'asse reale sui punti a coordinate intere, pari da 2 a $2n$

allora i punti medi stanno lungo l'asse e hanno coordinate intere tra 3 e $2n-1$ $\Rightarrow$ sono $\leq 2n-1-3+1$
$= 2n-3$

Ora sappiamo che il min. è $\leq 2n-3$

Per il bound dal basso prendiamo il segmento più lungo



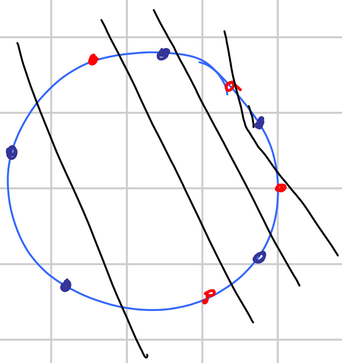
Quindi ho almeno $1 + (n-2) + (n-2) = 2n-3$

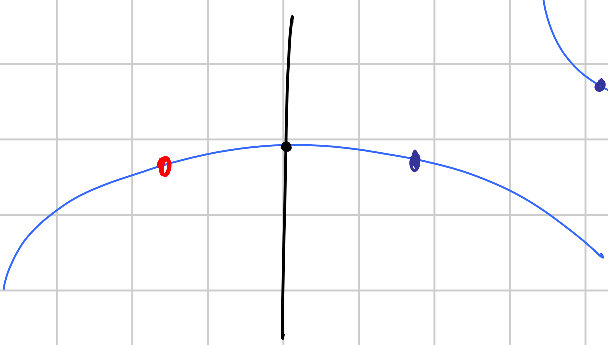
$\Rightarrow \min \geq 2n-3$

Es (IMO 2013 . 2) Una config. colombiana è un insieme di n punti rossi e $n+1$ punti blu sul piano tali che sono a 3 a 3 non allineati.
Ci viene chiesto di dividere il piano in regioni tagliandolo con k rette in modo che in ogni regione i punti della config. col. al suo interno siano monocromatici.

Quant'è il minimo k che mi consente ciò?

Sol: 1ª costruzione





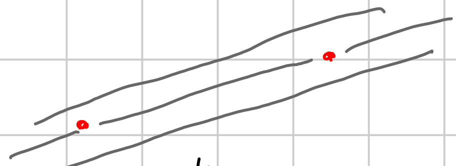
Quindi mi servono almeno $\frac{2n}{2}$ rette.

Quindi il minimo $k \geq n$.

Ora lavoriamo sull'altro bound, quindi:
$\forall$ configurazione vogliamo usare k rette per separare ogni colore.

Sicuramente mi basta usare $\leq 2n$ rette

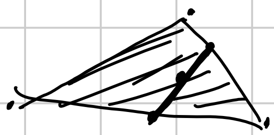
Se prendo 2 punti rossi
c'è una striscia che li separa dagli altri:



Se n è pari, applico questa procedura $\frac{n}{2}$ volte

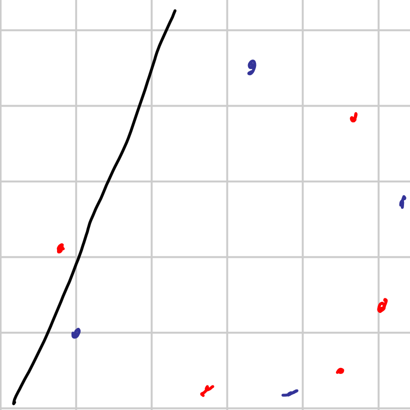
Se n è dispari dobbiamo inventarci anche qualcos'altro

Def: l'inviluppo convesso di un insieme di punti del piano è il più piccolo insieme convesso che contiene tutti i punti dati.



Tornando al problema, consideriamo l'inviluppo convesso dei punti della mia conf. col.

sul bordo



se c'è 1 punto rosso lo separo con una retta altrimenti tutti i punti (≥ 3) sul bordo sono blu

e ne posso separare 2 con una retta

rimango con n rossi e $n-1$ blu

costruisco una nuova conf. col. scambiando i colori
e ora $n-1$ è pari, mi bastano $n-1$ rette
per suddividerli.

