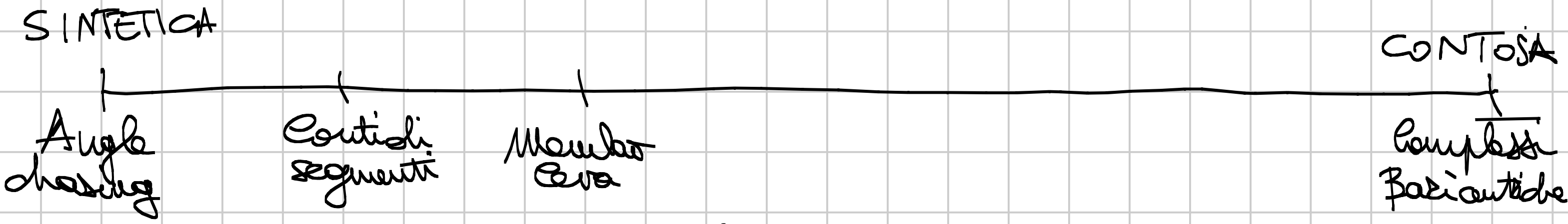
SENIOR 2023 - GEOMETRIA 1

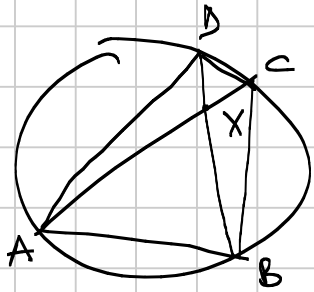
Premessa.



1. Modi di fare conti di segmenti
2. Funzioni lineari
3. Teorema di Casey

Parte 1.

Lemma. $A, B, C, D \in \omega$. $X = AC \cap BD$



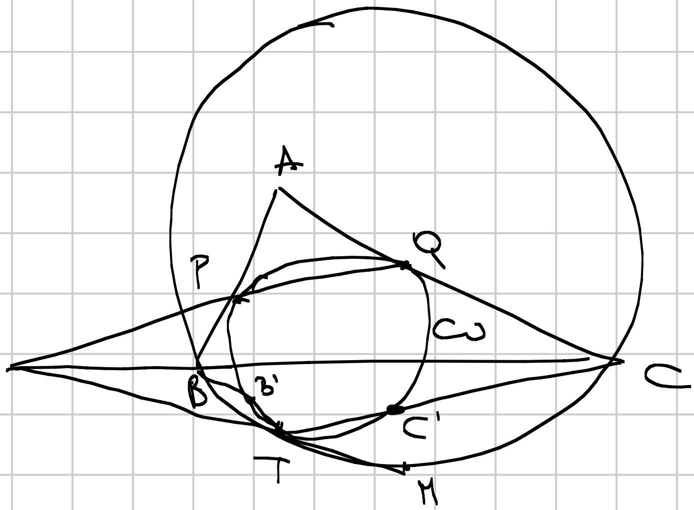
$$\Rightarrow \frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC}$$

Per thm seni su $\widehat{AXB}$ e $\widehat{CXB}$,

$$\frac{AX}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{BX}{\sin \widehat{CAB}}, \quad \frac{CX}{\sin \widehat{CBD}} = \frac{BX}{\sin \widehat{ACB}}$$

$$\Rightarrow \frac{AX}{CX} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{CAB}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{AB}{DC}.$$

Esempio 1.



$X_1 = PQ \cap BC$. $X_2 = TM \cap BC$.

$$\frac{BX_1}{CX_1} = \frac{PB}{QC} \text{ (Menelao)} ; \quad \frac{BX_2}{CX_2} = \frac{BT}{CT}$$

$B' = BT \cap \omega$, $C' = CT \cap \omega$. $B'C' \parallel BC$.

