C2 A - Massimiliano

Note Title 07/09/2023

PARTE I - METODO PROBABILISTICO

Consideriamo queste tecniche:
(i) Pigeonhole
(ii) Double counting

· Valore atteso

Sia X una variabile aleatoria. Il suo valore atteso $\mathbb{E}[X]$ è definito come

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

(i) Come generalizzare pigeonhole?

Se $\mathbb{E}[X] = m$, allora X assume valori $\geq m$ e valori $\leq m$.

Se $\mathbb{P}(A) > 0$, allora c'è un caso in cui A si verifica.

Se $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_k) < 1$, allora c'è un caso in cui nessuno si verifica.

(ii) E il double counting?

Data $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ permutazione, chiamiamo $s(\sigma) = |\{ i \mid \sigma(i) = i \}|$.

Quanto vale $\sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)$?

$n = 3$

1 2 3	3
1 3 2	1
2 1 3	1
2 3 1	0
3 1 2	0
3 2 1	1

Per $n = 3$ otteniamo 6.

In ogni colonna abbiamo $(n-1)!$ punti fissi, per un totale di $n\cdot(n-1)! = n!$

X_i = # di punti fissi in posizione i

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n}\cdot n = 1.$$

Fondamentalmente, abbiamo usato che

$$\boxed{\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]}.$$

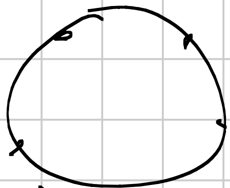
Consideriamo un cerchio e $2n$ punti sulla circonferenza presi in modo casuale (uniforme) e indipendenti $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$. Tracciamo i segmenti A_iB_i dividendo il cerchio in alcune parti. Quanto vale, in media, il numero di regioni?

Sia $X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } A_iB_i \text{ e } A_jB_j \text{ si intersecano} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

X v.a. del numero di regioni.

$$\mathbb{E}[X] = 1 + n + \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{E}[X_{i,j}].$$

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \frac{1}{3}.$$



$$\underline{\mathbb{E}[X] =}\ 1 + n + \frac{1}{6}n(n-1).$$

Dimostrare che esiste un torneo con girone all'italiana su $n \geq 1000$ persone in modo che per ogni insieme di 1000 persone, qualcuno, le batte tutte. (non tra loro)

Assegno le vittorie con probabilità $\frac{1}{2}$. Dato un insieme di 1000 persone, la probabilità che nessuno le batta tutte è:

$$\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}\right)^{n-1000}.$$

IL valore atteso del numero di sottoinsiemi con questa proprietà è $\binom{n}{1000}\left(1-\frac{1}{2^{1000}}\right)^{n-1000} < 1$ per n grande.

Teorema di Turán

Sia G un grafo su n vertici con grado medio d. Allora esiste un'anticricca con $\frac{n}{d+1}$ vertici. (Nota: è molto sharp)

Prendiamo un'anticricca a caso.

Consideriamo una permutazione degli n vertici, progressivamente prendiamo ogni vertice se non è adiacente a nessuno di quelli presi in precedenza.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ viene preso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Cosa sappiamo dire su $\mathbb{E}[X_i]$?

Se i compare prima di tutti i suoi vicini, lo prendiamo necessariamente.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] \geq \frac{1}{deg(v_i)+1}.$$

$$\mathbb{E}[X] \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{deg(v_i)+1} \overset{?}{\geq} \frac{n}{d+1} \quad \text{(Jensen)}.$$

Esercizio:

Dimostrare che $\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ t.c. $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$, esistono $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{+1, -1\}$ per cui $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leq 1$.

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum \varepsilon_k z_k\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum \varepsilon_k z_k\right)\left(\sum \varepsilon_k \overline{z_k}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|z_k|^2\right] + \cancel{\sum_{i \neq j} \mathbb{E}\left[2\varepsilon_i \varepsilon_j z_i \overline{z_j}\right]} = 1.$$

- Teorema di Sperner

Ogni anticatena nel poset $(P(X), \subseteq)$, dove $|X| = n$, ha cardinalità $\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

- Lemma

Se $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ è un'anticatena, allora

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{|S_i|}} \leq 1.$$

Consideriamo una generica catena

$$\emptyset = T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_n = X.$$

$$A_i = \begin{cases} 1 & \text{se } S_i \in \text{catena} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_k.$$

$\mathbb{E}[A] \leq 1$ perché una catena e un'anticatena si intersecano in al più un punto.

$$\mathbb{E}[A] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[A_i] = \frac{1}{\binom{n}{|S_i|}} \leq 1. \blacksquare$$

Da questo si deduce facilmente Sperner.

