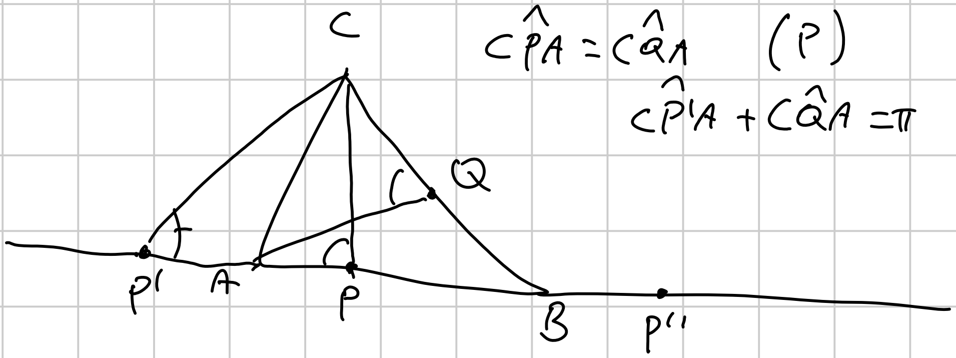
G3 - MEDIUM

Titolo nota

ANGOLI ORIENTATI

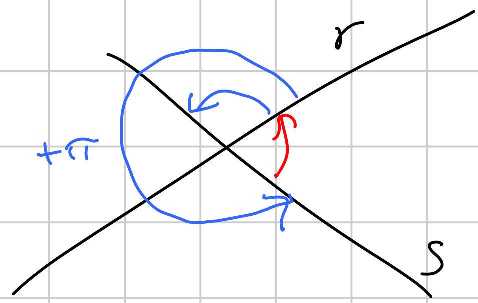
$C\hat{P}A = C\hat{Q}A \quad (P)$

$C\hat{P'}A + C\hat{Q}A = \pi \quad (P')$



DEFINIZIONE r, s rette

$\angle(r,s) =$ "l'angolo di cui r deve ruotare in senso antiorario per andare su s"



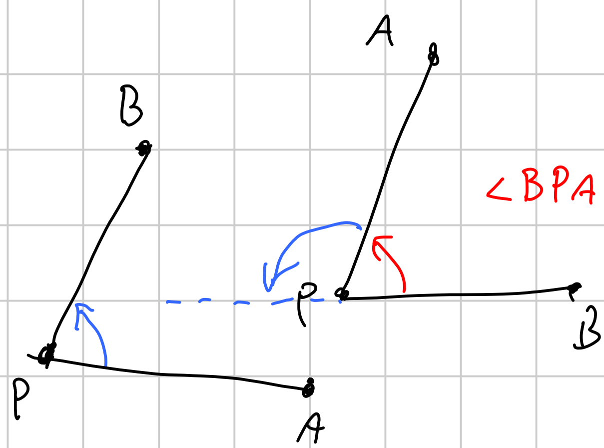
$\angle(s,r) = \pi - \angle(r,s)$

MODULO π

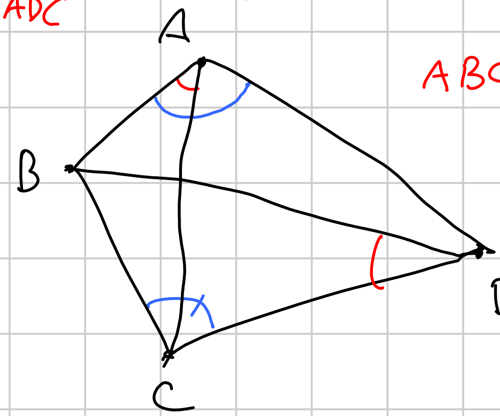
$\angle(s,r) = -\angle(r,s)$

DATI A, B, P

$\angle APB = \angle(AP, BP)$



ABCD cyc $\Longleftrightarrow \angle ABC = \angle ADC$



ABCD cyc $\Longleftrightarrow \angle BAC = \angle BDC$

$\angle BAD + \angle DCB = 0$

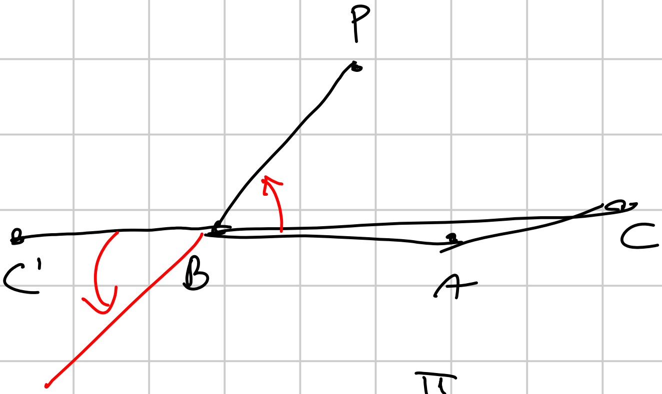
$\angle BAD = -\angle DCB$

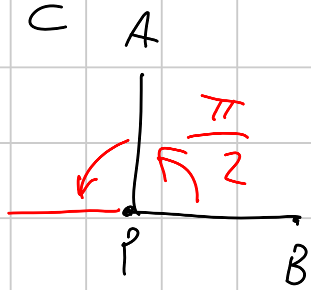
$\angle BAD = \angle BCD$

PROPRIETÀ

- $\angle APA = 0$
- $\angle ABC = -\angle CBA$

• $\angle PBA = \angle PBC \iff A, B, C$ sono allineati

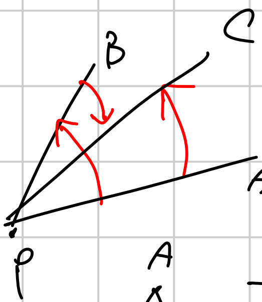




• $AP \perp BP \iff \angle APB = \angle BPA = \frac{\pi}{2}$

• $\angle APB + \angle BPC = \angle APC$

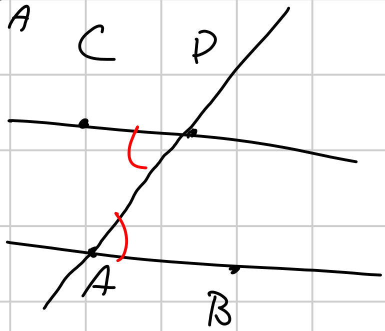
• $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0$



• $AB = AC \iff \angle CBA = \angle ACB$

• $AB // CD \iff \angle BAD = \angle CDA$

$\angle BAD + \angle ADC = \pi$

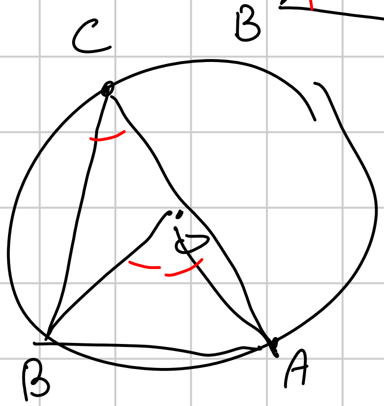


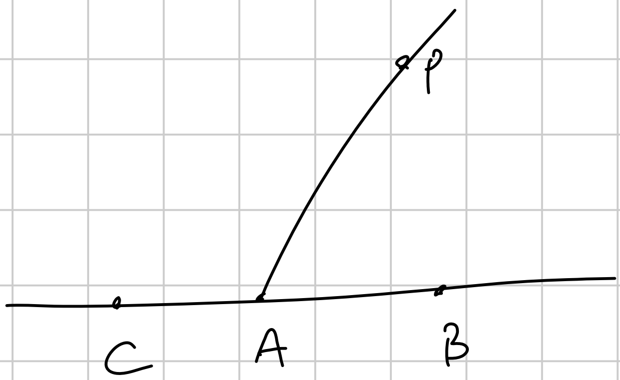
• O centro di ⊙ABC

$$\boxed{\angle AOB = 2\angle ACB} \ (\pi)$$

$$\not\Downarrow$$

$$\frac{\angle AOB}{2} = \angle ACB \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)$$