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{BT}{CT}. \quad BP^2 = BB' \cdot BT \quad CQ^2 = CC' \cdot CT$$

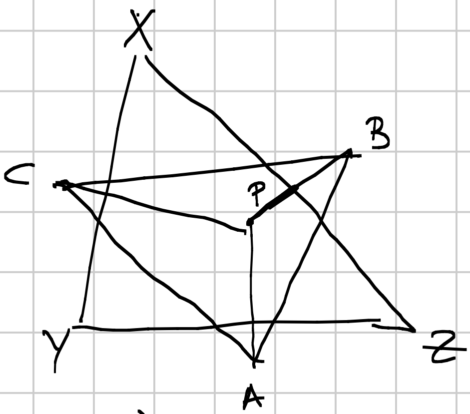
$$\left(\frac{BP}{CQ}\right)^2 = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{BT}{CT} = \left(\frac{BT}{CT}\right)^2 \Rightarrow \frac{BX_1}{CX_1} = \frac{BX_2}{CX_2}.$$

∎

Esempio 2.

Dati $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ triangoli, $\triangle ABC$ è ortologico su $\triangle XYZ$ se le rette per A, B, C perpendicolari a YZ, ZX, XY concorrono.

$\triangle ABC$ ortologico su $\triangle XYZ \iff \triangle XYZ$ ortologico su $\triangle ABC$.



Lemma (Carnot):

$\triangle ABC$ ortologico su $\triangle XYZ \iff AY^2 + BZ^2 + CX^2 = AZ^2 + BX^2 + CY^2$.

($\Rightarrow$) $PY^2 - PZ^2 = AY^2 - AZ^2$, Sommando ciclicamente abbiamo l'identità.

($\Leftarrow$) P t.c. $PB \perp XZ$ e $PC \perp XY$.

$$PX^2 - PZ^2 = BX^2 - BZ^2$$
$$PY^2 - PX^2 = CY^2 - CX^2$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{PY^2 - PZ^2} = BX^2 + CY^2 - BZ^2 - CX^2 = \underline{AY^2 - AZ^2}$$

$\Rightarrow PA \perp YZ$.

Parte 2. Funzioni lineari

Una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice lineare se è del tipo $f(x,y) = ax + by + c$.

Proprietà:

(i) $f(\lambda \vec{P} + (1-\lambda)\vec{Q}) = \lambda f(\vec{P}) + (1-\lambda) f(\vec{Q})$

(ii) Il luogo dei punti P t.c. $f(P) = 0$ è: l'insieme vuoto, una retta o tutto il piano.

(iii) f, g lineari $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ lineare

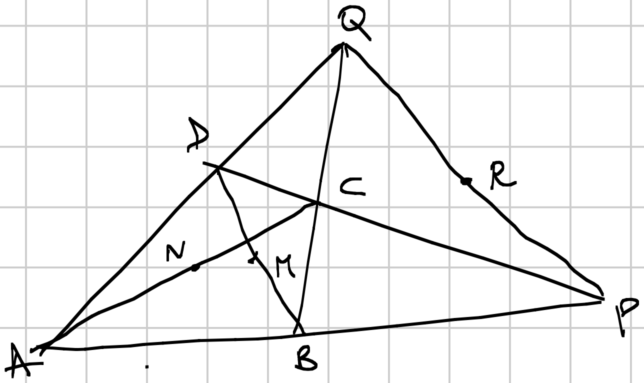
$f(P) = d(P, r)$ (con segno)

$f(P) = [PAB]$ (con segno)

$f(P) = \mathrm{pow}_{\omega_1}(P) - \mathrm{pow}_{\omega_2}(P)$.

$f(P) = \sum \lambda_i \, \mathrm{pow}_{\omega_i}(P)$ lineare se $\sum \lambda_i = 0$

Esempio 3.



Consideriamo il luogo $\mathcal{L}$ dei punti X tali che
$[XAB] + [XCD] = [XBC] + [XDA]$.

$N \in \mathcal{L}$ poiché $[ANB] = [BNC]$ e $[CND] = [DNA]$.
Analogamente, $M \in \mathcal{L}$.