• Ajtai - Komlós - Szemerédi

Un grafo G privo di triangoli con n vertici e grado medio d ha un'anticricca di dimensione almeno $\varepsilon \cdot \frac{n}{d} \log d$.

Trick iniziale: ci sono al più $\frac{n}{2}$ vertici con grado $> 2d$. Li togliamo e ci basta dimostrare $\leq 4\varepsilon \cdot \frac{n}{D} \log D$, dove D è il grado massimo.

Prendiamo un'anticricca uniformemente a caso tra tutte le anticricche.

Data un'anticricca, assegniamo:

(i) $+D$ punti a ogni vertice dell'anticricca

(ii) $+1$ punto a ogni vertice vicino a uno nell'ant.

Un'anticricca S può valere al massimo $\leq 2D|S|$.

Ci basterà mostrare che, detta X_v la v.a. del numero di punti del vertice v, allora

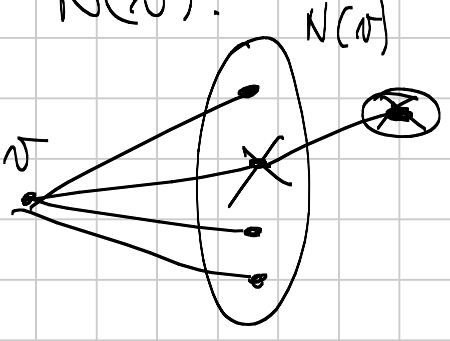
$\mathbb{E}[X_v] \geq \varepsilon \log D$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \varepsilon N \log D$.

Quindi c'è un anticricca S con $|S| \geq \frac{\varepsilon N \log D}{2D}$.

Quanto vale un vertice?

Immaginiamo di aver già scelto tutti tranne v e $N(v)$.



Sia m il numero di vicini ancora prendibili.

Se prendiamo v, una possibilità $\Rightarrow D$

Se non prendiamo v, 2^m possibilità $\Rightarrow$ val. att. $\frac{m}{2}$

In questo caso, il valore atteso di X_v è

$$\frac{1 \cdot D + 2^m \cdot \frac{1}{2} m}{2^m + 1} = \frac{D}{2^m+1} + \frac{1}{1+\frac{1}{2^m}} \cdot \frac{m}{2} > \varepsilon \max\left\{\frac{D}{2^m}, m\right\}$$

Se $m \geq \frac{1}{3} \log D$ ok, altrimenti

$$\frac{D}{2^{\frac{1}{3}\log D}} \geq D^{\alpha} \geq \log D.$$

Quindi $\max\left\{\frac{D}{2^m}, m\right\} \geq \varepsilon \log D$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_v] \geq \varepsilon \log D$, che è ciò che volevamo.

• Lovász Local Lemma

Se noi abbiamo k eventi $A_1, A_2, \dots, A_k$ tali che $\sum \mathbb{P}(A_i) < 1$, allora è possibile che nessuno si verifichi.

Se questi eventi fossero indipendenti, allora basta $\mathbb{P}(A_i) < 1 \ \forall i$.

Enunciato (versione simmetrica):

Dato un insieme di eventi di probabilità $\leq p$ tali che ognuno sia indipendente da tutti gli altri tranne al più d di essi, allora, se $pd \leq \frac{1}{e}$, è possibile che nessuno di essi si verifichi.

Problema (Russia)

Abbiamo alcune persone, ognuno ha tra 50 e 100 amici. Dimostrare che è possibile distribuire magliette di al più C colori (una a ciascuno) in modo che ognuno abbia 20 amici con magliette di colori diversi.

(i) Nell'originale $C = 1331$

(ii) Si può fare $C = 46$

Fate pure $C = 60$.

Premessa necessaria:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} < \frac{1}{e}\left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$k! \geq e \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Assegniamo le magliette a caso. P_i è la probabilità che l'i-esimo sia discontento.

Possiamo prendere $d = 100^2$, poiché P_i dipende solo dai vicini e dai vicini dei vicini.