Es: Sono dati n piani nello spazio che lo dividono in regioni alcune finite alcune no
Determinare al massimo quante regioni si formano.

Sol: pongo 1 goccia d'acqua all'interno di ogni regione

l'acqua cade e succede
- l'acqua si ferma sul punto più basso della regione
- l'acqua continua a cadere

(a meno di una piccola rotazione)

Nel primo caso a ogni regione corrisponde l'intersezione di 3 piani $\Rightarrow \leq \binom{n}{3}$

Per le altre metto un piano perfettamente orizzontale che raccolga tutta l'acqua.

Quindi ognuna delle altre regioni senza fondo corrisponde a una regione del piano che ho aggiunto.

E ora mi sono ricondotto a un problema di rette nel piano e regioni nel piano.

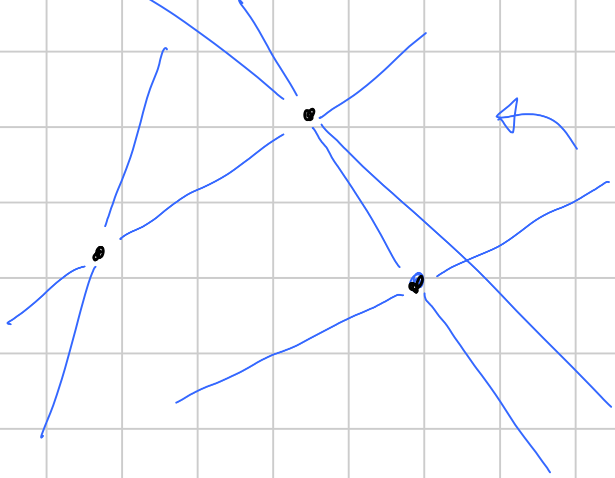
Similmente a prima ci saranno $\leq \binom{n}{2}$ regioni con un punto più basso e altre regioni senza fondo

e mi riduco a un problema di n punti in una retta $\Rightarrow \leq n+1$ regioni

In totale ho $\leq \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ regioni

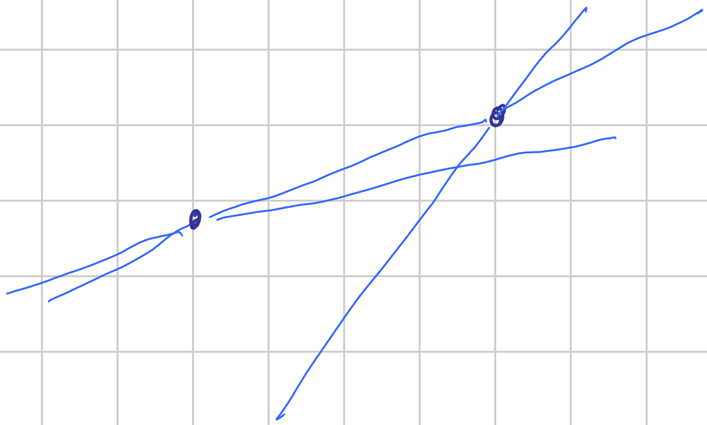
---

Es (IMO 2011 . 2) Un "mulino a vento" è il dato di $n \geq 3$ punti nel piano a 3 a 3 non allineati e una retta che passa per esattamente un punto. La retta ruota attorno a questo punto in senso antiorario fintanto che non tocca un secondo punto. Appena lo tocca la retta ruota attorno al nuovo punto e il processo si ripete.