$R \in \mathcal{L}$. $[RAB] = \frac{1}{2}[QAB]$. $[RCD] = \frac{1}{2}[QCD]$.

$[RAB] + [RCD] = \frac{1}{2}[QAB] + \frac{1}{2}[QCD] = \frac{1}{2}[ABCD] =$
$= [RBC] + [RDA]$.

Esempio 4. Se $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di centro I, allora $I \in$ retta di Gauss.

$[IAB]+[ICD] = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot CD = \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot DA$.

Problema. $\widehat{ABC}$ acutangolo. $\theta < \frac{1}{2}\min(\alpha, \beta, \gamma)$.

$S_A, T_A \in BC$ t.c. $\widehat{BAS_A} = \widehat{T_AAC} = \theta$.

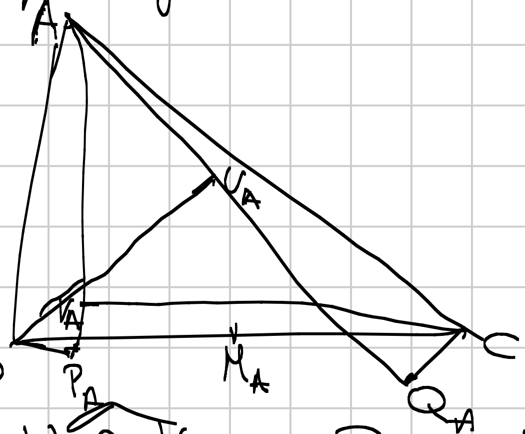
P_A proiezione di B su AS_A, Q_A proi. di C su AT_A.

Dimostrare che gli assi di P_AQ_A, P_BQ_B, P_CQ_C concorrono o sono tutti paralleli.

BCP_BQ_C ciclico (trapezio isoscele).

Per il "lemma ucbelo" (per gli amici BMO 2019/3)

$M_AP_A = M_AQ_A$.



U_A proi. di B su AQ_A,

V_A proi. di C su AP_A.

$\widehat{V_AP_AU_A} = \widehat{ABU_A} = \widehat{ACV_A} = \widehat{U_AQ_AV_A} \Rightarrow P_A, Q_A, U_A, V_A$ conciclici.

La proiezione di M_A su P_AV_A è il punto medio

$\Rightarrow M_A$ sta sull'asse di P_AV_A. $\Rightarrow M_A$ è il centro di $(P_AQ_AU_AV_A)$.

$M_AP_A = M_AQ_A$. $M_AP_B = M_AQ_C$.

Claim. $M_AQ_B = M_AP_C$. Segue dal lemma di prima con $90° - \theta$.

Gli assi di (concorrono)

(i) P_AQ_A, P_BQ_C, P_CQ_B

(ii) P_BQ_B, P_CQ_A, P_AQ_C

(iii) P_CQ_C, P_AQ_B, P_BQ_A

(iv) P_AQ_A, P_BQ_B, P_CQ_C (Aperto)

(v) P_AQ_B, P_BQ_C, P_CQ_A (in O)

$f:\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$

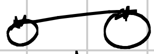
$f(X) = (XP_A^2 + XP_B^2 + XP_C^2) - (XQ_A^2 + XQ_B^2 + XQ_C^2)$

È lineare. È nulla in $M_A, M_B, M_C \Rightarrow$ è nulla ovunque.

$\Rightarrow$ Tesi.

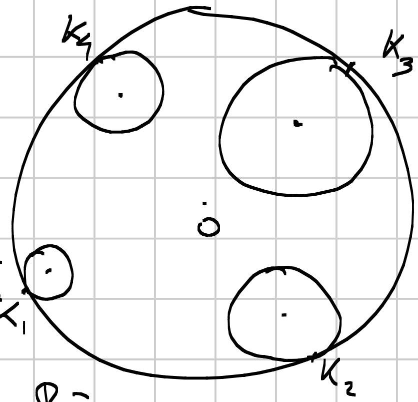
Parte 3. Teorema di Casey

ω circonf. $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ disgiunte tangenti a ω. t_{ij} è definita come

- Se ω_i e ω_j sono dalla stessa parte, la lunghezza delle bitangenti esterne 
- Se ω_i e ω_j sono da parti diverse, bitangenti interne.