Come stimiamo brutalmente la probabilità di fallire?

$$P_i \leq \binom{C}{19} \cdot \left(\frac{19}{C}\right)^{\deg v_i} \leq \binom{C}{19} \cdot \left(\frac{19}{C}\right)^{50}.$$

Quindi vogliamo $e \cdot \binom{C}{19}\left(\frac{19}{C}\right)^{50} \cdot 100^2 \leq 1.$

$$\binom{C}{19} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{eC}{19}\right)^{19}.$$

$$\frac{19^{31}}{C^{31}} \cdot e^{19} \cdot 100^2 \leq 1.$$

Prendendo $C = 57$ abbiamo

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{31} \cdot e^{19} \cdot 100^2 = \left(\frac{e}{3}\right)^{19} \cdot \frac{1}{3^{12}} \cdot 100^2 = \left(\frac{e}{3}\right)^{19} \cdot \left(\frac{100}{3^6}\right)^2 < 1.$$

Problemi per casa:

1. (Facile) Dimostrare che $R(k,k) > 2^{k/2}$.
Esiste un grafo su $\geq 2^{k/2}$ vertici senza k-cricche né k-anticricche.

2. (Medio) Ogni insieme finito $A \subseteq \mathbb{Z}$ ha un sottoinsieme $S \subseteq A$ con $|S| \geq \frac{1}{3}|A|$ t.c. se $a, b \in S$, allora $a+b \notin S$.

3. (Difficile) IMO 2014/6.
n rette in posizione generale. Ne posso colorare $\sqrt{n}$ senza creare poligoni tutti colorati. (n suff. grande)

(1pt) $\sqrt[3]{n}$ $\Leftarrow$
(2pt) $c\sqrt{n}$ (per un $c>0$) $\Leftarrow$
(4pt) $\sqrt{\frac{n}{2}}$
(7pt) $\sqrt{n}$

PARTE II - FUNZIONI GENERATRICI

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, abbiamo

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k.$$

Che cos'è il prodotto di due funzioni generatrici?

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k.$$

Il prodotto di funzioni generatrici è il prodotto di Cauchy delle successioni corrispondenti.

Chi è la funzione generatrice di $a_k = 1$ cost?

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Calcolare le seguenti funzioni generatrici

1. $\frac{1}{(1-X)^2}$
2. $\frac{1}{(1-X)^3}$
3. $\sum n^2 X^n$
4. $\frac{1}{1-X^k}$
5. $(1+x)^n$
6. $\sum \frac{X^n}{n+1}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$
8. $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$
9. $\frac{1}{(1-X)^k}$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$

---

1. $$\frac{1}{(1-X)^2} = (1 + x + x^2 + \dots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} (n+1) X^n$$

2. $$\frac{1}{(1-X)^3} = \frac{1}{(1-X)^2} \cdot \frac{1}{1-X} = (1 + 2x + 3x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) = \sum_{k \geq 0} \binom{k+2}{2} X^k.$$

$$\frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) X^n$$

$$\frac{2}{(1-X)^3} = \sum_{n \geq 0} n(n+1) X^{n-1}$$

3. $$\binom{k+2}{2} = \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{2} k + 1$$

$$k+1 = \qquad k+1$$

$$k^2 = 2\binom{k+2}{2} - 3(k+1) + 1$$

$$\sum k^2 x^k = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

4. $$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\ldots = 1+x^k+x^{2k}+\ldots$$

$y = x^k$

5. $$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k.$$

6. $$\sum_{k\geq 0} \frac{x^n}{n+1} = f(x).$$

$$\frac{d}{dx}(x f(x)) = \frac{1}{1-x}$$

$$x f(x) = -\log|1-x| + C \qquad \Leftarrow n=0,\ C=0$$

$$f(x) = \frac{-\log|1-x| + C}{x}$$

7. $$\sum_{k \geq 0} c_n x^n.$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k.$$

$$f(x)^2 = \sum_{k \geq 0} \Big(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} c_i c_j \Big) x^k = \sum_{k\geq 0} c_{k+1} x^k$$

$$x f(x)^2 = f(x) - 1$$

$$x f(x)^2 - f(x) + 1 = 0$$

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

8. $$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n =$$

$$= \sum \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} (-1)^n \cdot (4x)^n =$$

$$= \sum \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot 4^n \cdot x^n = \sum \frac{2^n \cdot (2n-1)!!}{n!} x^n =$$

$$= \sum \frac{\cancel{2^n}}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{\cancel{2^n} \cdot n!} x^n = \sum \binom{2n}{n} x^n.$$

9. $$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

10. $$\sum_{n \geq 0} F_n x^n = f(x).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= F_0 + F_1 x^1 + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots \\ x f(x) &= F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots \\ x^2 f(x) &= F_0 x^2 + F_1 x^3 + \ldots \end{aligned}$$

Notiamo che $f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = x$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Se lo vogliamo decomporre in fratti parziali, troviamo le radici, che sono $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

così $$f(x) = \frac{\alpha}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{\beta}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

Esercizi:

