C2 Medium [Tess]

Titolo nota

Tecniche di non esistenza e costruzioni

Algoritmi Greedy

Es (BMO 2012.3): $n > 0$

$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \dots, 3^n\}$$

detto $X \subseteq P_n$, S_X è la somma degli elementi di X.

Dimostrare che $\forall\ 0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$ $\exists X \subseteq P_n$ t.c. $S_X \le y \le S_X + 2^n$.

Sol: Idea: usare un algoritmo greedy
Ad ogni passo k, sia $a \in P_n$ il più grande numero t.c. $a \notin X_{k-1}$, e voglio che $a < y - S_{X_{k-1}}$

e costruisco $X_k := X_{k-1} \cup \{a\}$.

Basta dimostrare che appena termino, trovo $X := X_{finale}$ e voglio vedere che questo funziona.

Controlliamo cosa succede quando l'algoritmo termina
deve succedere che $2^n \in X \ \vee\ 2^n > y - S_X$.

($S_X \le y$ è vero ad ogni passo, compreso quello finale)

($y \le S_X + 2^n$ è vero nel secondo caso)

Se per assurdo $2^n \in X$ ma $S_X + 2^n < y$

Osserviamo che non può essere $X = P_n$
perché $S_{P_n} = 2^n + \dots + 3^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

$$y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

$\Rightarrow \exists$ un $a \in P_n$ t.c. $a \notin X$

$$3^n,\ 3^{n-1}\cdot 2,\ \dots \underbrace{\boxed{\ -\ -\ }}_{a}\ \underbrace{\qquad\quad ,\ 2^n}_{\in X}$$

Prendiamo a il più piccolo numero in P_n t.c. $a \notin X$

allora prima di inserire il numero dopo a, mi rimaneva

$$y - S_{X_k} \ge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alla fine}}}{2^n} + \underbrace{2^n + 2^{n-1}\cdot 3 + \dots + 2^k \cdot 3^{n-k}}$$
$$= 2^k\left(2^{n-k} + 3^{n-k+1} - 2^{n-k+1}\right)$$

il quel momento in teoria a era disponibile

$$a = 2^{k-1}\cdot 3^{n-k+1}$$

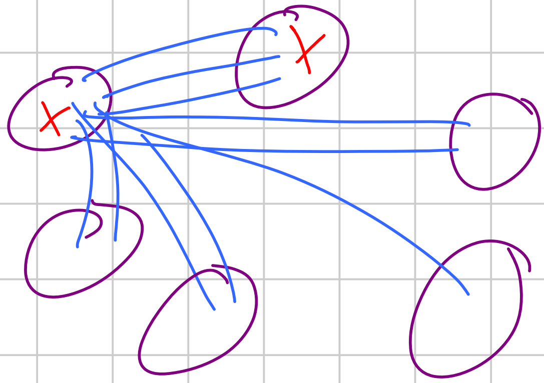
quindi $a > y - S_{X_k} \ge 2^n + \underbrace{2^k \cdot 3^{n-k+1}}_{2a} - 2^{n+1}$

$= 2a - 2^n \ge a$, assurdo.

Problema: Sia G un grafo finito t.c. non contiene sottografi K^k (cioé k-cricche). $|V| = n$

Quanto può essere $|E|$ al massimo?

Sol: Posso costruire un grafo $k-1$ -partito massimale



Ovviamente, se prendo k vertici, per Pigeonhole 2 stanno sulla stessa parte e quindi non sono collegati.

Quanti archi sono?
Se le taglie sono $n_1, \dots, n_{k-1}$ sono t.c.
$n_1 + \dots + n_{k-1} = n$ e il numero di archi è

$$\frac{\sum_{i<j} n_i n_j}{\binom{k-1}{2}} \leq \left(\frac{\sum_i n_i}{k} \right)^2$$

l'ugnaglianza si ha per n_i vicini fra loro.

Per mostrare che un grafo massimale privo di k-cricche è $k-1$ partito, cerco un algoritmo per modificare il grafo di partenza aggiungendo archi senza formare k-cricche.

