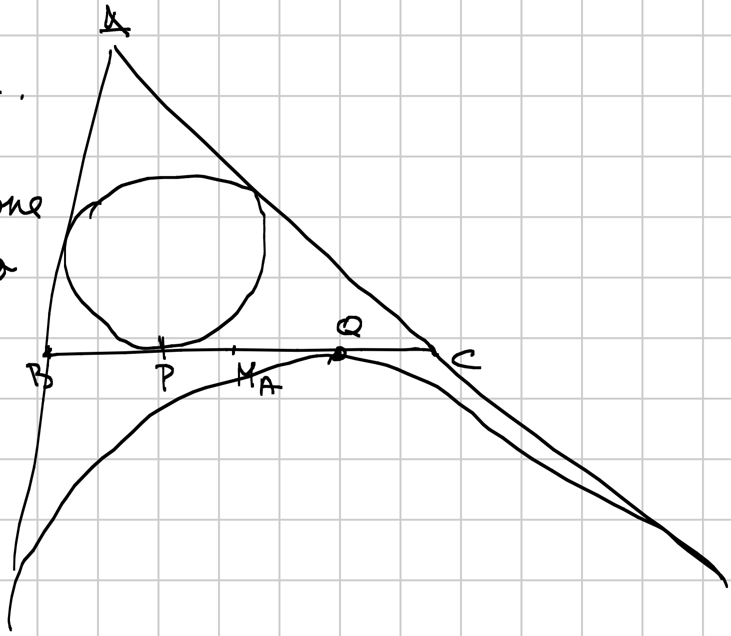
G3 Advanced - Massimiliano

Note Title 08/09/2023

PARTE I - TEOREMA DI FEUERBACH

Γ Feuerbach, ω inscritta, ω_A ex-inscritta.

Oss.: $M_A P = M_A Q$.



Sia ψ l'inversione in M_A di raggio $M_A P = M_A Q$.

$\psi(\omega) = \omega$

e $\psi(\omega_A) = \omega_A$

Sia $l = \psi(\Gamma)$. Vorremmo dimostrare che l tange ω e ω_A. Sarà la simmetrica di BC rispetto alla bisettrice di $\widehat{BAC}$.

(i) È antiparallela (a BC)

(ii) l deve passare per il piede della bisettrice interna.

(i) $l \perp M_A N_A$, dove N_A è il punto medio di AH.

Ma è noto che $M_A N_A \parallel AO \Rightarrow l$ antiparallela.

(ii) Detti H_A piede dell'altezza e D piede della bisettrice, vogliamo $\psi(H_A) = D$.

$\iff M_A P^2 = M_A D \cdot M_A H_A$

$\iff (D, H_A; P, Q) = -1$

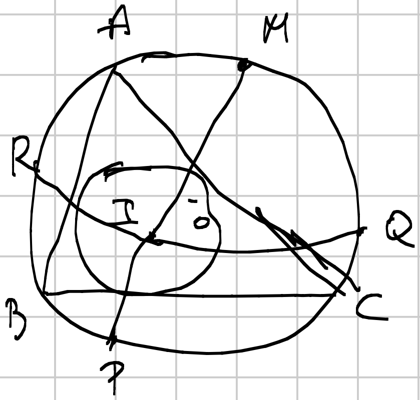
$\iff (D, A; I, I_A) = -1$ ✓

PARTE II. PORISMA DI PONCELET

Siano ω e γ due coniche. Se esiste un n-agono

$A_1 A_2 \dots A_n$ inscritto in ω e circoscritto a γ, allora ne esistono infiniti. In particolare, per ogni punto di ω ce n'è uno che lo ha come vertice, $\forall$ punto di γ ce n'è uno che lo ha come p.to di tangenza.

Dimostriamolo per ω e γ circonferenze e $n=3$.