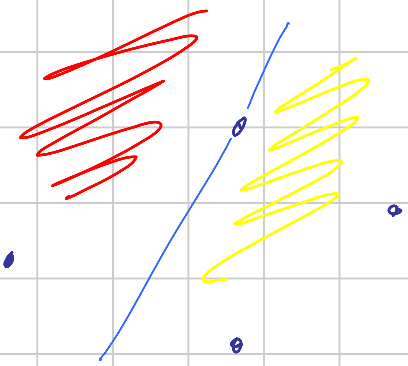


Dimostrare che comunque dato un "mulino a vento" è possibile (prima di lasciar ruotare la retta) scegliere un'inclinazione della retta in modo che ogni punto sia scelto come fulcro infinite volte.

Sol: Si cerca un'invariante!

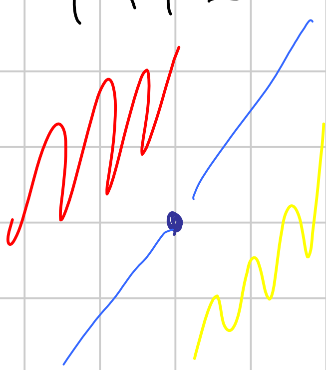


L'invariante deve essere una funzione di stato



$Q := \#$ punti rossi $- \#$ punti gialli

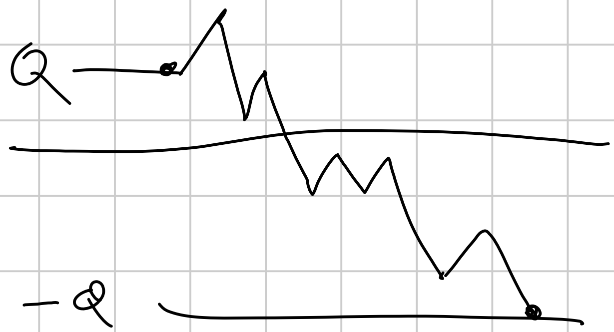
Osserviamo che $\forall$ punto esiste un'inclinazione della retta t.c. $|Q| \leq 1$



Inizialmente $|Q|$ può essere molto grande

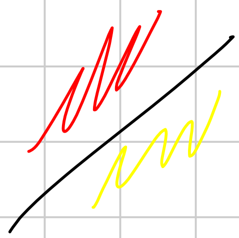
Se la faccio ruotare, ad ogni punto incontrato Q sale o scende di esattamente 2

Quando ho fatto $180°$, Q ha cambiato il segno

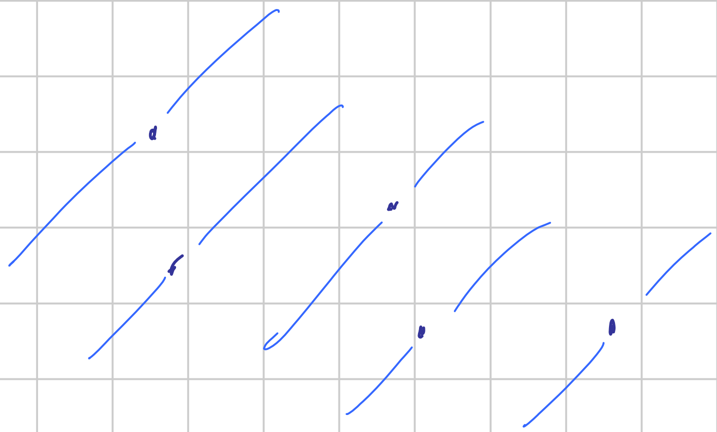


Scelto il valore iniziale di Q, vogliamo mostrare che ogni punto viene scelto come fulcro per almeno un'inclinazione.

Se scelgo un'inclinazione, tipo:

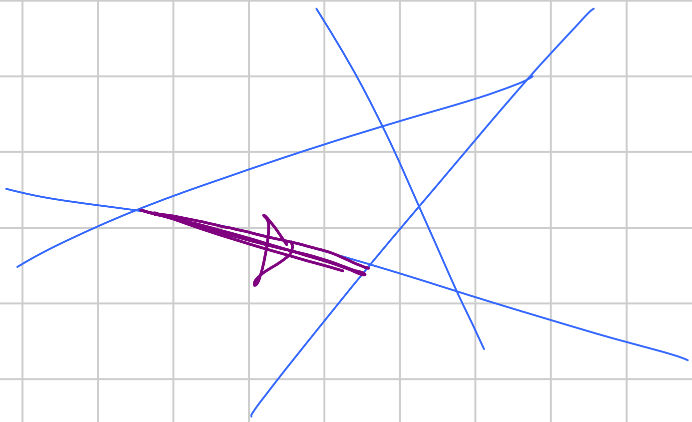


dato che Q è invariante, la retta passa per un punto in modo che Q sia uguale a quanto avevo scelto all'inizio.