Dato $v \in V$ divido i vertici in 2 gruppetti

$A = \{ \text{gli altri} \} \ni v$

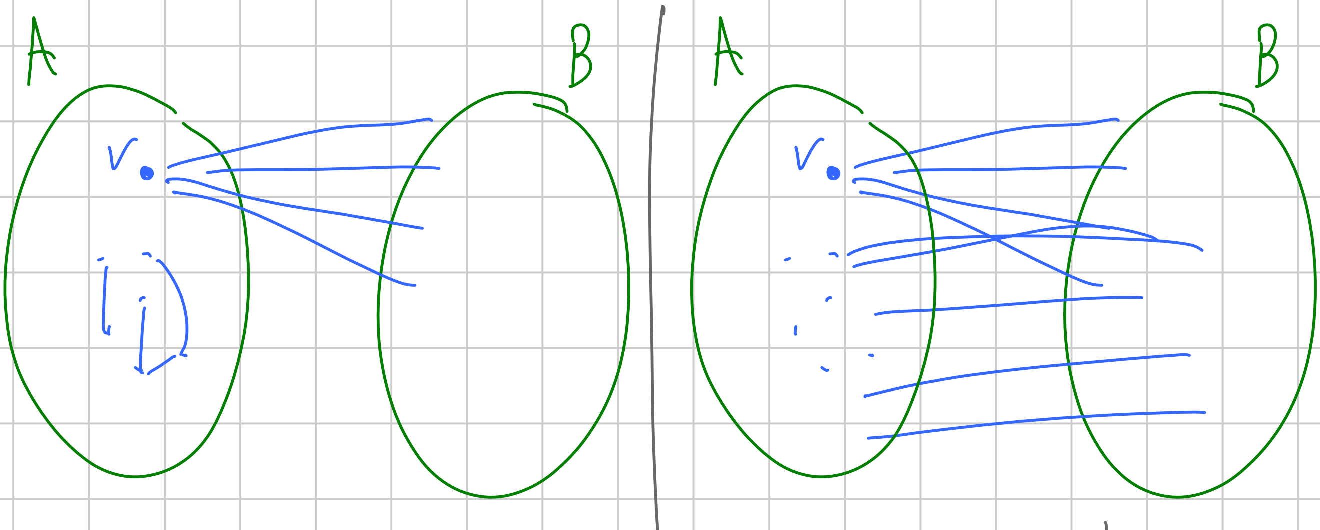
$B = \{ \text{i vicini di } v \}$

se fosse k-1 partito mi aspetto che A sia un insieme senza archi

Allora ad ogni passo, cancello tutti gli archi di A e aggiungo tutti gli archi fra A e B.

Devo verificare che

- non compaiano k-cricche
- $|E|$ aumenti



una k-cricca interseca A in al più un vertice

o esisteva da prima oppure c'è una k-1 cricca in B

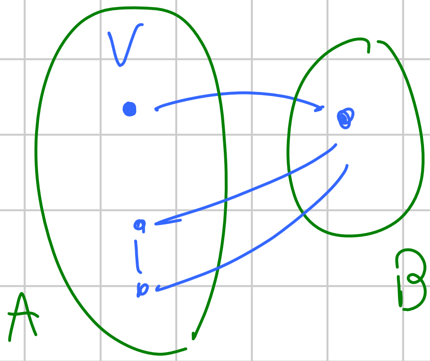
ma in tal caso $v \cup \{\text{cricca}\}$ è una k-cricca.

Controlliamo che $|E|$ sia aumentato

sto perdendo gli archi interni ad A

sto aggiungendo gli archi fra A e B (quelli mancanti)

Non sembra sempre vero



Scelgo v di grado massimo: in questo caso

Il grado di un vertice in A prima era $\leq \deg(v) = |B|$

quindi dopo l'operazione il grado di $v = |B|$.