$\forall P \in (ABC)$, $\exists\, Q, R \in (ABC)$ t.c. $\widehat{ABC}$ e $\widehat{PQR}$ condividono l'inscritta.

Notiamo che $OI^2 = R(R-2r)$

Sia $M = PI \cap (ABC)$. Siano $Q, R \in (ABC)$ t.c. $MQ = MI = MR$.

Allora, I è l'incentro di $\widehat{PQR} \Rightarrow \widehat{PQR}$ condividono circoscritta e incentro $\Rightarrow$ condividono l'inscritta.

Problema.

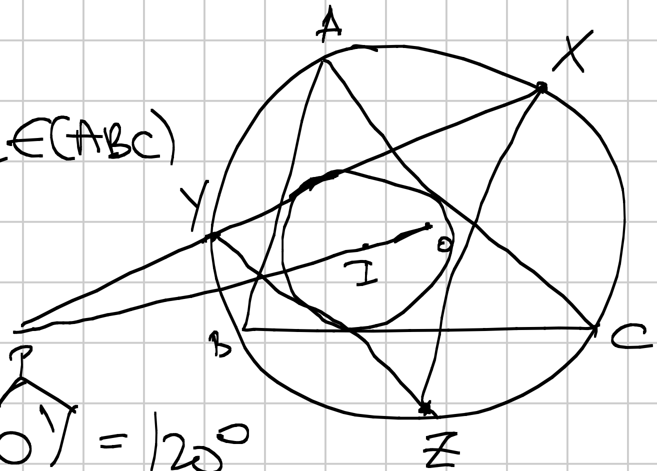
$\widehat{ABC}$ triangolo. I_A excentro. I_A' simmetrico di I_A rispetto a BC. $\ell_A = AI_A'$. ℓ_A' simm. di AI_A' rispetto alla bisettrice di $\widehat{BAC}$.

(i) $\ell_A', \ell_B', \ell_C'$ concorrono su OI in P.

(ii) Una tangente da P all'inscritta interseca (ABC) in X, Y. Mostrare $\widehat{XIY} = 120°$.

Chi è P?

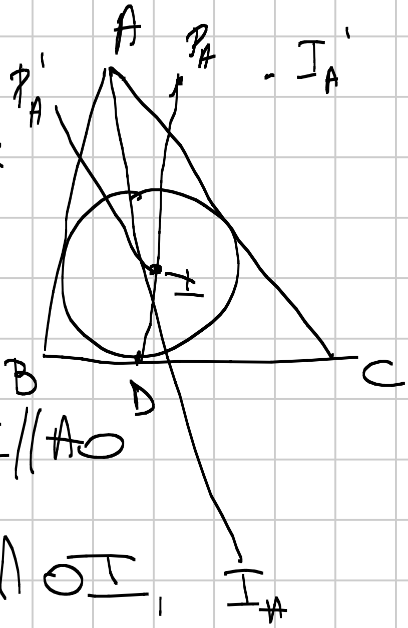
Per Poncelet, $\exists\, Z \in (ABC)$ tale che ZX e ZY toccano ω.



Se $\widehat{XIY} = 120°$, allora $\widehat{XZY} = 60° \Rightarrow \widehat{XOY} = 120°$

$\Rightarrow XYIO$ è ciclico.

Se $XYIO$ ciclico, allora $\widehat{XIY} = 120°$.
Invertendo nella circoscritta, abbiamo X, Y, I^* allineati. Quindi dovrà essere $I^* = P$.
Vogliamo mostrare P, I inversi in (ABC).



Per omotetia, posso considerare $P_A \in DI$ tale che $P_A I = 2r$

Ora P_A' (il simm.) sarà tale che $P_A' I \parallel AO$ e $P_A' I = 2r$.