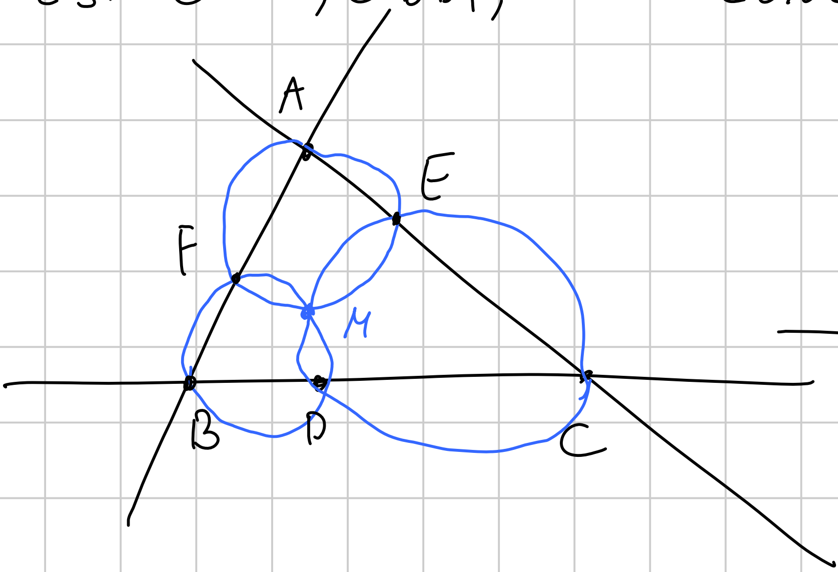
$\angle PAC = \angle PAB$

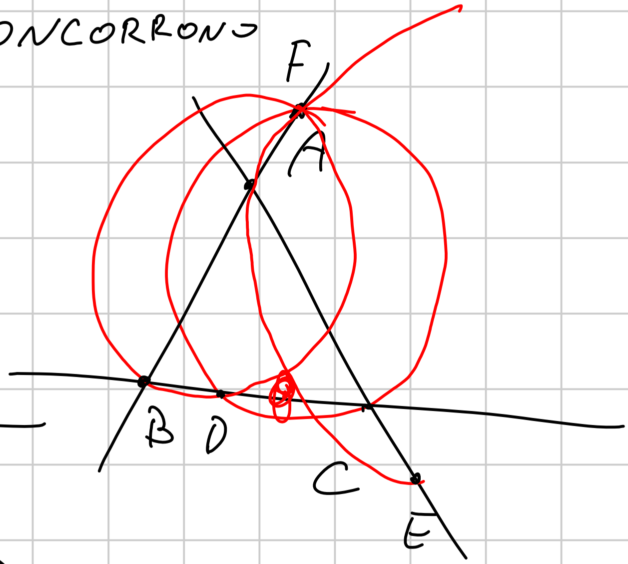
$\not\Rightarrow \cos(P\hat{A}C) = \cos(P\hat{A}B)$

PUNTO DI MIQUEL - TRIANGOLO

ABC TRIANGOLO, D, E, F PUNTI SULLE RETTE BC, AC, AB

TESI $\odot AEF$, $\odot BDF$, $\odot CDE$ CONCORRONO





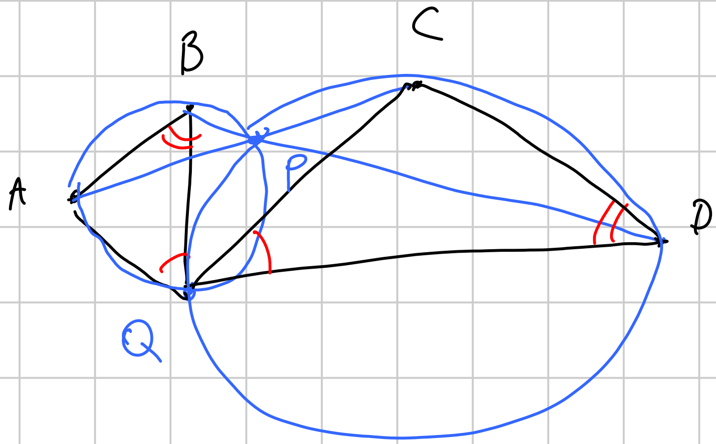
DIMOSTRAZIONE

$M = \odot AFE \cap \odot BDF$ voglio $MECD$ cyc

$\angle MEC = \angle MEA = \angle MFA = \angle MFB = \angle MDB = \angle MDC$

$\angle MEC = \angle MDC \Rightarrow MEDC$ cyc

ROTOMOTETIE



(GIM) $\exists!$ centro rotomotetia che manda

$A \to C$

$B \to D$

$\angle AQB = \angle APB = \angle CPD = \angle CQD$

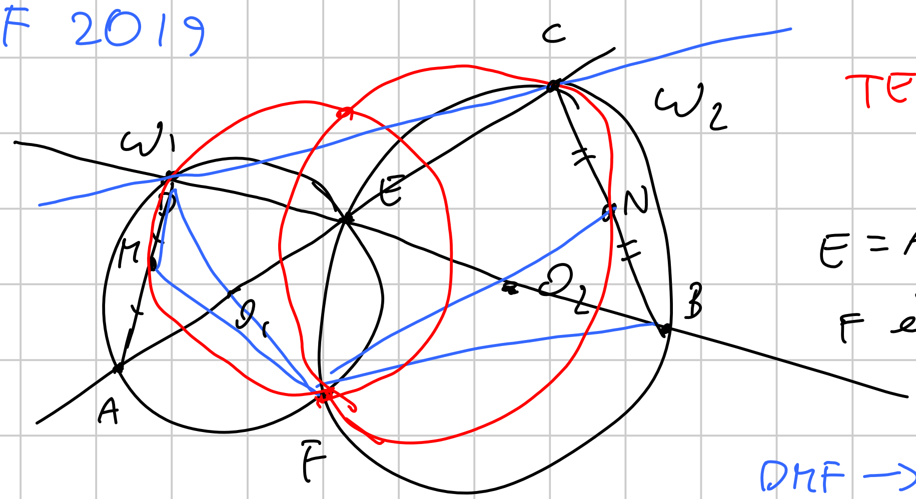
$\angle QBA = \angle QPA = \angle QPC = \angle QDC$

Q è centro della rotomotetia che manda $AB \to CD$

$\iff$ Q è la seconda intersezione di $\odot APB$ e $\odot CPD$

dove $P = AC \cap BD$

TF 2019



TESI $\odot FMD \cap \odot FNC \in DC$

$E = AC \cap BD$

F è il centro della rotom. che manda $AD \to CB$

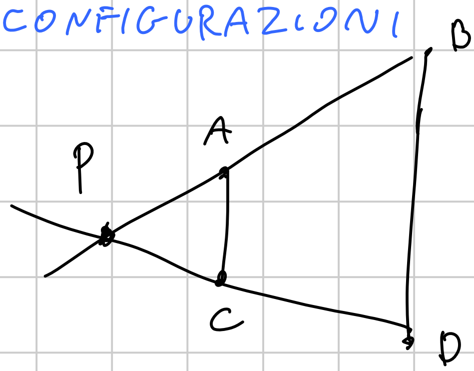
$DMF \to BNF$

sia $X = \odot FMD \cap \odot FNC$

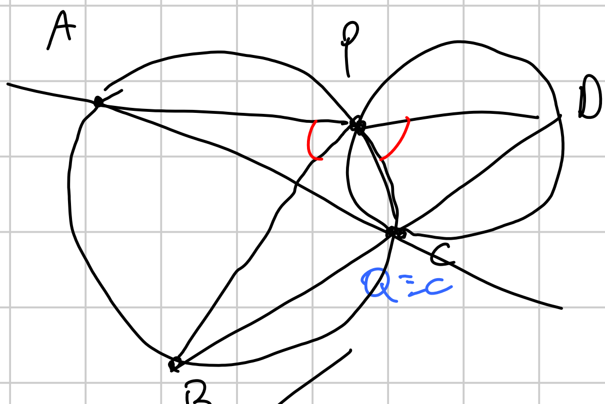
$\angle FXD = \angle FMD = \angle FNB = \angle FNC = \angle FXC$