Allora $t_{12}\cdot t_{34} + t_{23}\cdot t_{41} = t_{13}\cdot t_{24}$.

Inoltre vale l'implicazione inversa.



$t_{ij}^2 = O_iO_j^2 - (R_i - R_j)^2$

Dobbiamo calcolare $\overline{O_iO_j}$.

$O_iO_j^2 = OO_i^2 + OO_j^2 - 2OO_i \cdot OO_j \cos \widehat{O_iOO_j}$

Ora, $OO_i = R - R_i$, $OO_j = R - R_j$.

$\cos \widehat{O_iOO_j} = 1 - \frac{K_iK_j^2}{2R^2}$.

$O_iO_j^2 = (R_i - R_j)^2 + (R - R_i)(R - R_j) \cdot \frac{K_iK_j^2}{R^2}$

$t_{ij} = \sqrt{(R-R_i)(R-R_j)} \cdot \frac{K_iK_j}{R}$

$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = \frac{1}{R^2}\sqrt{(R-R_1)(R-R_2)(R-R_3)(R-R_4)}\,(K_1K_2\cdot K_3K_4 + K_2K_3\cdot K_4K_1) =$

$= \frac{1}{R^2}\sqrt{(R-R_1)(R-R_2)(R-R_3)(R-R_4)}\cdot(K_1K_3\cdot K_2K_4) = t_{13}\cdot t_{24}.$

PROBLEMI

1. Dimostrare il teorema di Feuerbach. (Facile)

1bis. Dimostrare che inscritta ed excerchi hanno una circonferenza che le tange tutte.

2. $A_1A_2A_3A_4$ non ciclico. $\omega_i = (A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3})$ (indici modulo 4). (Medio-facile)

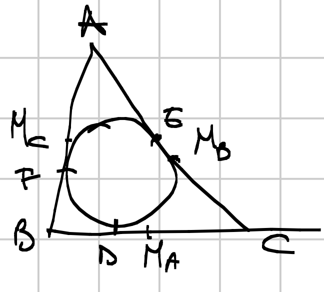
Tesi: $$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{pow_{\omega_i}(A_i)} = 0$$ (IMOSL 2011/G2)

3. $\overset{\triangle}{ABC}$ di circocentro O e circoscritta Γ. r retta esterna a Γ. $BC \cap r = X$. Y, Z ciclici. P proiezione di O su r. (PAX), (PBY), (PCZ) coassiali. (Più o meno hard) (IMOSL 2012/G8)

4. A, V_1, V_2, B, U_2, U_1 fissati su circonferenza ω in quest'ordine, cosicché $BU_2 > AU_1 > BV_2 > AV_1$. $X \in \overset{\frown}{V_1V_2}$ variabile. $C = XA \cap U_1V_1$, $D = XB \cap U_2V_2$. $\exists K$ fisso t.c. $pow_{(XCD)}(K)$ è costante. (Hard) (USATSTST 2021/2)

5. $\omega \cap \Omega = \{A, B\}$. M punto medio di $\overset{\frown}{AB}$ in ω (M è dentro Ω). Una corda MP di ω interseca Ω in Q, interno a ω. l_P retta per P tangente a ω, l_Q retta per Q tangente a Ω. La circoscritta al triangolo di lati l_P, l_Q, AB tange Ω. (Medio) (APMO 2014/5)

① Teorema di Feuerbach



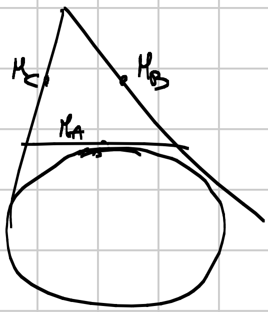
Casey su M_A, M_B, M_C, ω.
t_A, t_B, t_C

$$t_A = DM_A = \frac{|b-c|}{2}.$$

$$M_BM_C \cdot t_A = \frac{a|b-c|}{4}$$

È chiaro che tra $\frac{|ab-ac|}{4}$, $\frac{|bc-ba|}{4}$, $\frac{|ca-cb|}{4}$, una è somma delle altre due. In particolare, se $a<b<c$, è la seconda.