Definendo $P = AP_A' \cap OI$, abbiamo per Talete che $\frac{PI}{PO} = \frac{P_A' I}{AO} = \frac{2r}{R}$

Osservazione:
Questa cosa non dipende dalla lunghezza di $P_A I$. In particolare, scegliendo opportune lunghezze, abbiamo

(i) Coniugato isogonale di Gergonne è exsimilcenter di inscr. e circ.
(ii) Coniugato isog. di Nagel è insimilcenter
(iii) ITAMO 2022/6a

$$\frac{PO - \sqrt{R(R-2r)}}{PO} = \frac{2r}{R}$$

$$PO \cdot R - R\sqrt{R(R-2r)} = 2r \cdot PO$$

$$PO = \frac{R\sqrt{R(R-2r)}}{R-2r} = \frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{R-2r}}$$

$$PO \cdot OI = \frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{\cancel{R-2r}}} \cdot \sqrt{R(\cancel{R-2r})} = R^2$$

Problema per casa.
Sia $\hat{ABC}$ un triangolo con inscritta ω, tangente a BC, CA e AB in D, E, F. $L = EF \cap BC$. N punto medio di DL. La seconda tangente da N a ω interseca (ABC) in X, Y. Le tangenti da X, Y a ω si intersecano in K.
Dimostrare che $\widehat{BAD} = \widehat{CAK}$.

PARTE III - TEOREMA DI INVOLUZIONE DI DESARGUES

In geometria proiettiva, chiamiamo involuzione su P (dove P è una retta o una conica) una funzione $f: P \to P$ tale che
(i) $\forall A, B, C, D \in P$, $(A, B; C, D) = (f(A), f(B); f(C), f(D))$
(ii) $\forall A$, $f(f(A)) = A$.

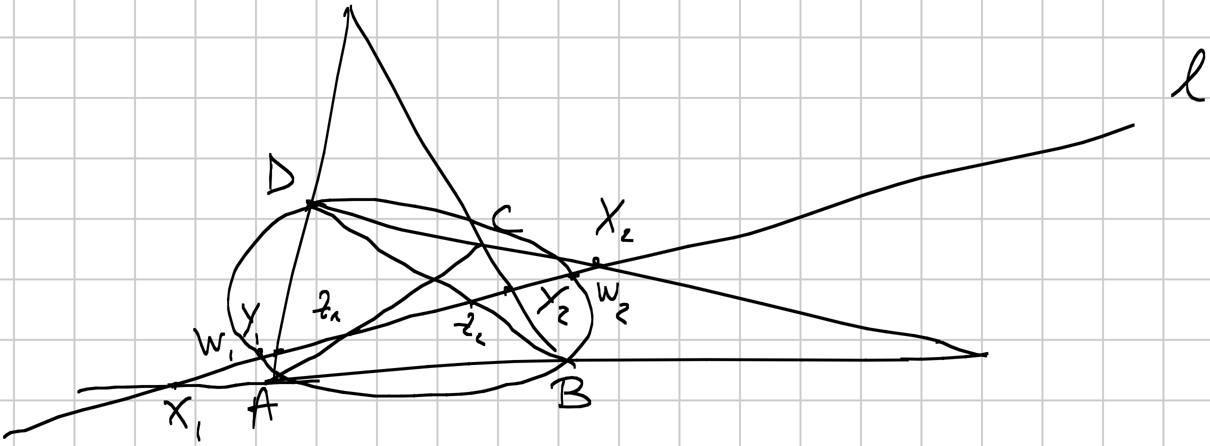
Lemma 1. Se $f: P \to P$ preserva il birapporto ed esistono $A, A' \in P$ distinti tali che $f(A) = A'$ e $f(A') = A$, allora f è un'involuzione.

Lemma 2. Le involuzioni su una retta sono tutte e sole le inversioni (per opportuna definizione di inversioni, che include anche la riflessione, i.e. inversione all'infinito).

Lemma 3. Le involuzioni su una conica $\mathcal{C}$ sono date da $f(P) = XP \cap \mathcal{C}$, dove $X \notin \mathcal{C}$ è un punto fissato fuori dalla conica.

