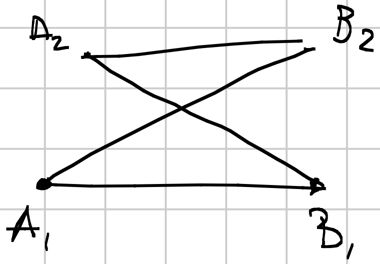
Combinatoria geometrica

1. Ci sono $2n$ punti nel piano in posizione generale, n rossi e n blu. Dimostrare che si può collegare ciascun punto rosso con uno blu (diverso) con un segmento in modo che questi segmenti non si intersechino. (☆)

Prendiamo somma delle lunghezze minima.



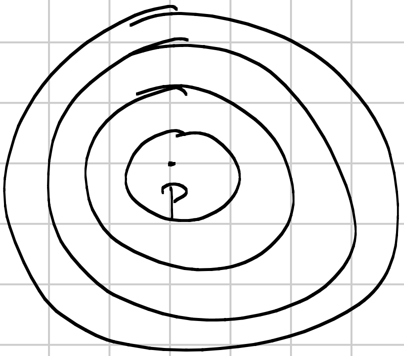
Se A_1B_2 e A_2B_1 si intersecassero, allora $A_1B_1 + A_2B_2 < A_1B_2 + A_2B_1$.

2. Siano $2n+1$ punti nel piano a tre non allineati, a quattro non conciclici. Un "cerchio dimezzante" è una circonferenza contenente 3 punti, con $n-1$ punti al suo interno. Dimostrare che esistono esattamente n^2 cerchi dimezzanti. (☆)
3. (Sylvester-Gallai) Dati n punti del piano non tutti allineati, esiste una retta r che ne contiene esattamente due. (☆☆☆)
4. 2023 punti nel piano, $P_1, P_2, \dots, P_{2023}$. $\exists i$ tale che $\left|\{P_iP_j \mid j \in \{1,2,\dots,2023\}, j \neq i\}\right| \geq 44$ (anche 45 in realtà). (☆☆)
5. È vero che $\forall$ n-agono convesso ($n>3$) esiste una diagonale A_iA_j tale che $A_{i-1}A_iA_j < 90^\circ$ e $A_jA_iA_{i+1} < 90^\circ$? (☆☆)
6. n punti in un triangolo rettangolo di ipotenusa h possono essere ordinati in modo che $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \dots + P_{n-1}P_n^2 \leq h^2$. (☆☆☆)
7. $n > d$. $X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq \mathbb{R}^d$ convessi tali che ogni $d+1$ di loro hanno intersezione non vuota.

Dimostrare che $\bigcap_{k\geq 1}^{n} X_k \neq \emptyset$. (★★★★)

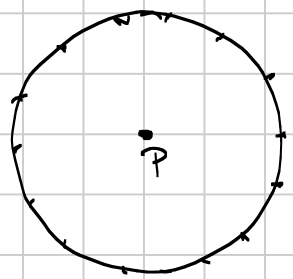
8. S insieme finito di punti in posizione generale. $\forall P$ poligono convesso con vertici in S, $a(P)$ numero di vertici e $b(P)$ numero di punti esterni. Un segmento, un punto e $\emptyset$ sono poligoni di 2, 1 e 0 vertici. Dimostrare che, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$. (★★★)

7.



Fissato $P \in S$, gli altri stanno nell'unione di 43 circonferenze. Per pigeonhole, una circonferenza ha 48 punti $\Rightarrow$ 24 distanze.

Questo bound è $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, ma in realtà dà $\sqrt{\frac{n}{2}}$.



Ci sono 48 punti su una circonferenza centrata in P. $\Rightarrow$ Almeno 24 distanze per uno di essi.

Se prendiamo P sul convex hull, questi punti sono su una semicirconferenza, quindi 47 distanze.

Il modo pulito è PQ lato del convex hull.

P ha 44 distanze $a_1, a_2, \dots, a_{44}$ e Q ha $b_1, b_2, \dots, b_{44}$.

$\forall (i,j)$ può esistere al più un punto $X \in S$ t.c. $\overline{XP} = a_i$, $\overline{XQ} = b_j$. $\Rightarrow$ Ho al più $44^2 + 2 < 2023$ punti.

Wlog tutte le ascisse e le ordinate sono diverse.