$\Rightarrow X, D, C$ allineati

CONFIGURAZIONI



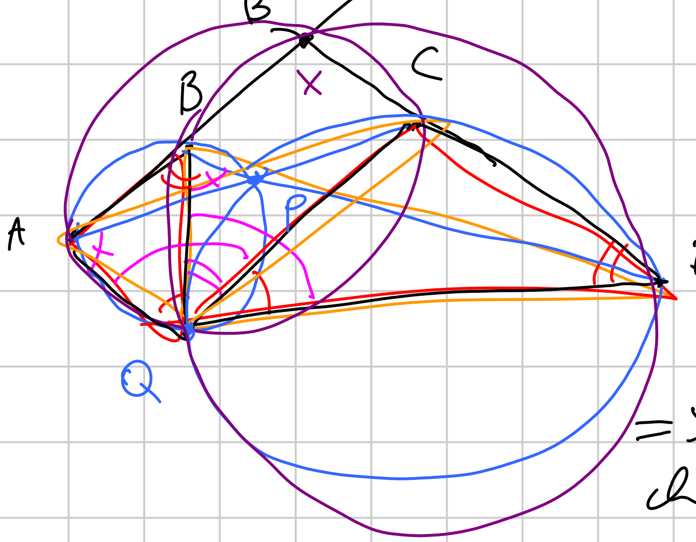
$AC // BC$ il centro è $AB \cap CB$ ed è un'omotetia



$\odot ABQ$ $\odot DCQ$

✓

circ. per DC tangente ad AC



$\angle AQC = \angle BQD$

$\angle CAQ = \angle PAQ = \angle PBQ =$

$= \angle DBQ$

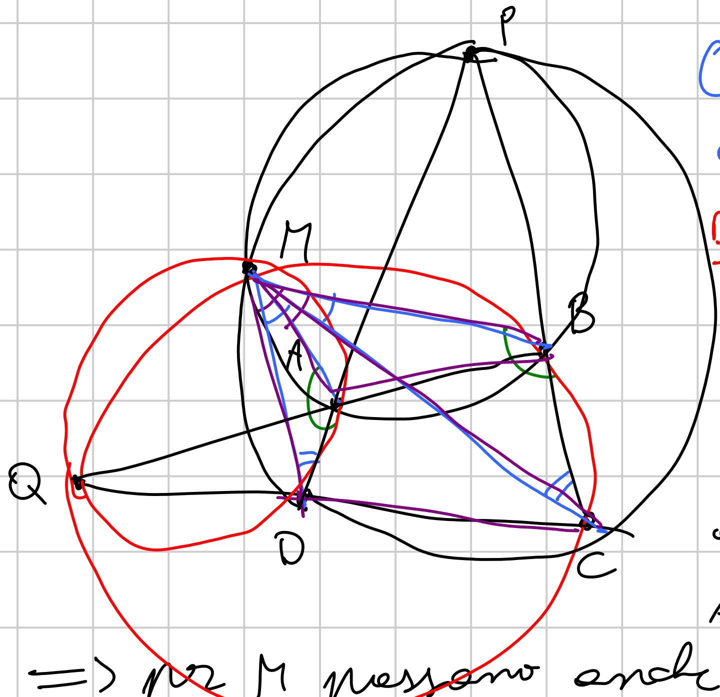
$\Rightarrow QAC \sim QBD$

$\Rightarrow Q$ centro della rotom. che manda $AC \to BD$

$\Rightarrow$ se $X = AB \cap CD$ $\quad \odot AXC$ e $\odot BXD$ passano per Q

PUNTO DI MIQUEL - QUADRILATERI

QUADRILATERO COMPLETO



$\odot PAB$, $\odot PDC$, $\odot QAD$, $\odot QBC$ CONCORRONO IN UN PUNTO M

DIM. $M = \odot PAB \cap \odot PDC$

M è il centro della rotom. che manda AB in DC

MA è quindi anche il centro della rotom. che manda $A \to B$ $D \to C$

$\Rightarrow$ per M passano anche $\odot QAD$ e $\odot QBC$

(M e i centri delle quattro circonferenze sono conciclici)

SEMBRA che $M \in PQ$, ma non è sempre vero

Se ci sta?

$M \in PQ \iff ABCD$ è ciclico

$\Updownarrow$

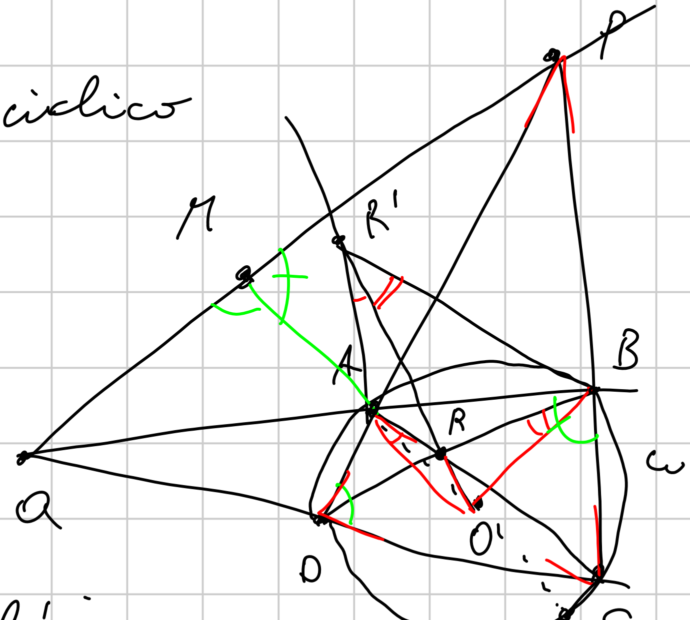
$\angle AMP = \angle AMQ$

$\Updownarrow$

$\angle ABP = \angle ADQ$

$\Updownarrow$

$\angle ABC = \angle ADC$



M è l'inverso di R nell'inversione sulla circonferenza ω circoscritta a $ABCD$

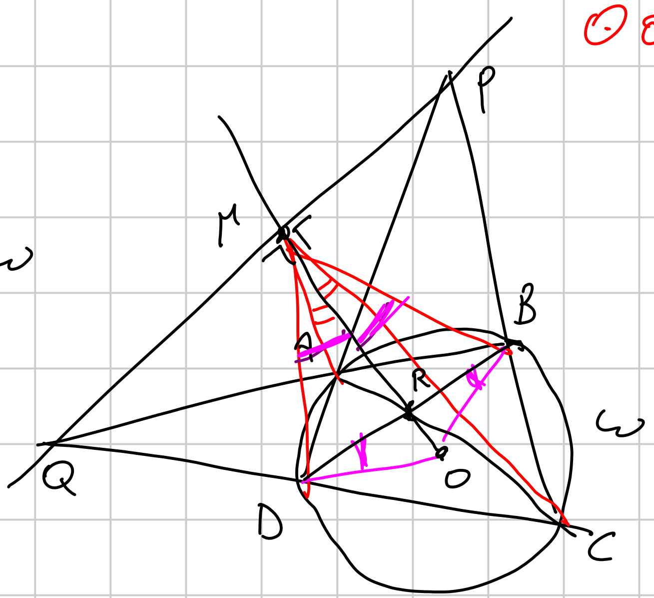
DIM. Sia R' l'inverso di R

$\angle AR'B = \angle AR'O + \angle OR'B = \angle OAR + \angle RBO = \angle OAC + \angle DBO =$

$(\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \angle CFA = \frac{\pi}{2} - \angle COA)$

$= \cancel{\frac{\pi}{2}} - \angle CDA + \cancel{\frac{\pi}{2}} - \angle BCD = -\angle DPC = \angle APB$

$\Rightarrow R' \in \odot APB$ analogamente sta su $\odot PDC$, $\odot QAD$, $\odot QBC$



$\Rightarrow R' \equiv M$

Th di Brocard: PQR è autopolare rispetto a ω

$\Rightarrow M \in PQ$

$\Rightarrow MO \perp PQ$

1) $M \in \odot OAC$, $\odot OBD$

DIM. Inversione su ω: $\odot OAC \to AC$ $\qquad AC \cap BD = R$

$\odot OBD \to BD$

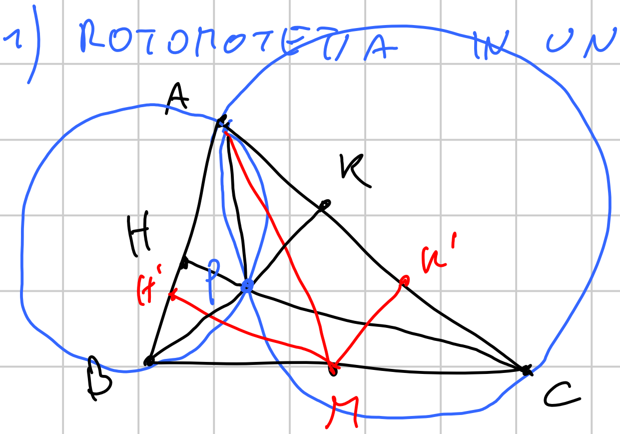
$\Rightarrow M = \odot AOC \cap \odot OBD$