Con l'excerchio



$$\frac{|b-c|}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$t_B \cdot M_A M_C = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

$$t_C \cdot M_A M_B = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2}.$$

$$|t_B \cdot M_A M_C - t_C \cdot M_A M_B| = \frac{|ab-ac|}{4} = \frac{a|b-c|}{4}.$$

1bis. Casey su ω, ω_A, ω_B e ω_C.

t_A → bit. ext. ω e ω_A, u_A → bit. int., t_{BC} → bit. ext. ω_B e ω_C, u_{BC} → bit. int.

$t_A = a$, $u_A = |b-c|$, $t_{BC} = b+c$, $u_{BC} = a$.

Quindi, se abbiamo ω interna, le altre esterne,

$u_A t_{BC} = |b^2 - c^2|$, $u_b t_{CA} = |c^2 - a^2|$, $u_C t_{AB} = |a^2 - b^2|$

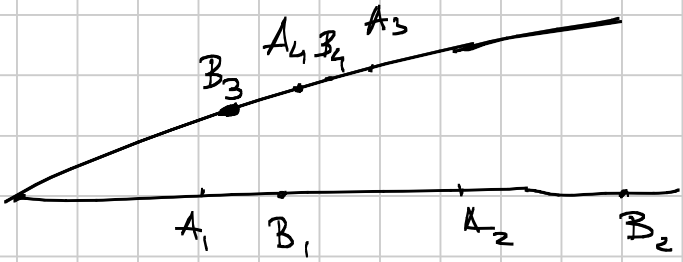
$\Rightarrow$ una è la somma delle altre due.

Se prendessimo ω_A da un lato le altre dall'altro.

$u_A t_{BC} = |b^2 - c^2|$; $t_B u_{AC} = b^2$, $t_C u_{AB} = c^2$.

② $$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\mathrm{pow}_{\omega_i}(A_i)} = 0$$

Sol. 1. Segment chasing



$$\mathrm{pow}_{\omega_1}(A_1) = A_1A_2 \cdot A_1B_1 = (PA_2 - PA_1)\cdot\left(PB_1 - PA_1\right) =$$
$$= (PA_2 - PA_1)\left(\frac{PA_3 \cdot PA_4}{PA_2} - PA_1\right). \qquad x_i = PA_i$$
$$\mathrm{pow}_{\omega_2}(A_2) = (PA_1 - PA_2)\left(\frac{PA_3 \cdot PA_4}{PA_1} - PA_2\right).$$
$$\frac{1}{\mathrm{pow}_{\omega_1}(A_1)} + \frac{1}{\mathrm{pow}_{\omega_2}(A_2)} = \frac{x_2}{(x_2-x_1)(x_3x_4-x_1x_2)} + \frac{x_1}{(x_1-x_2)(x_3x_4-x_1x_2)} =$$
$$= \frac{1}{x_3x_4 - x_1x_2} \Rightarrow \blacksquare.$$