• Teorema di involuzione di Desargues
Sia $ABCD$ un quadrilatero. Una retta l interseca AB, CD, AD, BC, AC, BD in $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$. Una conica $\mathcal{C}$ per A, B, C e D interseca l in W_1, W_2.

Allora le coppie (X_1, X_2) (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2) e (W_1, W_2) sono scambiate da un'involuzione.



Esisterà una certa trasformazione proiettiva f che fissa ℓ e fa $W_1 \Leftrightarrow W_2$ e $X_1 \to X_2$.
Per il lemma 1, f è un'involuzione $\Rightarrow f(X_2) = X_1$.

$(X_1, Y_1; W_1, W_2) \overset{A}{=} (B, D; W_1, W_2) \overset{C}{=} (Y_2, X_2; W_1, W_2) =$
$= (X_2, Y_2; W_2, W_1) = (f(X_1), Y_2; f(W_1), f(W_2))$.

Ma allora $f(Y_1) = Y_2$.

- Duale del teorema di involuzione di Desargues (DDIT)

Premessa: possiamo definire le involuzioni sui fasci di rette.

ABCD quadrilatero. $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$.
ℓ conica inscritta. Da P generico si tracciano tangenti PX, PY. Allora $\exists$ involuzione che scambia (PX, PY), (PA, PC), (PB, PD), (PE, PF).

Problemi

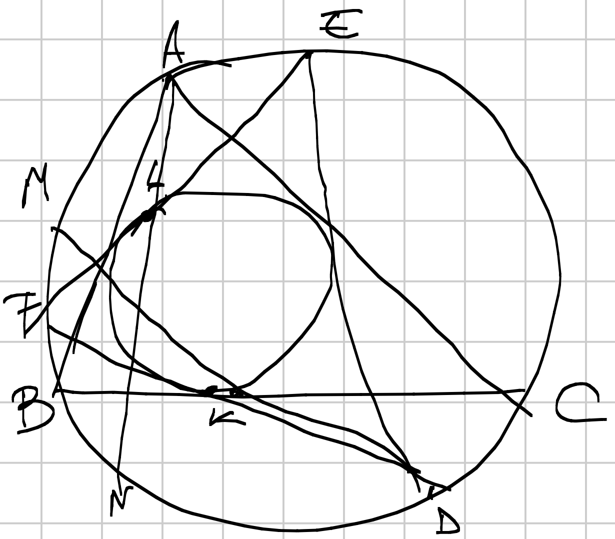
1. $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ inscritti in γ e circoscritti a ω. EF e BC tangono ω in L e K. $N = AL \cap \gamma$ e $M = DK \cap \gamma$. AM, EF, BC, ND concorrono.
2. $\Gamma = (ABC)$, ω_A excerchio. Le tangenti comuni a Γ e ω_A intersecano BC in P e Q. Dimostrare che $\widehat{PAB} = \widehat{CAQ}$.

Per casa:

3. $\overset{\triangle}{ABC}$ e P generico, l retta per P. A_1 intersezione della simm. di PA rispetto a l con BC.
A_1, B_1, C_1 allineati

4. $M \in (ABC)$. Le tangenti da M all'inscritta intersecano BC in X_1, X_2. (MX_1X_2) passa per il punto di tangenza con (ABC) della A-mistilinea.

1.