2) $\angle AMO = \angle OMC$ e $\angle DMO = \angle OMB$

DIM. Inversione $\angle DMO = \angle ODR = \angle ODB$ $\qquad \angle OMB = \angle RBO = \angle DBO$

INVERSIONI INTELLIGENTI

1) ROTOMOTETIA IN UN TRIANGOLO



$\frac{PH}{AB} = \frac{PK}{AC} \qquad \frac{PH}{PK} = \frac{AB}{AC}$

Il centro della rotomot. che manda $B \to A$ $A \to C$ sta sulla simmediana per A

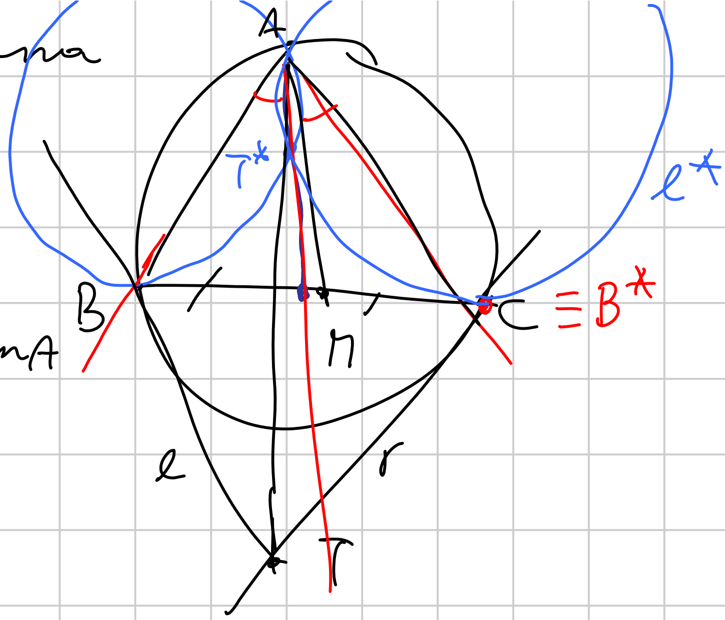
$Q = AB \cap AC \equiv A$

$[AMB] = [AMC]$

$AB \cdot MH' = AC \cdot MK'$

$\frac{MH'}{MK'} = \frac{AC}{AB}$ (è il rapporto inverso)

$\Rightarrow P$ sta sulla simmediana



MODO 2

INVERSIONE di centro A e raggio $\sqrt{AB\cdot AC}$ + riflessione rispetto alla bisettrice in A

$(P \to P^*)$

$$AB^* = \frac{r^2}{AB} = \frac{AB\cdot AC}{AB} = AC$$

$\Rightarrow B^* \equiv C \qquad C^* \equiv B$

$BC \to \odot ABC$

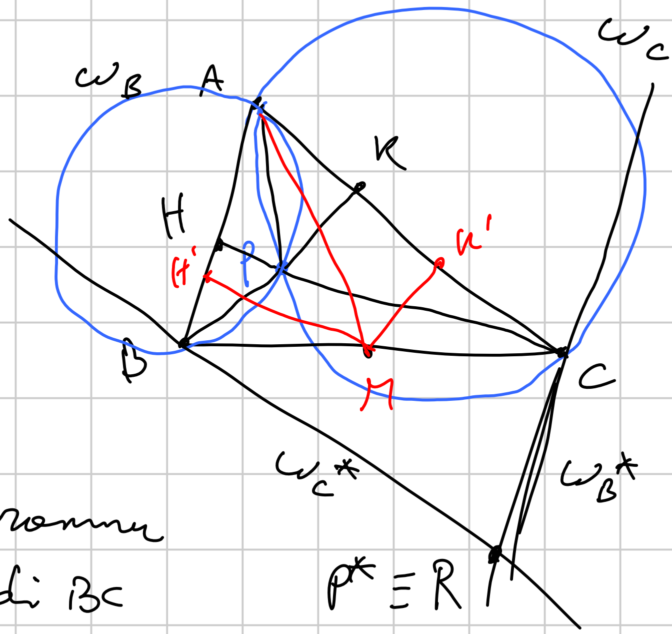
$\ell \to$ circ. per C tangente a BC e per A

$X = AT^* \cap BC \qquad X$ sta sull'asse radicale di ℓ^* e r^*

$\Rightarrow XB^2 = XC^2 \Rightarrow XB = XC \Rightarrow X \equiv M$

$\Rightarrow AT^*$ è simmetrica di AT quindi AT è simmediana

TORNANDO AL PROBLEMA



inv. + symm.

$B \Leftrightarrow C$

$AC \Leftrightarrow AB$

$\Rightarrow \omega_B^*$ è retta $\parallel AB$ passante per C

$\omega_B^* \cap \omega_C^* = R$ tale che $ACRB$ è un parallelogramma

$AR \cap BC$ è il pto medio di BC

TORNANDO INDIETRO AP è simmediana.

2) Cerchio mistilineo

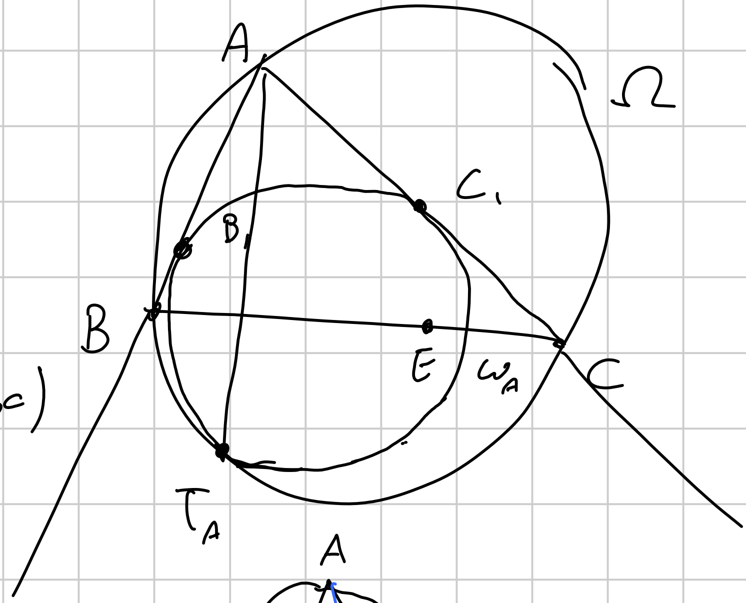
1) INV + SYMM ($B \leftrightarrow C$)

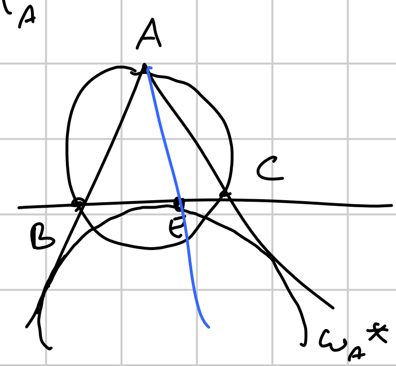
ω_A^* è la ex-inscritta

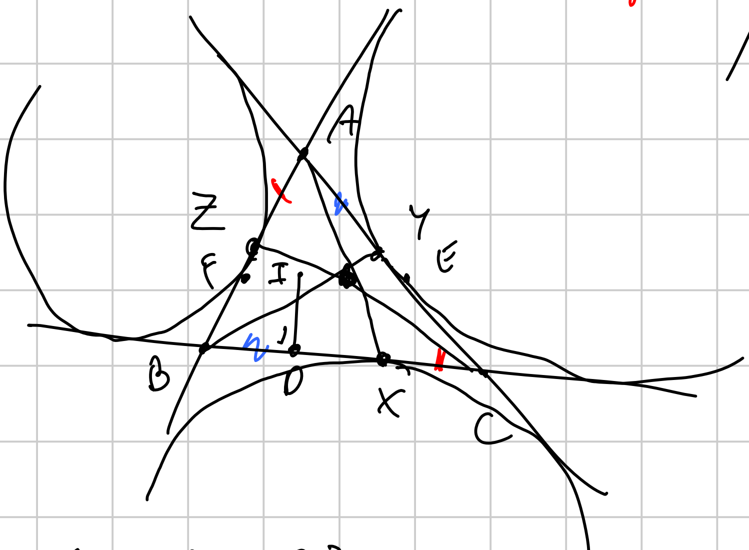
AT_A è isogonale a AE

(E punto di tangenza della ex-inscritta ad A con BC)