1. Trovare una formula chiusa per C_n.

2. $\sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=50}} ijk$

3. $\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a}\binom{2b}{b}$

4. $\sum_{a+b=m} (-1)^a \binom{n}{a}\binom{n+b-1}{b}$ $\quad (m>0)$

---

1. $C_n = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$

$$f(x) = \sum C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

$$g(x) = \sum \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$\sum \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$\int \sum \binom{2n}{n} x^n = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$\sum \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^{n+1} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4x} + c$$

$$x\, F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4x} + c$$

$x=0$ ci dice $c = 1/2$

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = f(x)$$

2. $\sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=50}} ijk.$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$f(x)^3 = \frac{x^3}{(1-x)^6} = \frac{A}{(1-x)^6} + \frac{B}{(1-x)^5} + \frac{C}{(1-x)^4} + \frac{D}{(1-x)^3}$$

che si possono calcolare.

In alternativa, guardare $\sum (i+1)x^i$

3. $\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} = 4^n.$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad f(x)^2 = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n\geq 0} 4^n x^n$$

4. $\sum_{a+b=n} (-1)^a \binom{n}{a}\binom{n+b-1}{b}.$

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} x^k = (1-x)^n.$$

$$g(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^n = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Quindi $f(x)g(x) = 1$.

Siccome $n>0$, la sommatoria vale 0.

PARTE III - CAUCHY-DAVENPORT

Dati $A, B \subseteq G$ abeliano, definiamo

$$A+B = \{a+b \mid a\in A, b\in B\}.$$

Come possiamo stimare la cardinalità di $A+B$?
Su $\mathbb{N}$ abbiamo $A=\{a_1<a_2<\dots<a_n\}$ e $B=\{b_1<b_2<\dots<b_m\}$,
allora $a_1+b_1<a_1+b_2<a_1+b_3<\dots<a_1+b_m<\dots<a_2+b_m<\dots<a_n+b_m$ stanno tutti in $A+B$.
Allora $|A+B|\geq|A|+|B|-1$.

- Cauchy-Davenport

Dati $A,B\subseteq\mathbb{Z}_p$, si ha $|A+B|\geq\min\{|A|+|B|-1,\ p\}$.

Dimostriamolo per induzione.
Se $|B|=1$ è banale.
Proviamo con $|B|=2$.
La tesi con $|B|=2$ equivale a dire che $\forall A\subseteq\mathbb{Z}_p$ con $0<|A|<p$ e $b\in\mathbb{Z}_p$, l'insieme $A+b\neq A$.
Se esistesse b, allora per un certo $a\in A$, abbiamo $a+kb\in A$ $\forall$ k intero positivo.
Ma $\{a+kb \mid k\in\mathbb{Z}^+\}=\mathbb{Z}_p$.
Se $|B|>1$, allora $|A+B|>|A|$.
Esisterà $a_0\in A$ t.c. $a_0+B\not\subseteq A$. Sia quindi
$B_0=\{b\in B \mid a_0+b\notin A\}$. $|B_0|\geq 1$.
Sia quindi ora
$A'=A\cup(a_0+B_0)$ e $B'=B\setminus B_0$.
$|B'|=|B|-|B_0|$.
$|A'|=|A|+|B_0|-\cancel{|A\cap(a_0+B_0)|}$
Quindi $|A'|+|B'|=|A|+|B|$.

Speriamo di dimostrare che $A'+B' \subseteq A+B$.

$A'+B' = (A+B') \cup (a_0+B_0+B')$.

Ovviamente $A+B' \subseteq A+B$

Il punto fondamentale è che $\forall b_0 \in B_0$ e ogni $b \in B'$ si deve avere

$a_0+b_0+b \in A+B$.

Ma, per definizione di $B' = B \setminus B_0$, abbiamo $a_0+b \in A$. Poiché $b_0 \in B$, abbiamo finito per <u>induzione</u> sulla cardinalità di B.

Digressione (Combinatorial Nullstellensatz)

Lemma quasi ovvio.

Se $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ con grado in x_i pari a t_i, dati $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $|S_i| = t_i + 1$, esiste un punto in $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ in cui f non si annulla.

- Combinatorial Nullstellensatz

Se il coefficiente di $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ non è nullo e $t_1+t_2+\dots+t_n$ è il grado del polinomio, allora vale la stessa cosa.

Problemi per casa:

1. Usare il Combinatorial Nullstellensatz per dimostrare Cauchy-Davenport.
2. Sia p un primo, G un grafo completo su $1000p$ vertici. Su ogni arco c'è un intero.

Dimostrare che esiste un ciclo con somma multipla di p.

Altre applicazioni classiche di Comb. Null.

- Chevalley - Warning
- IMO 2007/6