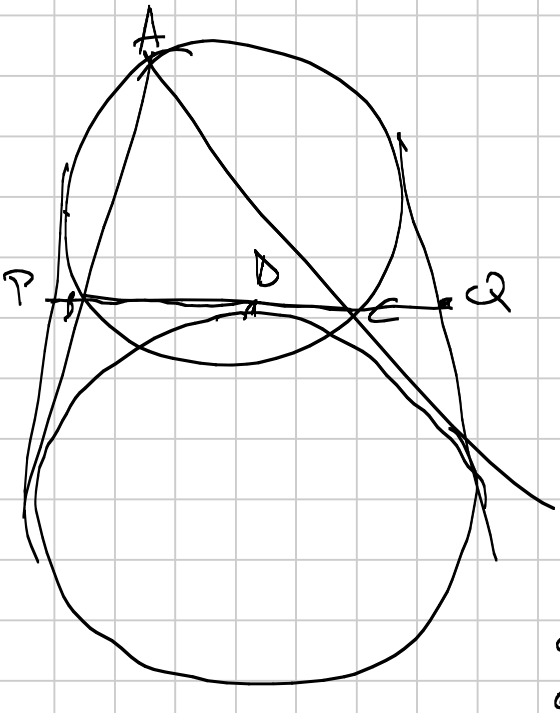


AM, DN, BC, EF concorrono.

DDIT su $ABKC$ con punto esterno D.

$(DA, DK), (DB, DC), (DE, DF)$ scambiate da involuzione. Proiettando su (ABC) abbiamo $(A, M), (B, C), (E, F)$ scambiate
$\Rightarrow AM, BC, EF$ concorrono.
Analogamente DN, BC, EF concorrono.

2.



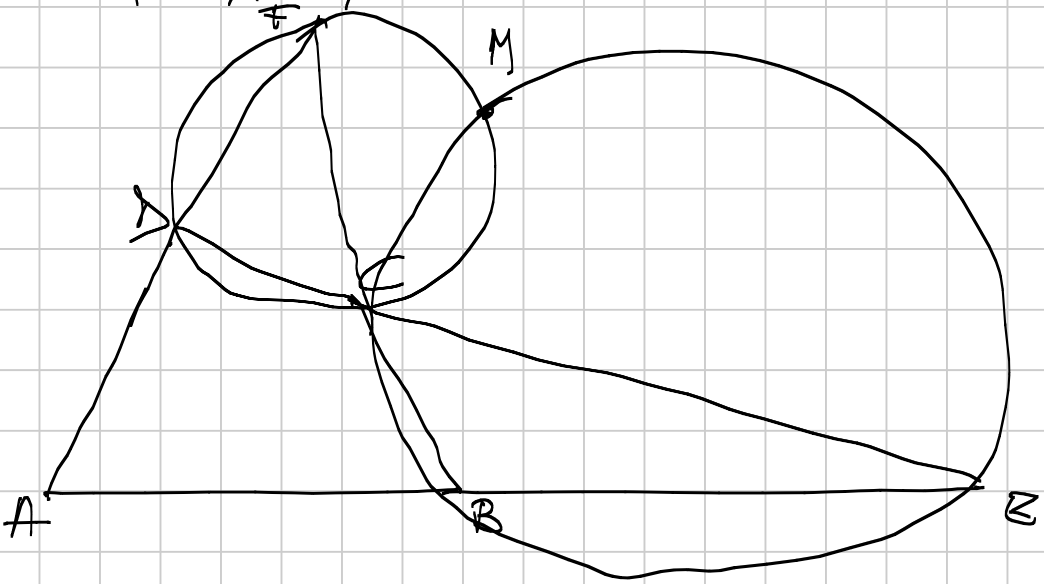
X exsimilcenter di T e ω_A.

(i) AX, AD isogonali (fatto noto)

(ii) DDIT su $XPDQ$ e A punto esterno dà $(AP, AQ), (AB, AC), (AX, AD)$ scambiati.
L'involuzione in questione è la simmetria.

PARTE IV - CLAWSON-SCHMIDT CONJUGATION

Sappiamo che, dato ABCD quadrilatero, un punto X ammette coniugato isogonale se e solo se $\measuredangle AXB = \measuredangle DXC$.



Osservazione: $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$

Inoltre, $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMD}$, $\widehat{EMF}$ condividono la bisettrice.

Quindi esiste inversione + symm in M, chiamata Φ