AE è la ceviana di Nagel







AX, BY, CZ concorrono nel punto di Nagel

D punto di tangenza di ω inscritta con BC

$BD = XC \qquad BX = CD$

$$XC = BD = \frac{BC + BA - AC}{2} = \frac{a + c - b}{2} = \qquad \begin{aligned} a &= BC \\ b &= AC \\ c &= AB \end{aligned}$$

$= BF = AZ$

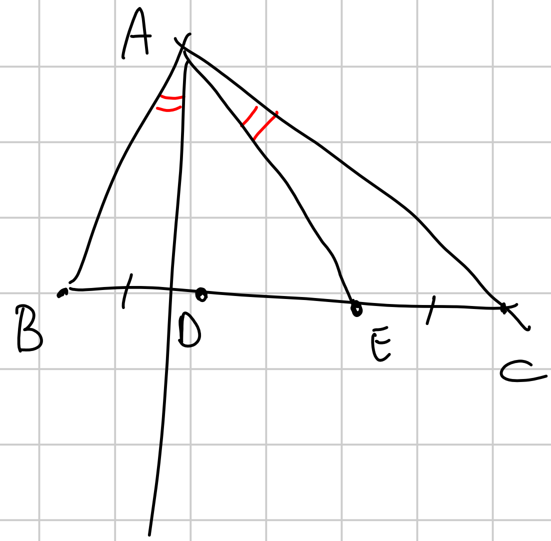
$$CX = AZ = \frac{a + c - b}{2} \qquad \begin{aligned} BZ &= AF = AE = CY \\ BX &= CD = CE = AY \end{aligned}$$

$$\frac{\cancel{BX}}{\cancel{XC}} \cdot \frac{\cancel{CY}}{\cancel{YA}} \cdot \frac{\cancel{AZ}}{\cancel{ZB}} = 1$$ per Ceva AX, BY, CZ concorrono (punto di Nagel)

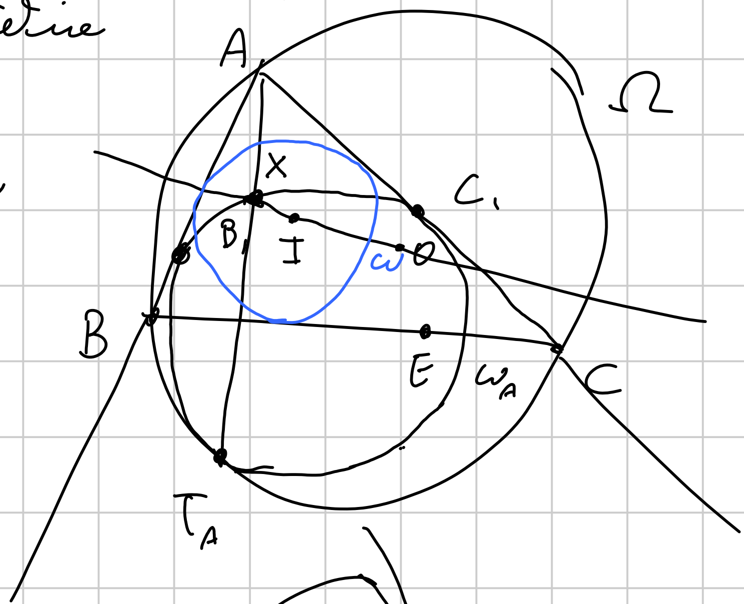
Con lo stesso conto AD, BE e CF concorrono nel punto di Gergonne

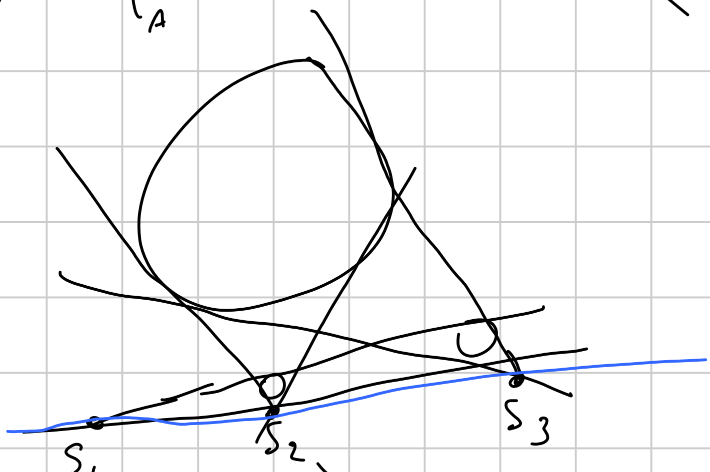
$\Rightarrow AT_A$ è isogonale alla ceviana di Nagel

2) AT_A, BT_B, CT_C concorrono nel coniugato isogonale del punto di Nagel

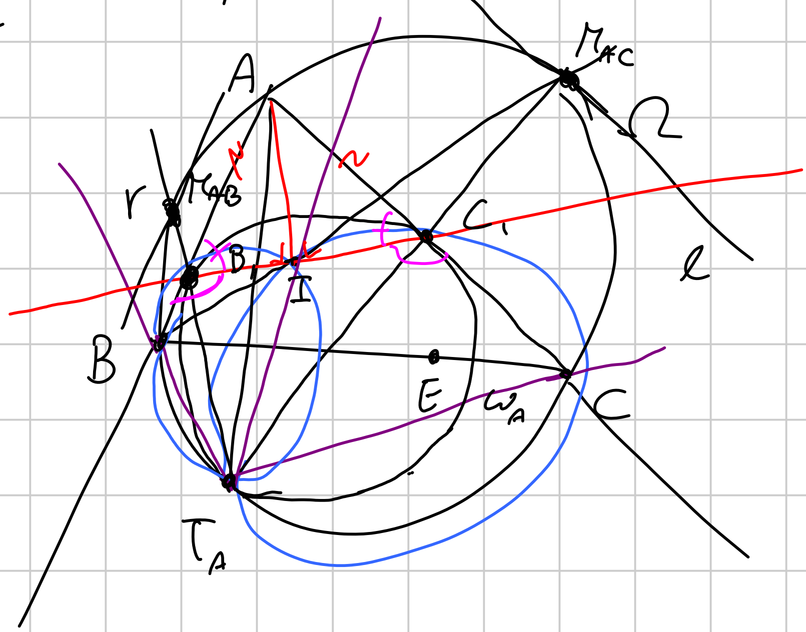


3) Sappiamo che
T_A è il centro dell'omotetia che manda ω_A in Ω.
A è il centro dell'omotetia che manda ω in ω_A.
=> Il centro dell'omotetia che manda ω in Ω sta su AT_A, BT_B e CT_C
=> è il con. is. di Nagel





4) omotetia $\omega_A \to \Omega$
$l \parallel AC$
$r \parallel AB$
=> M_{AC} è il pto medio dell'arco AC che non contiene B
Stessa cosa per M_{AB}