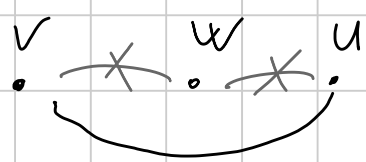
Ora vediamo i vertici in B: il loro grado non sta scendendo $\Rightarrow$

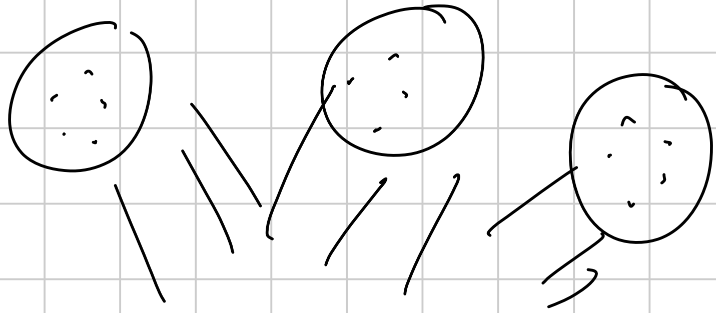
$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg v + \sum_{v \in B} \deg v \geq \text{di prima}$$

In realtà si vede che il $|E|$ aumenta strettamente se c'erano archi in A.

L'algoritmo ad un certo punto si ferma.

Dico che $v, w \in V$ sono equivalenti se non sono vicini e hanno lo stesso grado

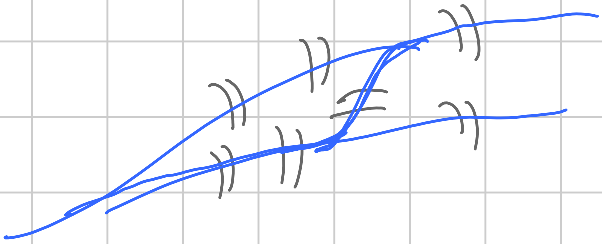




devo solo sistemare i vertici di grado < max.

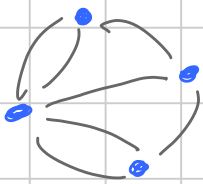
Cammini Euleriani

Konisberg:



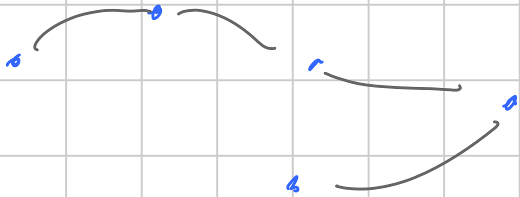
È possibile camminare su ogni ponte una sola volta?

Il buon Eulero costruì un grafo



Def: Un cammino euleriano è un cammino attraverso un grafo che visita ogni arco una sola volta.

Oss: se effettuo un cammino



i gradi del grafo i cui archi sono quelli su cui ho

camminato sono : dispari per la partenza e l'arrivo
e pari per tutti gli altri
(perché ∀ vertice se entro, esco subito dopo)

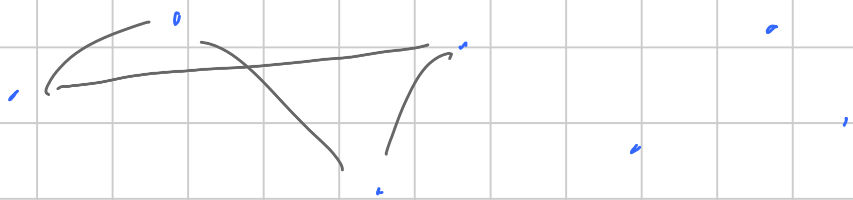
Questa osservazione mi dà una condizione necessaria

In realtà è anche sufficiente (ammesso che il grafo sia connesso)

per costruire tale cammino.
parto e termino nei 2 vertici di grado dispari
e prendo un cammino più lungo possibile
che non ripercorre i lati.