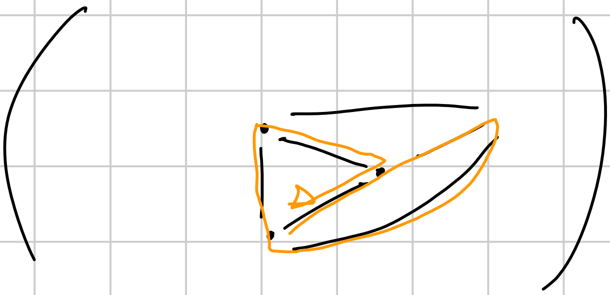


Ora faccio partire la retta nel punto che mi è stato dato con un'inclinazione tale $Q = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$
il punto P è visitato ogni volta che l'inclinazione della retta è una di quelle per cui $Q = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

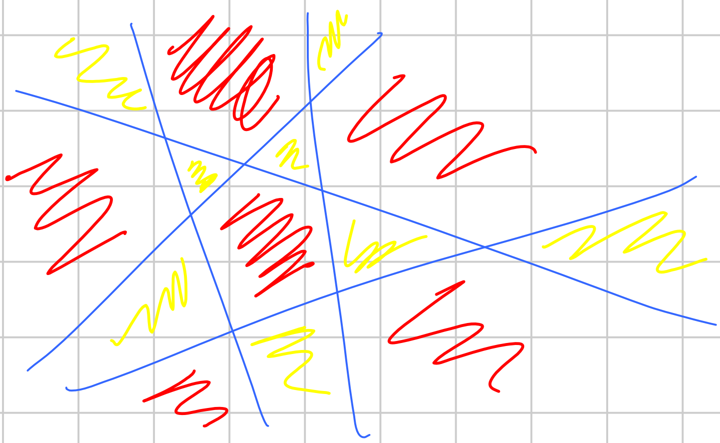
Es (EGMO) Ci sono n rette nel piano a 3 a 3 non concorrenti. C'è una lumaca che cammina lungo queste rette. Inizialmente parte da un punto di queste rette. Ogni volta che arriva a un incrocio, cambia retta e sceglie a caso il verso.
Dimostrare che ogni segmento fra 2 incroci vicini, è sempre percorso nello stesso verso.



Sol: Cerco un'invariante!



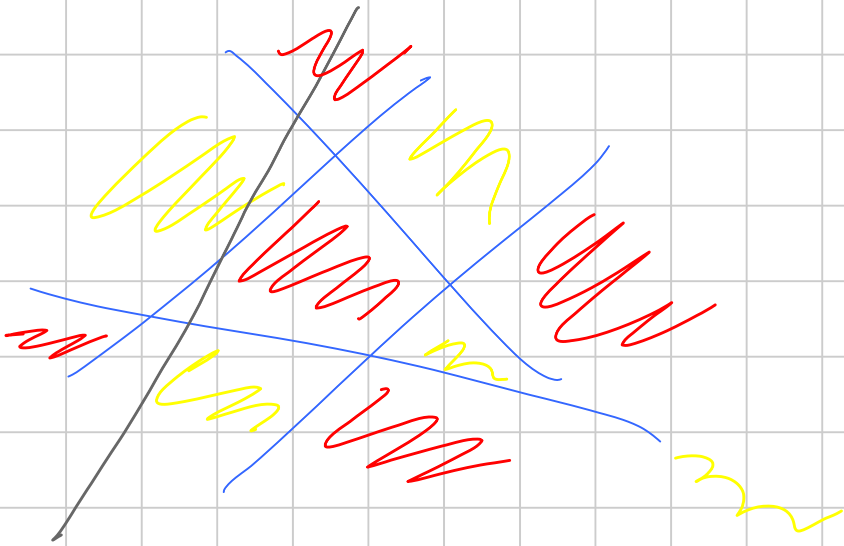
La costruzione dell'invariante prevede di colorare il piano



Ogni coppia di regioni che condividono un lato devono avere colori diversi.