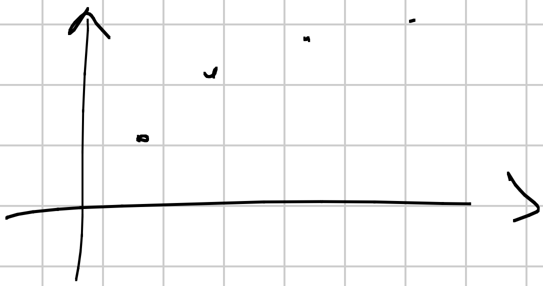
Dirò che dati $P_i(x_i, y_i)$ e $P_j(x_j, y_j)$, $P_i < P_j$ se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$.

Quindi, per Erdős-Szekeres, esistono

(i) 45 punti $A_1 < A_2 < \dots < A_{45}$ oppure

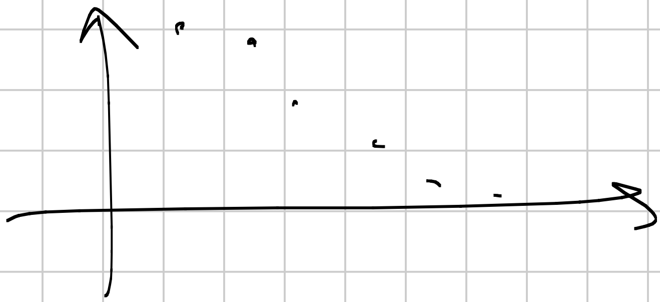
(ii) 45 punti non ordinati.

(i)



$\Rightarrow A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{45}$ tutte distinte.

(ii)

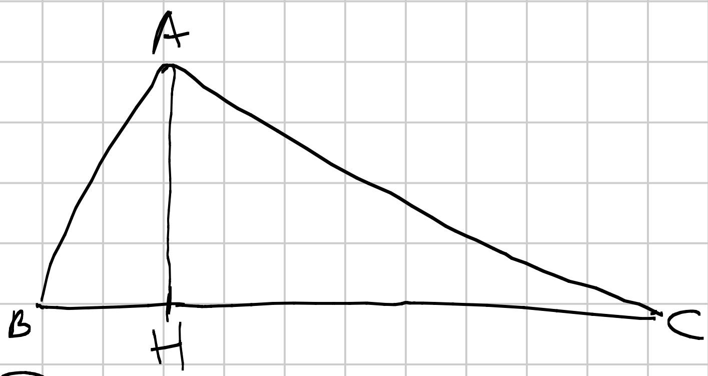


$\Rightarrow A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{45}$ tutte distinte.

---

5. Prendo la diagonale più lunga.

6.



Dim. Per induzione dimostro che posso avere

$$BP_1^2 + P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \dots + P_{n-1}P_n^2 + P_nC^2 \le h^2.$$

Ora divido in due triangolini $\overset{\triangle}{ABH}$ e $\overset{\triangle}{ACH}$.

Per HP induttiva, posso nominare i punti $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n$, con i primi k nel primo triangolo (gli altri nell'altro) in modo che

$$BP_1^2 + P_1P_2^2 + \dots + P_kA^2 \le AB^2$$

$$AP_{k+1}^2 + P_{k+1}P_{k+2}^2 + \dots + P_nC^2 \le AC^2$$

Ma $P_kA^2 + AP_{k+1}^2 \ge P_kP_{k+1}^2 \Rightarrow$ fine.

Attenzione al caso di tutti i punti in un triangolo.

9. Dati $(n+1)^2$ punti in un quadrato di lato n, ce ne sono tre che formano un triangolo di area $\leq 1/2$. (~~☆☆☆~~). (RMM)

---

9. Bound subottimali

$2n^2+O(1)$ punti non vanno bene:

(i) Triangoliamo e ci sono troppi triangoli (in particolare, $> 2n^2$ sono troppi)

(ii) Dividiamo in n^2 quadratini. Per pigeonhole ho tre punti in un quadrato $\Rightarrow$ hanno area $\leq \frac{1}{2}$.

Triangoliamo. Quanti triangoli ci sono in una triangolazione di n punti? Almeno $n-2$.

Esattamente $2n-k-2$ triangoli, dove k è il numero di punti nel convex hull.

Triangoliamo, ottenendo

$2(n+1)^2-k-2$ triangoli

$\Rightarrow 2(n+1)^2-k-2 \leq 2n^2 \quad \Rightarrow \quad k \geq 4n$.