Applicando Pascal su $BAC M_{AB} T_A M_{AC}$

$X = AB$ e $M_{AB}T_A$ $(=B_1)$ $\quad Y = AC \cap T_A M_{AC} = C_1$

$Z = CM_{AB} \cap BM_{AC} = I$

$\Rightarrow I, B_1, C_1$ sono allineati

$AB_1 = AC_1 \Rightarrow I$ è il punto medio di B_1C_1

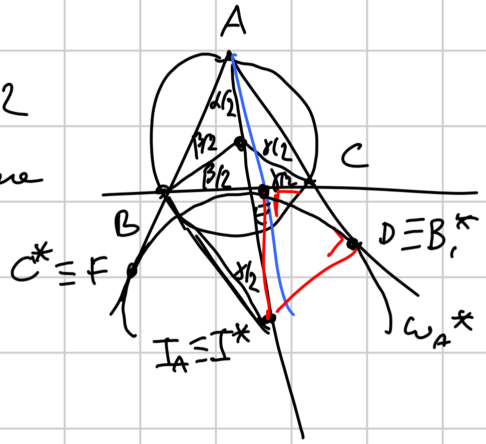
6) BT_AIB_1 e CT_AIC_1 sono ciclici

$AI^*B = ACI = \gamma/2$

$ABI^* = \frac{\pi}{2} + \beta/2 \quad FBI^* = \frac{\pi}{2} - \beta/2$

$\Rightarrow BI^*$ è la bisettrice esterna

$\Rightarrow I^* \equiv I_A$



vogliamo EI_ADC ciclico

EI_AFB ciclico veri perché

$I_AFB = I_AEB = I_ADC = \frac{\pi}{2}$

7) T_AI biseca $B\hat{T_A}C$

Perché $\angle IT_AB = \angle IB_1B = \angle IB_1A = \angle C_1B_1A$ poiché

$\angle CT_AI = \angle CC_1I = \angle AC_1I = \angle AC_1B_1$, AB_1C_1 isoscele

8) $M_{BC}T_A$, BC, B_1C_1 concorrono

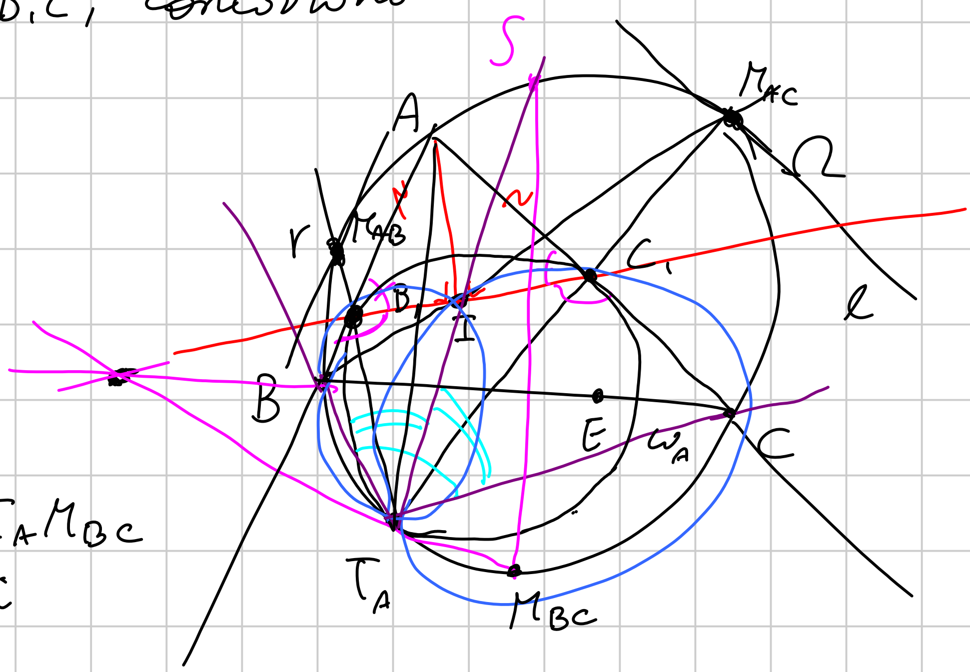
$BC \cap T_AM_{BC}$

$I = CM_{AB} \cap A_{MB}C$

$TM_{AB} \cap AB = B_1$

$BCM_{AB}T_AM_{BC}A$

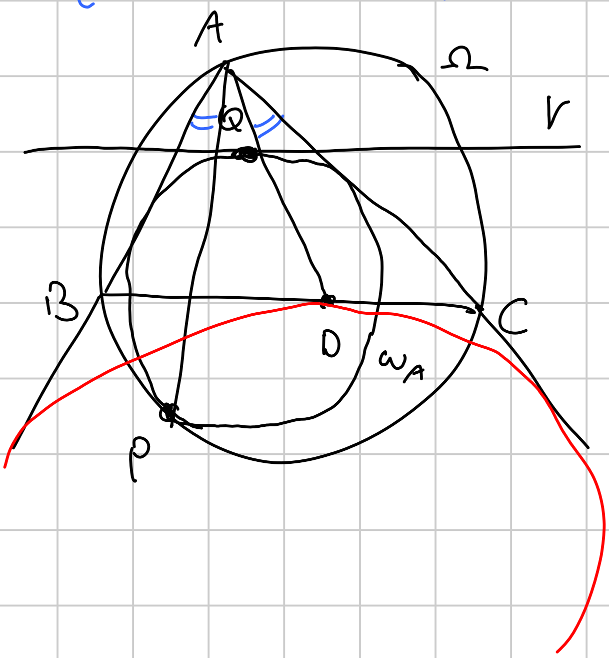
$\Rightarrow I, B_1$ e $BC \cap T_AM_{BC}$ sono allineati



9) $T_A I$ incontra Ω nell'opposto di Π_{BC} (per 6))

10) $T_A A$ è la simmediana di $B_1 T_A C_1$ perché $B_1 A$ e $C_1 A$ sono le tangenti alla circoscritta.
$\Rightarrow B_1 \hat{A} T_A = I \hat{T_A} C_1$ perché $B_1 I = I C_1$

[EGMO 2013-5]



TESI: $\angle BAP = \angle QAC$

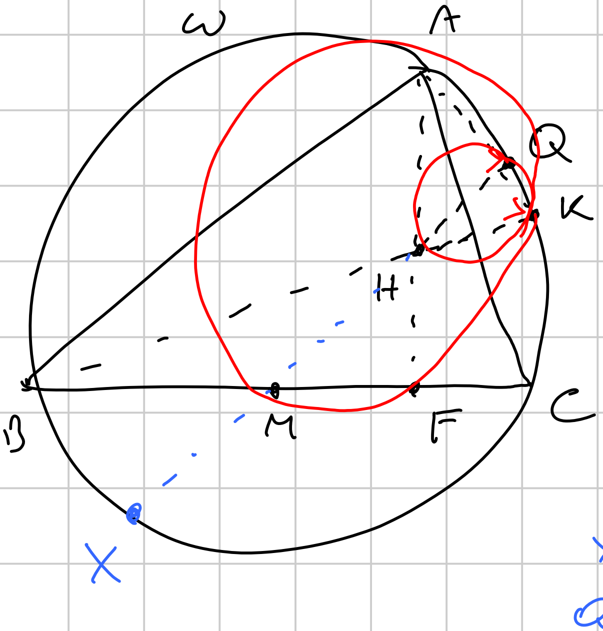
Se D è il punto di tangenza della ex-inscritta AP è isogonale a AD.

Omotetia di centro A che manda ω_A nella ex-inscritta

$r \to BC$

$Q \to D \Rightarrow A, Q, D$ allineati.

[IMO 2015-3]



$Q \in \omega$ t.c. $A\hat{Q}H = \frac{\pi}{2}$

$K \in \omega$ t.c. $H\hat{K}Q = \frac{\pi}{2}$

TESI: $\odot HKQ$ e $\odot FKM$ sono tangenti

X simmetrico di H rispetto a M

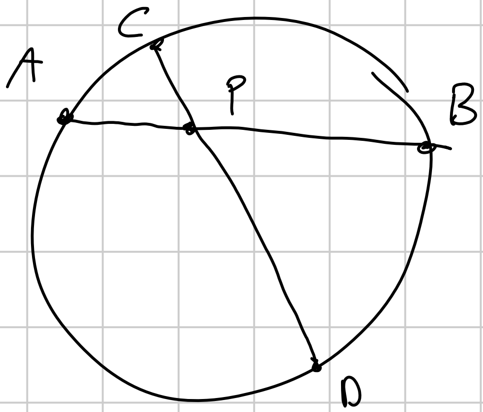
X è diametralmente opposto ad A

Quindi $\omega \cap XH = Y$ è tale che $HY \perp AY \Rightarrow Y = Q$

IDEA: Dato un punto dentro una circonferenza si può cercare un'inversione + sim. centr.

che mandi la circonferenza in sé stesso.