Se per assurdo ci sono archi non visitati:

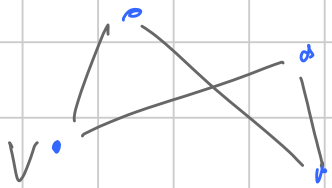
sia G' il grafo senza gli archi visti



tutti i gradi di G' sono pari

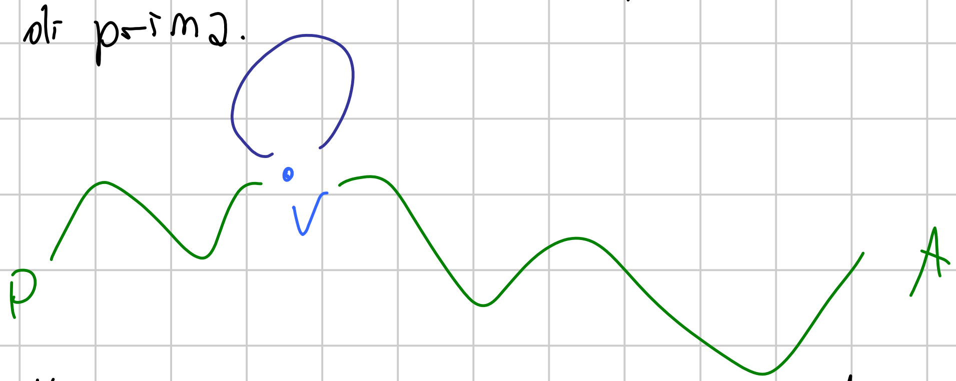
Ogni componente connessa di G' contiene un vertice v
del cammino che avevo preso.

Quando ho visitato v, avrei potuto allungare il cammino:



camminando a caso da v, senza ripercorrere archi prima o poi mi fermo (gli archi sono finiti) per questioni di grado devo essermi fermato in v

Ora posso aggiungere questo circuito al cammino di prima.



Il nuovo cammino cammino è più lungo. Assurdo!

Es (IMO 2020.3) $n > 0$, ci sono $4n$ biglie numerate da 1 a $4n$ e colorate in modo che per ognuno degli n colori ce ne siano 4.
Dimostrare che si possono separare in 2 sacchetti di $2n$ biglie ciascuno, in modo che ogni sacchetto
- abbia la stessa somma
- abbia sempre 2 biglie per colore.

Sol: Per sistemare la somma, inizio con l'accoppiare 2 biglie con somma $4n+1$
$(1, 4n)$ $(2, 4n-1)$, - - - -

In totale ho $2n$ coppie e le devo ripartire nei 2 sacchetti.

Vediamo i colori

Costruisco un grafo: i vertici sono i colori, gli archi sono queste coppie

(è un multigrafo in cui sono possibili loop e collegamenti doppi fra nodi)

Oss: il grado di ogni colore è 4

Ogni componente connessa ammette un cammino euleriano. (anzi, un circuito)

Ora posso alternare gli archi fra i 2 sacchetti; per poterlo fare su ogni componente connessa devo avere un numero pari di archi.

$$2|E| = \sum_v \deg(v) \equiv 0 \ (4).$$

Double-Counting

Tante volte non riesco a contare esattamente
ma riesco a scrivere 2 stime.

$$f(\text{parametri}) \le Q \le g(\text{parametri})$$

stimo in un modo

stimo in un altro modo

a me interessa la disug. $f \le g$.

Es (IMO 2018.3) Un triangolo di anti-Pascal

è un insieme di numeri interi scritti su n righe

$\left(n=2 \quad \begin{matrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{matrix} \right)$ t.c. $\forall$ numero k scritto in una

riga che sia la più bassa, i due interi scritti subito
sotto di lui (a, b) vale che $k = |a-b|$

Esiste un triangolo di anti-Pascal con 2018 righe
in cui compaiono tutti i numeri da 1 a $\binom{2018+1}{2}$?

Sol:

$$\begin{matrix} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{matrix}$$

Se un numero grosso non sta in fondo
c'è n'è uno di più grosso appena sotto

$$\begin{array}{cc} & k \\ a & b \end{array} \quad e \quad a > b$$

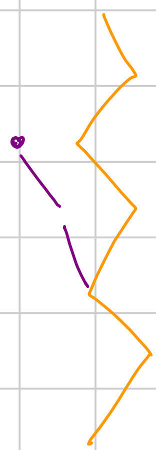
$$\Rightarrow k = a - b \ , \quad a = k + b$$