Si può fare induttivamente

Se ho n rette, ne tolgo una, per ipotesi induttiva avevo una coloraz. buona con n-1 rette



Basta cambiare colore a un semipiano.

Nel piano cartesiano, ogni retta ha una equazione che la definisce $\big(\underbrace{ax+by-c}_{E_r(x,y)}=0 \big)$

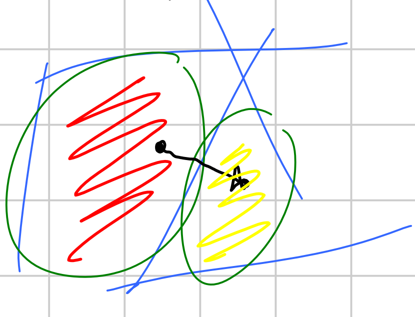
Costruisco il polinomio $P(x,y)=\prod_{r \text{ retta}} E_r(x,y)$

I punti delle regioni sono coppie (x_0,y_0) t.c.

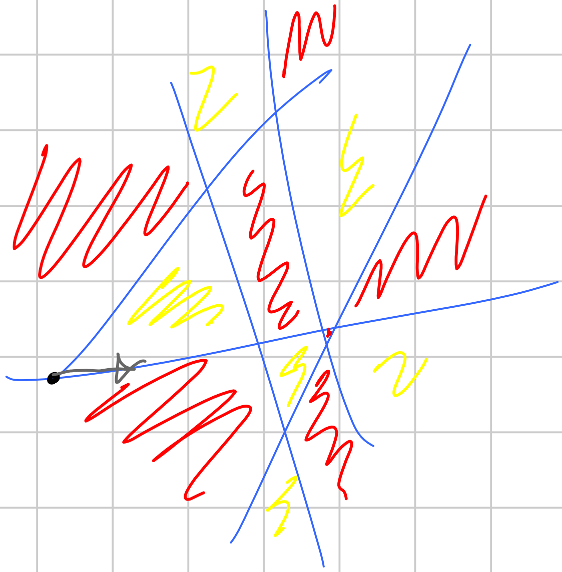
$P(x_0,y_0)$ non si annulla.

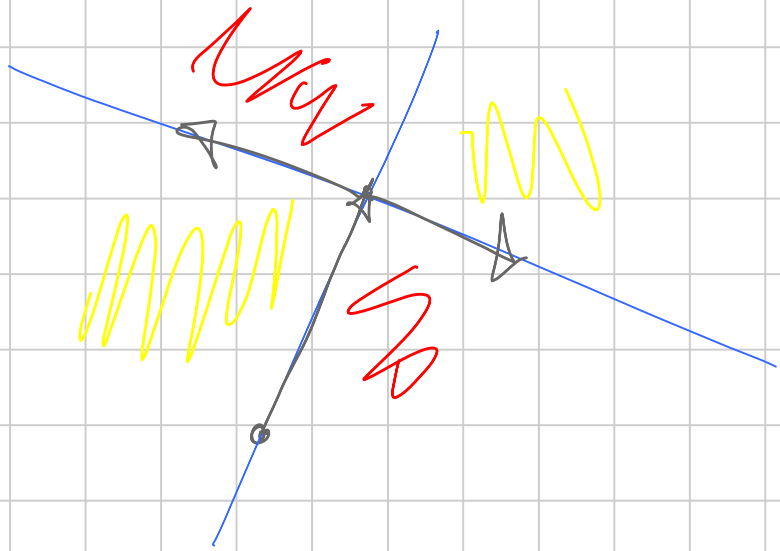
Coloro di rosso quando $P(x_0,y_0)>0$

" giallo quando $P(x_0,y_0)<0$



Come concludo?