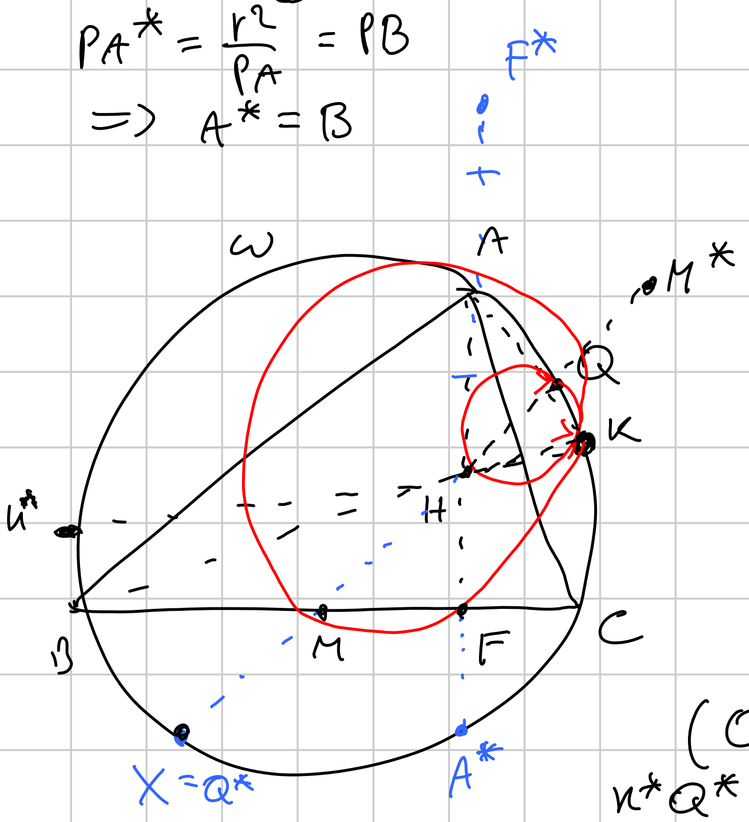
$AP \cdot PB = CP \cdot PD = |Pow_\omega(P)|$



$r = \sqrt{|Pow_\omega(P)|}$

$PA^* = \frac{r^2}{PA} = PB$

$\Rightarrow A^* = B$



Usiamo H

$Q^* = X$ diam. opp. ad A

$A \leftrightarrow A^*$

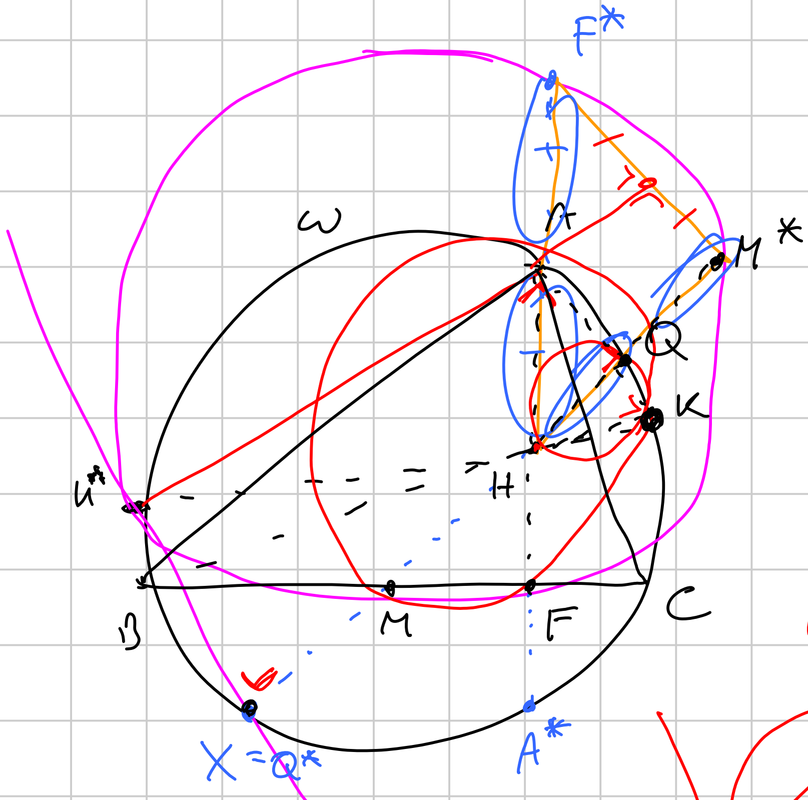
$HF = \frac{HA^*}{2} \Rightarrow HF^* = 2HA$

$M \to M^*$ t.c. $HM^* = 2HQ$

$K \to K^*$

($\odot HKQ$ tange $\odot MFK$)

K^*Q^* tange $\odot M^*F^*K^*$



$HM^* = 2HQ$

$HF^* = 2HA$

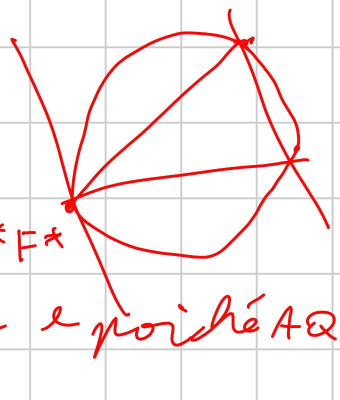
$\Rightarrow F^*M^* \parallel AQ$

$A\hat{Q}H = \frac{\pi}{2}$

$QKK^* = \frac{\pi}{2} \Rightarrow QQ^*K^* = \frac{\pi}{2}$

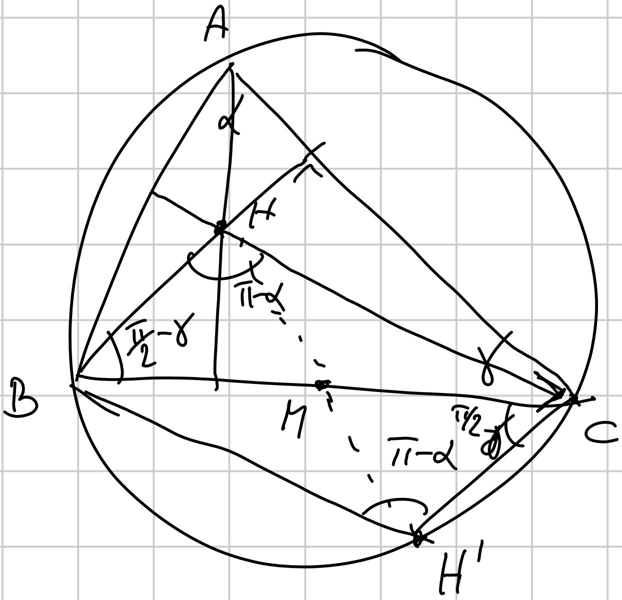
$\Rightarrow AQQ^*K^*$ è un rettangolo

$K^*Q^* \parallel AQ \parallel F^*M^*$



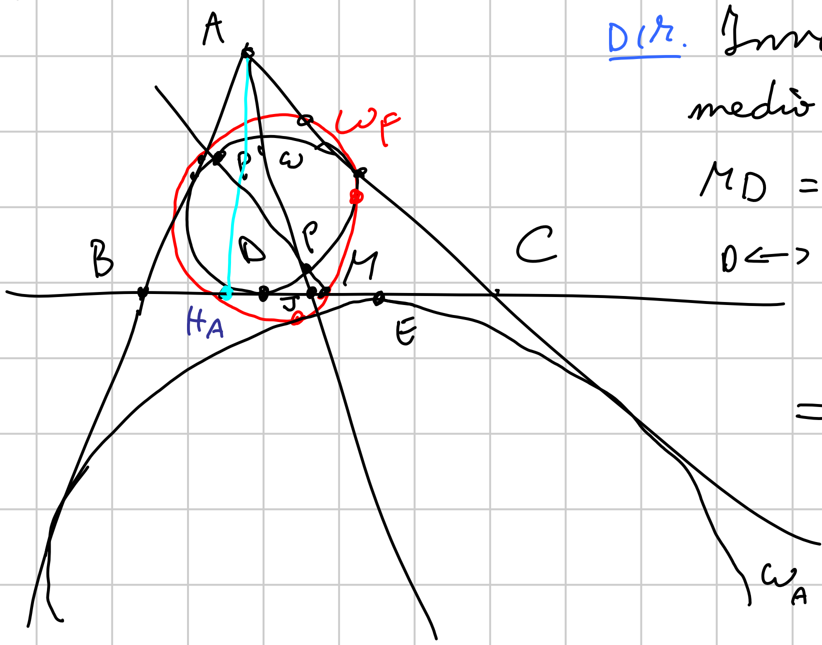
VOGLIO $K^* \in$ asse di M^*F^*

$K^*AQ = \frac{\pi}{2}$ Per Talete e poiché $AQ \parallel F^*M^*$ K^*A è asse di F^*M^*.