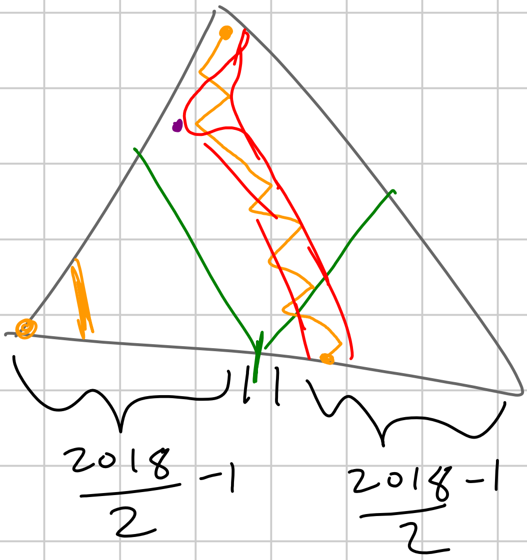
Data una catenina, la somma dei rossi = all'ultimo giallo

$$Q = \text{l'ultimo numero giallo} \leq \binom{n+1}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\binom{n+1}{2}} \leq \text{la somma dei rossi} = Q$$

Quindi deve capitare che l'ultimo giallo è il numero più grosso
e i rossi sono esattamenti $1, \dots, n$





Oss: la catenina dalla cima non entra in entrambi i triangoli (neanche con i rossi)
Prendiamo la catenina dalla cima del triangolo che

non è toccato dalla catenina principale.

Lo stesso conteggio in questa catenina mi dice che

$$(n+1) + \dots + \left(n+\frac{n}{2}-1\right) \le \text{somma dei rossi della catenina laterale} \le \binom{n+1}{2} - 1$$

$$\left(\frac{n}{2}-1\right) n + \binom{\frac{n}{2}}{2} \le \binom{n+1}{2} - 1$$

coeff direttivo:

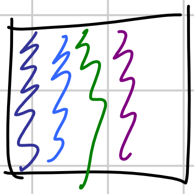
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{2}$$

Es (Arg MO) In una tabella $n \times n$ le caselle sono colorate con k colori. Alla fine

Non ci sono mai 3 caselle monocromatiche disposte:

Quanto vale k al minimo?

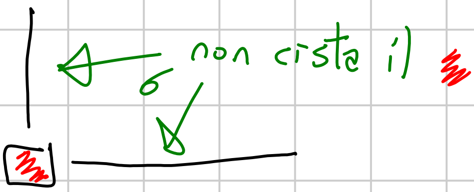
Sol: Miglioriamo i bound dal basso e dall'alto

dall'alto:  $\Rightarrow k \leq n$

dal basso tentiamo un pigeonhole:

Se c'è un colore rappresentato troppe volte dovrei trovare 3 caselle monocromatiche 

forse non ci stanno più di $2n-1$ caselle monocromatiche

Se 

Contiamo l'insieme delle righe e colonne in 2 modi diversi

$$2n = \text{righe} \cup \text{colonne} \geq \#$$

possiamo costruire una mappa $f: \{\ \} \to \{\text{righe e colonne}\}$ è iniettiva