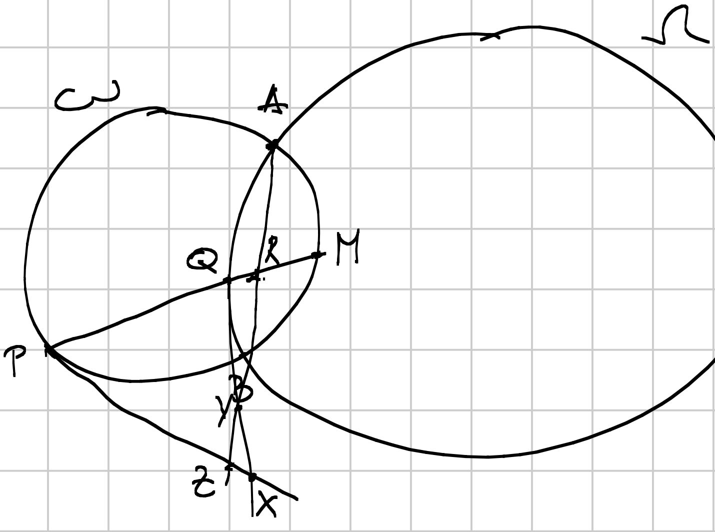
Sol. 2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\mathrm{pow}_{\omega_i}(X)}{\mathrm{pow}_{\omega_i}(A_i)}.$$
$$f(A_i) = 1.$$
$f(x,y) = a(x^2+y^2) + bx + cy + d$, dove $a = \sum \frac{1}{\mathrm{pow}_{\omega_i}(A_i)}$

Ma allora $\{(x,y) : f(x,y) = 1\}$ è una circonferenza.

Assurdo, a meno che $a = 0$.

(5)



Tesi: (XYZ) tange Ω. t_X, t_Y, t_Z segmenti di tangenza.

$t_X = XQ$, $t_Y = YQ$, $t_Z = ZP$

$$XY \cdot ZP = \underbrace{YZ \cdot XQ}_{\Delta} + \underline{XZ \cdot YQ}$$

Menelao su XYZ:

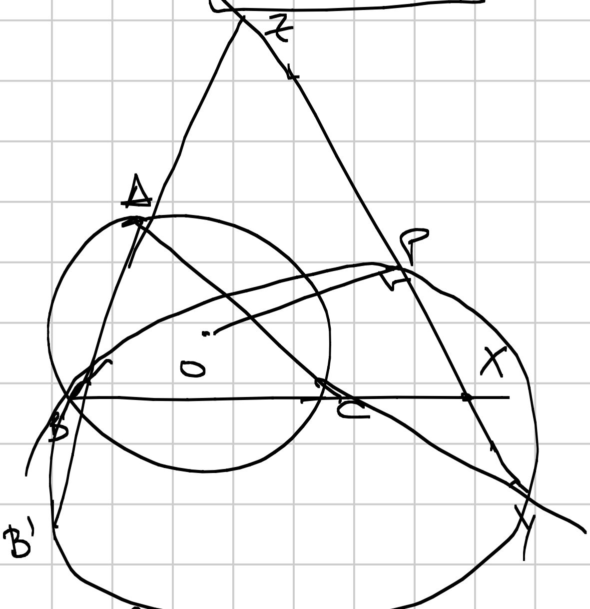
$$\frac{XQ}{QY} \cdot \frac{YR}{\cancel{RZ}} \cdot \frac{\cancel{ZP}}{PX} = 1$$

$$\frac{XQ}{QY} \cdot \frac{ZP - ZY}{PZ + ZX} = 1$$

$$XQ \cdot ZP - \underline{XQ \cdot ZY} = QY \cdot PZ + \underline{QY \cdot ZX} \Rightarrow \text{tesi.}$$

---

(3) $\omega_A = (PAX)$.



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(Q) = \lambda_A \, pow_{\omega_A}(Q) + \lambda_B \, pow_{\omega_B}(Q) + \lambda_C \, pow_{\omega_C}(Q).$$

Se $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 0$, f è lineare.

Innanzitutto, dobbiamo capire i valori di λ_A, λ_B, λ_C.

Dopodiché, dimostriamo che f è identicamente nulla.

Per calcolare $pow_{\omega_B}(A)$, sia $B' = \omega_B \cap AB$.

ZB' si calcola per potenza di un punto.

Quindi $pow_{\omega_B}(A) = AB \cdot AB'$

Esercizio per casa: Finire i conti di questo problema, usando i segmenti orientati.