Esistenza non-costruttiva

Es. Dimostrare che esiste ....

e se poi non si riesce a identificare esattamente l'oggetto, servono metodi non costruttivi.

Anche: "Dire se esiste".

$G = (V, E)$ { non orientato / orientato }

{ pseudografo / multigrafo }

grado, grado in uscita, in entrata

$\sum d(v) = 2\#E$ ⇝ $\sum \text{ind}(v) = \#E$

⇝ $\sum \text{outd}(v) = \#E$

$W \subset V$ è indipendente se tra 2 elem. di W non ci sono mai archi

$F \subset E$ indipendente $\doteq$ mai 2 elem. di F hanno un estremo in comune.

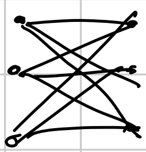
ricoprimento di G = ins. di vertici che toccano tutti i lati

1-fattore di G = ins. di lati che toccano tutti i vertici (indip.?)

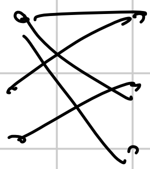
Un grafo può essere colorato < V, E

pesato < V, E

Grafo bipartito $\doteq (V,E)$ t.c. $V = V_1 \cup V_2$ non vuote t.c non ci sono archi interni a V_1 o a V_2

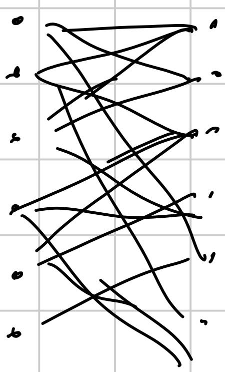


(grafo bip. completo ⇝ massimo numero possibile di archi)



Problema dei matrimoni

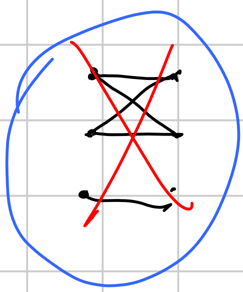
n n



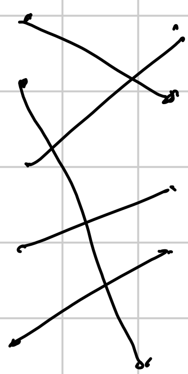
(cerco un 1-fattore)

o

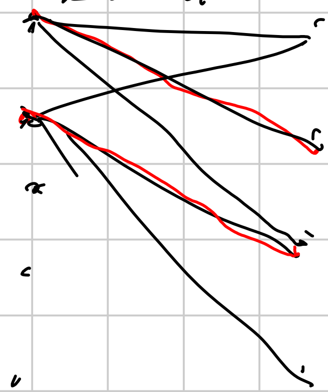
perfect matching



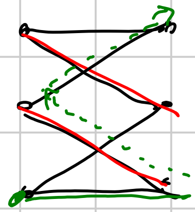
k=1



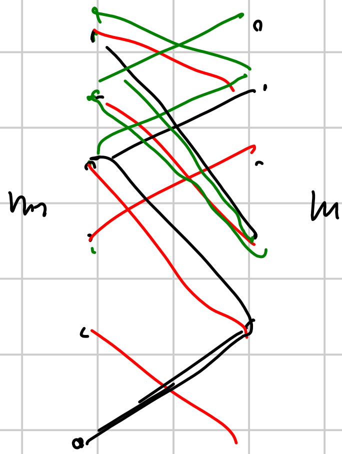
[ciascuno $\xrightarrow{k}$ ciascuno $\xleftarrow{k}$] ogni vertice ha grado k

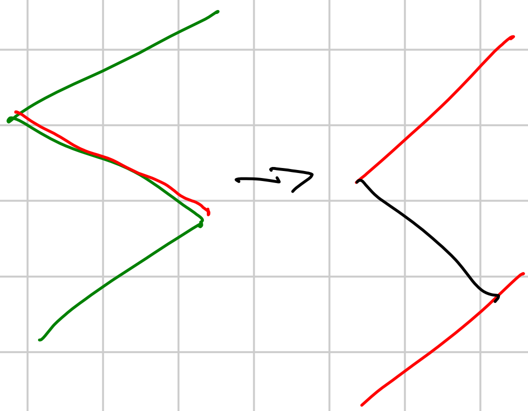


legami "a caso"?