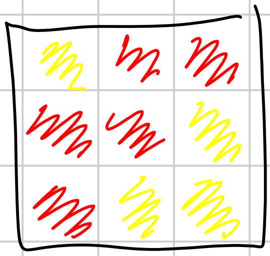
Sommo sui colori

$$2nk \geq \text{caselle colorate} = n^2$$

$$k \geq \frac{n}{2}$$

$\min \in \left[\frac{n}{2}, n\right]$

$n=3$



Forse il bound dall'alto è molto largo

Qui sto usando $2n-1$ caselle per colore, circa

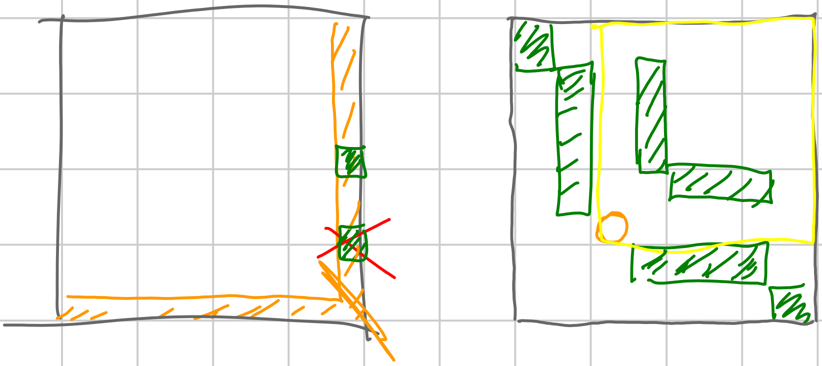
dunque trovo circa $\left\lfloor \frac{n^2}{2n-1} \right\rfloor$ colori $\sim \frac{n}{2}$

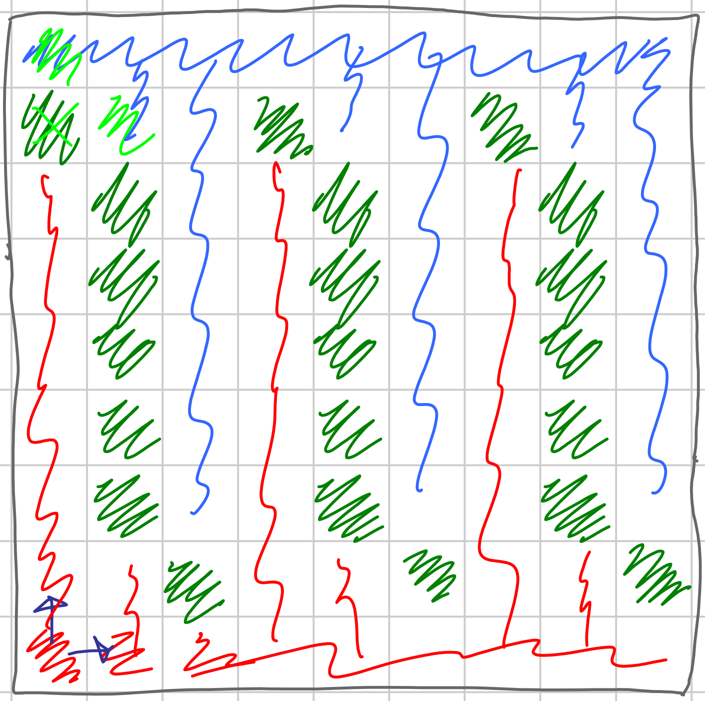
Es (IMOSL 2021 . C7) In una tabella $3n \times 3n$

ci sta una rana che saltella solo verso l'alto o verso destra di 1. Parte dall'angolo in basso a sinistra e arriva nell'angolo opposto.
Alcune caselle sono "appiccicose".
Un insieme di caselle è detto "bloccante" se, rese le sue caselle appiccicose, si impedisce la rana nel suo tragitto
Un insieme bloccante è minimale se, al solito, tolta una casella, non è più bloccante.

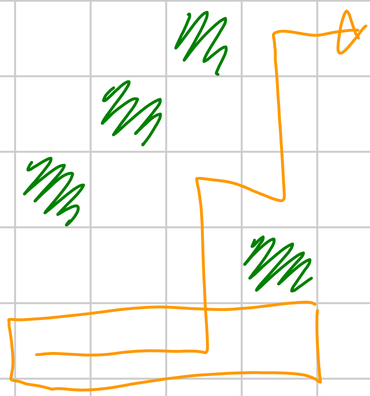
- esibire un insieme bloccante minimale con $\geq 3n^2 - 3n$
- mostrare che ogni " " " ha $\leq 3n^2$.

Sol:





Sto usando $\frac{9n^2-3n-3n}{3} = 3n^2-2n$ caselle.



Oss: ogni casella verde è raggiunta da sinistra o dal basso da una rossa (e sym da una blu).