Th di Feuerbach

La circonferenza di Feuerbach (dei 9 punti) tange l'inscritta e le 3 ex-inscritte



Dim. Inversione in M punto medio di BC con raggio

$MD = ME$

$D \leftrightarrow D$

$MP' = \frac{MD^2}{MP} \Rightarrow P' \in \omega$

$\Rightarrow \omega$ rimane in sé stessa

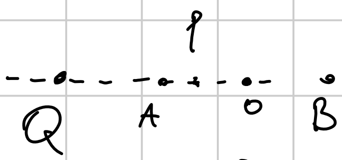
STESSA COSA per ω_A

ω_F diventa una retta

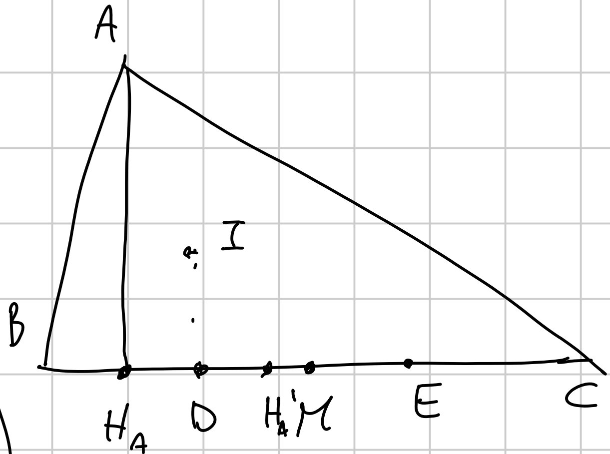
Dove va H_A?

$H_A' = \frac{MD^2}{H_A}$ $\quad H_A \cdot H_A' = MD^2$

(

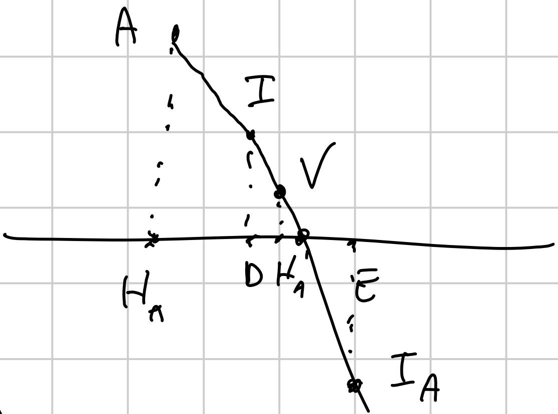


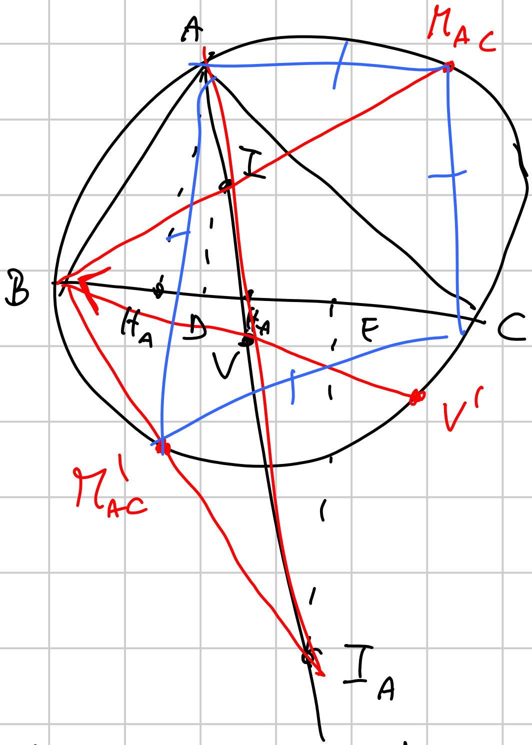
$OP \cdot OQ = OA^2$ $\quad (Q, P; A, B) = -1$)



$\Rightarrow (H_A, H_A'; D, E) = -1$

$\Rightarrow (A, V; I, I_A) = -1$





$(A, V'; M_{AC}, M_{AC}') = -1$

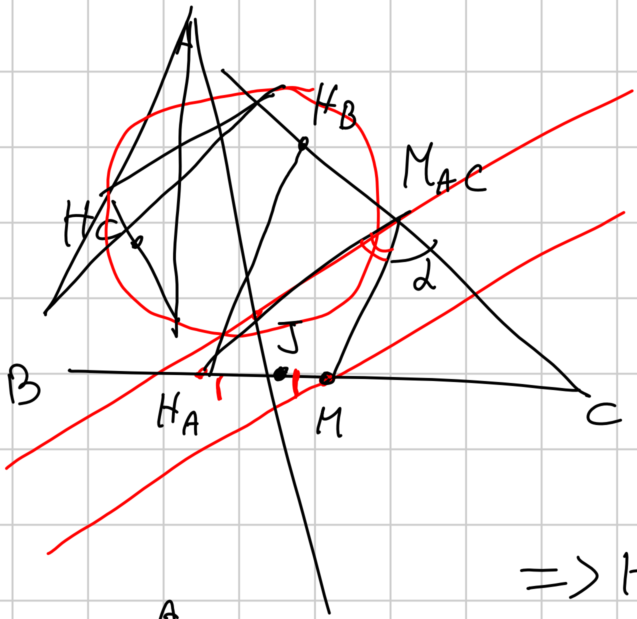
$$\left| \frac{AM_{AC}}{M_{AC}V'} \cdot \frac{V'M_{AC}'}{M_{AC}'A} \right| = 1$$

Se $V' = C$

$AM_{AC} = M_{AC}C$

$CM_{AC}' = AM_{AC}'$

$\Rightarrow V' = C \Rightarrow H_A' =$ piede della bisettrice.



$H_A M_{AC} C - M M_{AC} C$

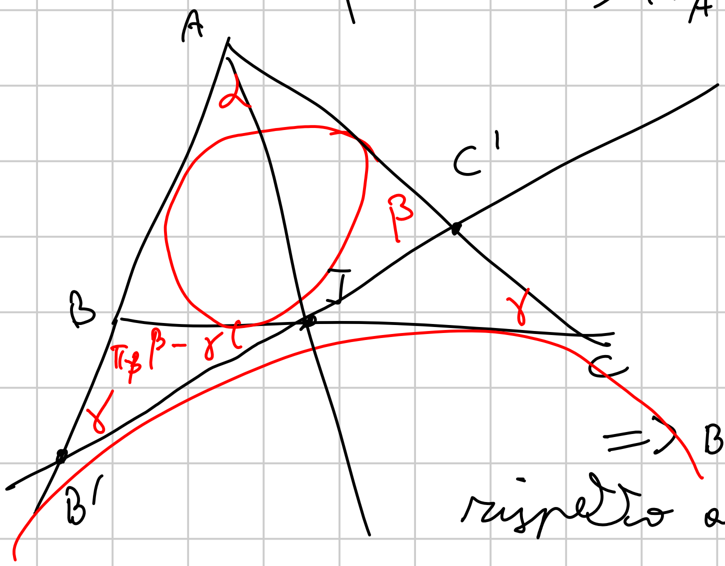
$\quad //\qquad\qquad \alpha$

$\pi - H_A M_{AC} H_B = H_A H_C H_B$

$A H_C H_B = \gamma$

$B H_C H_A = \gamma \Rightarrow H_A H_C H_B = \pi - 2\gamma$

$\Rightarrow H_A M_{AC} M = \pi - 2\gamma - \alpha = \beta - \gamma$



$B'BJ = \pi - \beta$

$BB'J = \cancel{\pi} - (\cancel{\beta} - \gamma) - (\cancel{\pi} - \cancel{\beta}) =$

$= \gamma$

$\Rightarrow B'C'$ è la simmetrica di BC rispetto ad AJ, la bisettrice

Poiché BC tange ω e ω_A, e le due circonferenze sono invarianti per simmetria rispetto ad AJ, anche B'C' le tange entrambe
$\Rightarrow$ anche la circ. di Feuerbach è tangente alle due circonferenze.

PER CASA
- EGMO 2022/6
- IGO 2020/5
- GQMO 1 (difficile)
- ELMO 2017/2
- IMO SHORTLIST 2018 G2
- USAMO 2006/6
- CMC 2020 3