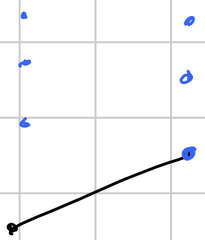


"augmenting path"





Per assurdo, se non ho un augmenting path



t.c. tutti i colleg. di questi l arrivano tra gli m sposati a destra e tutti quelli a destra di questa componente

$l+1$ a sin. $\geq l$ a destra

$\Downarrow$

$(l+1)k$ archi "uscenti"

proprio l

kl archi

E se $\#V_1 \neq \#V_2$ e i gradi sono diversi?

Se vogliamo <u>sperare</u> di farcela, <u>non</u> deve accadere

che $\exists A \subset V_1 \quad |A| > l$ t.c. i collegamenti da

A arrivano a $\leq l$ punti

Teorema di Hall (lemma dei matrimoni)

se G è bipartito $V = X \cup Y$ e $|X| \leq |Y|$

e voglio scegliere archi indipendenti per X

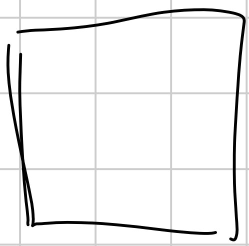
e $\forall A \subset X$ i suoi "vicini" sono almeno $|A|$

lo posso fare.

$A \subset V$ vicini$(A) = \{v \in V$ t.c. sono collegati a almeno un elemento di $A\}$

Prob.

$n \times n$



con ogni riga e in ogni colonna k caselle speciali $k = 1, 2 \dots n$

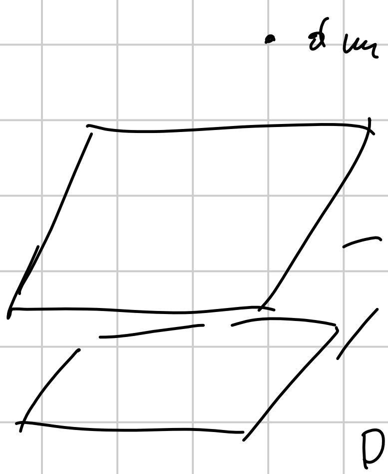
Dim. che esiste una scelta di caselle speciali che siano 1 per riga e colonna

righe

colonne

52 carte 13 mazzetti da 4

- dim. che posso scegliere 13 valori diversi 1 carta per mazzetto
- dim. che lo posso fare 4 volte



area 2022 divisi in 2022 poligoni di area 1 in modo a priori diverso

Dim. che posso ficcare 2022 spilli vertic. in modo che tutti i 4044 poligoni siano bucati

Insieme parz. ordinato $\xrightarrow{<}$ $\xrightarrow{\leq}$:

A

$C \subset A$ catena se tutti gli elementi sono confrontabili

$S \subset A$ anticatena se nessuno è confrontabile con nessun altro

se k è il numero di elementi di una anticatena di card. massima

allora posso trovare k catene disgiunte la cui unione è tutto

Dilworth

Mirsky e viceversa

se k è il minimo numero di catene disgiunte che può coprire A

allora la card. massima di una anticatena è k

($\Rightarrow$ Erdös-Szekeres: se avete n^2+1 numeri in una fila

- o esistono $n+1$ di questi in ordine crescente
- " " " " decrescente)

n^2+1 intervalli di $\mathbb{R}$

- o esistono $n+1$ con un punto in comune
- o esistono $n+1$ in fila disgiunti