Contiamo in quanti modi si può uscire da una casella rossa =: Q

$$\# + \# \ \cancel{\geq} \ Q \leq 2\#$$

$$\# - 1 + \# \leq$$

↑ tolgo la partenza

$$R + V - 1 \leq 2R$$

$$V \leq R + 1$$

.....

$$V \leq B + 1$$

$$9n^2 \geq V + R + B \geq 3V - 2 \qquad V \leq \frac{9n^2+2}{3}$$

$$\Rightarrow V \leq \left\lfloor \frac{9n^2+2}{3} \right\rfloor = 3n^2.$$

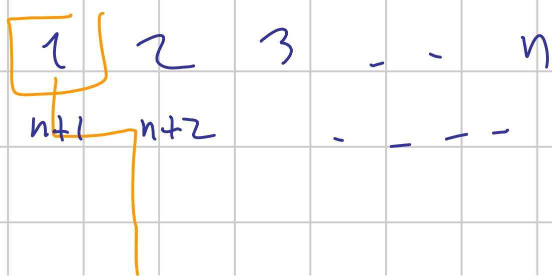
Es (IMO 2022.6) Un "quadrato nordico" è una tabella $n \times n$ dove compaiono tutti gli interi da 1 a n^2.

Una "valle" è una casella le cui adiacenti per lato contengono un numero più grande.

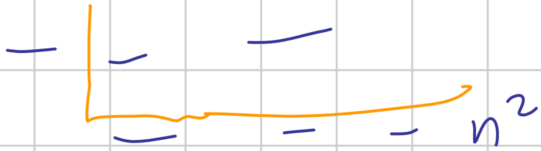
Un "cammino ascendente" è una sequenza di caselle adiacenti che inizia da una valle.

Al minimo quanti cammini ascendenti esistono in un quadrato nordico?

Sol:

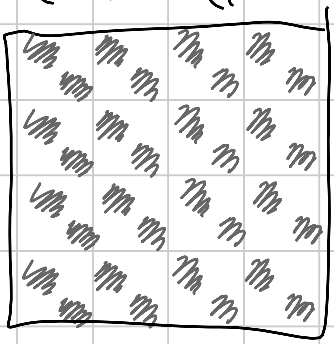


Ci sono molti cammini $\binom{2n-2}{n-1}$



cresce più dei polinomi

$\binom{n}{2}$ $\binom{n}{1000}$



I cammini ascendenti sono lunghi 1 o 2 caselle.

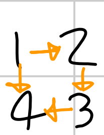
Quanti sono?

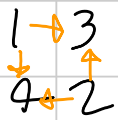
$$\sim \frac{n^2}{2} + 2\cdot n(n-1) \sim \frac{5}{2}n^2$$

$$\min \lesssim \frac{5}{2}n^2$$

Oss: se parto da una casella qualsiasi posso scendere fino a trovare una valle. Il cammino al contrario è ascendente.

Oss $\Rightarrow$ $\min \geq n^2$





5 cammini

6 cammini

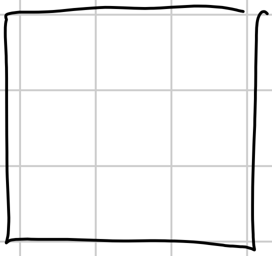
$\forall$ coppia di caselle adiacenti c'è una freccia dunque trovo un cammino $\forall$ freccia (usando l'oss.)

$$\min \geq \#\to = 2n(n-1)$$

$$2n(n-1) \leq \min \leq \frac{n^2}{2} + 2n(n-1)$$

ci sono anche i cammini lunghi 1 $= \#$valli

$$1+2n(n-1) \le \#\text{valli} + 2n(n-1) \le \min \le \frac{n^2}{2} + 2n(n-1)$$



Vogliamo riempire il quadrato in modo che $\nexists$

Un "picco" è una casella più grande delle vicine.

Una "valle debole" " più grande di esattamente 1 vicina

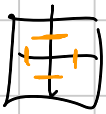
L'obiettivo è costruire un quadrato nordico usando
- 1 valle
- alcuni picchi
- valli deboli

Oss: non possono esserci 2 picchi adiacenti.