Siano $P_i(x_i, y_i)$ con $i=1, 2, \dots, k$ i vertici del convex hull.

Siccome le ascisse, come le ordinate, aumentano per un po' e poi diminuiscono, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{i+1}-x_i| \leq 2n, \quad \sum_{i=1}^{k} |y_{i+1}-y_i| \leq 2n$$

(ciclici mod k)

Quindi, siccome $k \geq 4n$, esiste i tale che

$$|x_{i+1}-x_i| + |x_i-x_{i-1}| + |y_{i+1}-y_i| + |y_i-y_{i-1}| \leq 2.$$

Da questo deduciamo che

$P_iP_{i+1} \leq \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} \leq |x_{i+1}-x_i| + |y_{i+1}-y_i|$.

$P_{i-1}P_i \leq |x_i-x_{i-1}| + |y_i-y_{i-1}|$

$\Rightarrow P_iP_{i+1} + P_{i-1}P_i \leq 2 \Rightarrow P_iP_{i+1} \cdot P_{i-1}P_i \leq 1$

$\Rightarrow [P_{i-1}P_iP_{i+1}] \leq \frac{1}{2}.$

---

(8) $$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

Prendo $x \in [0,1]$. Coloro ogni punto indipendentemente con probabilità x.

$x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$ è la probabilità che tutti i vertici di P siano colorati e tutti i punti esterni non lo siano. Questa è chiaramente la probabilità che P sia il convex hull dell'insieme dei punti colorati. $\Rightarrow$ La somma è 1.

Per altre soluzioni, questo è IMOSL 2006/C3.

---

(7) Basta dimostrarlo per $n = d+2$.
(Teorema di Helly)

Lemma.

Dati $P_1, P_2, \dots, P_{d+2} \in \mathbb{R}^d$, esistono $S, T \subseteq \{P_1, P_2, \dots, P_{d+2}\}$ disgiunti tali che $\operatorname{conv}(S) \cap \operatorname{conv}(T) \neq \emptyset$.

Poiché $d+2$ punti in $\mathbb{R}^d$ non sono affinemente indipendenti, esistono $\lambda_i \in \mathbb{R}$ non nulli tali che

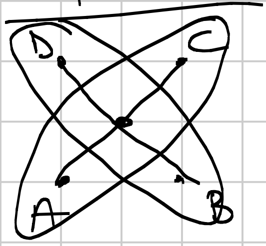
$$\sum_{i=1}^{d+2} \lambda_i P_i = 0 \quad \left(e \sum \lambda_i = 0\right)$$

In generale, dati $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$, vale che $X \in \operatorname{conv}(Q_1, Q_2, \dots, Q_k) \Leftrightarrow \exists\, \mu_i \geq 0$ con somma 1 tali che $X = \sum_{i=1}^{k} \mu_i Q_i$.

S insieme dei punti con coeff. positivi, T con coeff. neg.
Abbiamo un'identità della forma

$$\sum_{P\in S} \lambda_P P = \sum_{Q\in T} -\lambda_Q Q.$$

$$\Rightarrow \sum_{P\in S} \frac{\lambda_P}{\sum \lambda_P} P = \sum \frac{-\lambda_Q}{-\sum \lambda_Q} Q.$$



Esempio per $d=2$

$$A - B + C - D = 0$$

$$\Rightarrow A + C = B + D$$

$$\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$

Torniamo a Helly.

Abbiamo $X_1, X_2, \ldots, X_{d+2}$ insiemi che si intersecano $d+1$ a $d+1$. Vogliamo che si intersechino tutti. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_{d+2}$ tali che $P_i \in X_j$ se $i \neq j$.

Applichiamo il lemma, chiamando U e V gli insiemi di indici

$$\mathrm{conv}(P_i : i \in U) \cap \mathrm{conv}(P_j : j \in V) \neq \emptyset.$$

$$\left(\bigcap_{i\in U^c} X_i\right) \supseteq \mathrm{conv}(P_i : i \in U), \qquad \left(\bigcap_{j\in V^c} X_j\right) \supseteq \mathrm{conv}(P_j : j \in V)$$

$$\left(\bigcap_{i\in U^c} X_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in V^c} X_j\right) \neq \emptyset.$$

Ma siccome $U \cap V = \emptyset$, $U^c \cup V^c = \{1, 2, \ldots, d+2\}$.