Togliamo i picchi dalla config. minimale

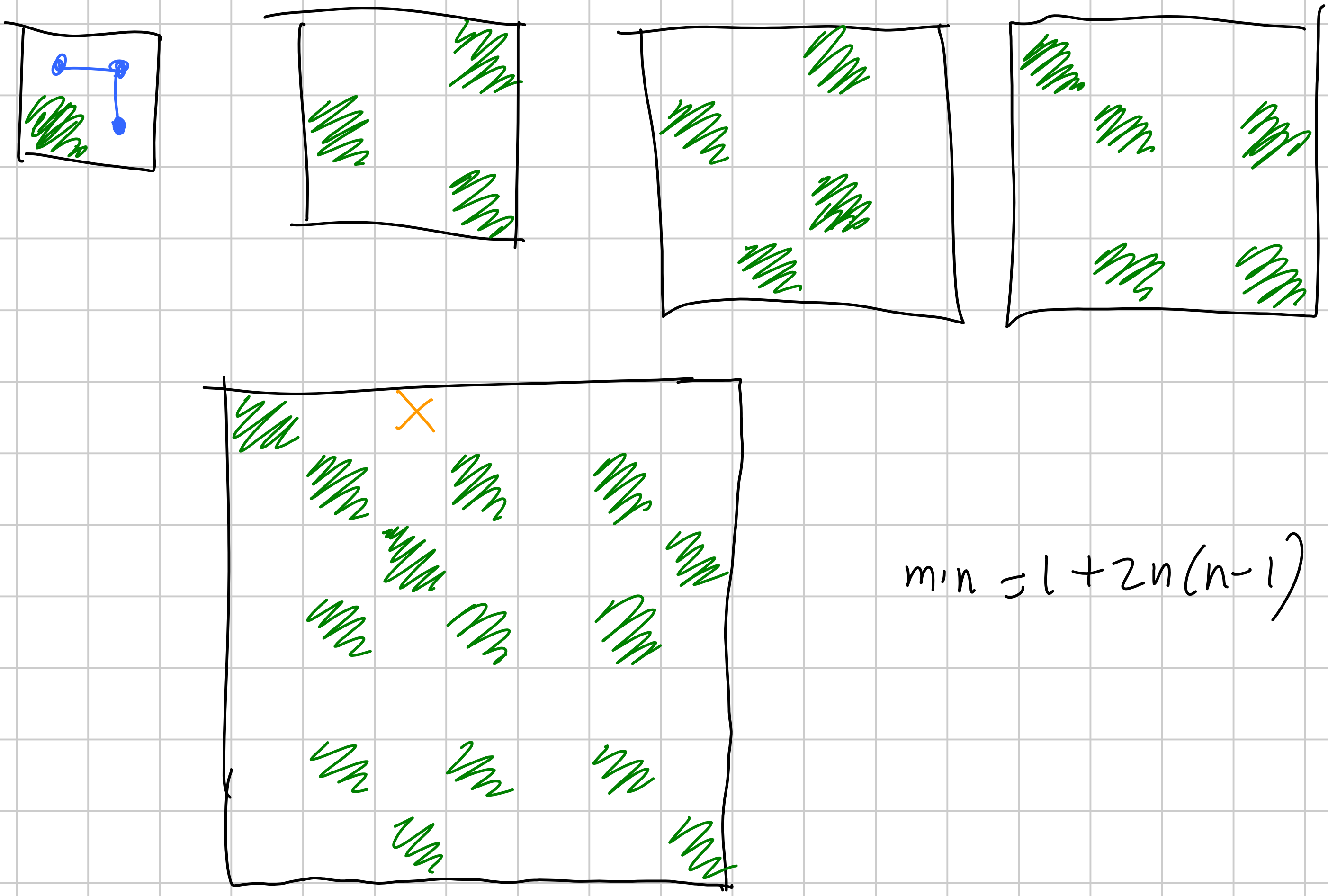
Ad ogni casella deve arrivare ≤ 1 freccia

Inoltre la tabella rimanente deve essere connessa
($\exists$ valle $\forall$ comp. connessa)



si forma un ciclo che non può essere orientato

$\Rightarrow$ non vogliamo cicli (ci sono caselle che vedono 2 $\rightarrow$ entranti).



$$\min = 1 + 2n(n-1)$$