Algebra 1 Basic : polinomi & complessi

Titolo nota 03/09/2023

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 0 - 0) \qquad a_i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$
$\in \mathbb{Q}[x]$
$\in \mathbb{R}[x]$
$\in \mathbb{C}[x]$

a_0 = termine noto

a_n = coefficiente direttivo

il polinomio ha grado n

$$\deg P = \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$$

Possiamo fare operazioni tra polinomi

$\{a_i\}$ $\{b_j\}$

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_m + b_m) x^m$$

$$Q: \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

$$P(x) \cdot Q(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots$$

$$\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$$

$$P(Q(x)) = a_0 + a_1 (Q(x)) + a_2 (Q(x))^2 + \dots$$
$$= a_0 + a_1 b_0 + a_1 b_1 x + a_1 b_2 x^2 \dots + a_2 b_0^2 + a_2 \dots$$

$$\deg P(Q) = \deg P \cdot \deg Q$$

Problema: Trovare i polinomi a coefficienti reali $P(x), Q(x)$ $(\in \mathbb{R}[x])$ tali che
$$P(Q(x)^2) = P(x) \cdot Q(x)^2$$

Soluzione: $\deg P(x) =: p$ $\qquad \deg Q(x) =: q$

$$\deg(Q(x)^2) = 2q \qquad \deg P(Q(x)^2) = 2pq$$
$$\deg(P \cdot Q^2) = p + 2q$$
$$\Rightarrow 2pq = p + 2q$$

$$2q \cdot (p-1) = (p-1) + 1 \iff (2q-1)(p-1) = 1$$

- $p = q = 0$ (caso facile ESERCIZIO!)
- $p = 2 \quad q = 1$

Q: è vero che (P, Q) è soluzione $\Rightarrow$ $(\lambda P, \mu Q)$ è soluz? $\quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

Q1: " (P, Q) " $(\lambda P, Q)$ è sol? Sì

$\Rightarrow$ possiamo assumere WLOG che P sia monico ($a_2 = 1$)

b_1 coeff. dir. di Q

$$b_1^4 = b_1^2 \qquad b_1 = \pm 1$$

Quindi $\quad Q(x) = x - c \quad$ oppure $\quad Q(x) = c - x$

ma in entrambi i casi $\quad Q(x)^2 = (x-c)^2$

$$a_0 = P(0) = P\left(Q(c)^2\right) = P(c) \cdot Q^2(c) = 0$$

$$P(x) = x^2 + dx = x(x+d)$$

$$\cancel{(x-c)^2}\left((x-c)^2 + d\right) = x(x+d)\cancel{(x-c)^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + d = x^2 + dx$$

$$\begin{cases} -2c = d \\ c^2 + d = 0 \end{cases}$$

Problema 2: $\quad P(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \deg P = n \geq 1 \quad |P(0)| = P(1) \quad a_n = 1$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sono le radici di $P(x)$ e sono $\alpha_i \in [0,1]$

Mostrare che $\quad \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$

Oss: Dalle formule di Viète sappiamo che $\alpha_1 \cdot \ldots \alpha_n = a_0 = P(0)$
(modulo il segno)

Teorema di Ruffini: $P(x)$ polinomio

$$(x - \alpha) \mid P(x) \iff P(\alpha) = 0$$

$$P(x) = (x-\alpha)\,Q(x) \qquad Q(x) \text{ pol. } \deg(Q) = n-1$$

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \cdot c \qquad + \text{ monico} \Rightarrow c = 1$$

$$P(1) = (1-\alpha_1)\ldots(1-\alpha_n)$$

$$|P(0)| = P(1) \iff \underline{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n} = \underline{(1-\alpha_1)\ldots(1-\alpha_n)}$$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n \overset{?}{\leq} \frac{1}{2^n}$$

$\alpha \in [0,1]$

$$\alpha(1-\alpha) = \frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{4} + \alpha - \alpha^2} = \frac{1}{4} \underbrace{- \underbrace{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1(1-\alpha_1)}_{\leq 1/4} \alpha_2 (1-\alpha_2) \dots \alpha_n (1-\alpha_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n)^2 \leq \frac{1}{2^{2n}} \qquad \alpha_1 \dots \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$$

$\alpha.$

Problema: in $\mathbb{R}[x]$ fattorizzare $P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2$

Oss: un polinomio di grado n è irriducibile se non è divisibile per polinomi di grado $m \in \{1, \dots, n-1\}$ nello stesso spazio di polinomi

lo "stesso" polinomio visto su spazi di polinomi diversi (e.g. in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$) può essere irriducibile o no (nel senso irrid. in alcuni, ma in altri no)

Oss 2: 2 è radice $(P(2) = 0)$

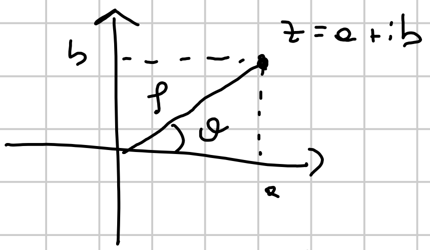
$$P(x) = (x-2)(x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$$

Apriamo una parentesi

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} \qquad i^2 = -1$$

$z = a + ib \qquad w = c + id \qquad z + w = (a+c) + i(b+d)$

$$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$



$$z = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = \rho \cdot e^{i\vartheta}$$

$$z \cdot w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \cdot r \cdot e^{i\lambda} = \rho r \cdot e^{i(\vartheta + \lambda)}$$

$$z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$$

Radici n-sime di z

Cerchiamo w t.c. $w^n = z \qquad w = r \cdot e^{i\lambda}$

$$r^n e^{in\lambda} = \rho\, e^{i\vartheta}$$

- $r^n = \rho \qquad r = \sqrt[n]{\rho}$

- $n\lambda = \vartheta + 2k\pi \qquad \lambda = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi \qquad k \in \{0, n-1\}$

Torniamo al pb: $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

Oss: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

Oss se $\alpha^n - 1 = 0$ e $\alpha \neq 1$

$\alpha^n = 1 \qquad \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + 1 = 0$

$\alpha^n = 1 \iff \alpha^{n+1} = \alpha \cdot \alpha^n = \alpha$

Vediamo ora questi osservazioni. Fissiamo $n = 5$ e α radice di $x^5 - 1$

$$\underbrace{\alpha^6}_{\alpha \cdot \alpha^5} + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1 = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \mid x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

$$P(x) = (x-2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

questo può essere fattorizzato

z ha coniugato $\bar{z} \qquad z = a + ib \qquad \bar{z} = a - ib$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \rho^2 \qquad |z| = \rho$

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $P(x)$ anche $\bar{\alpha}$ lo è $\qquad \alpha = a + ib$

Quindi $P(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) Q(x)$

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$$
$$= x^2 - \underbrace{2\mathrm{Re}(\alpha)}_{= 2a} + |\alpha|^2$$ è un pol. a coeff. reali.

Probleme: $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. esistono 5 interi distinti a,b,c,d,e t.c.

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = 2$$

- Dimostrare che non esiste $k \in \mathbb{Z}$ t.c. $P(k) = 37$
- Dimostrare che esiste un polinomio $P(x)$ con queste proprietà tale che $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ per cui: $P(n) = 14$

Sol:

$Q(x) := P(x) - 2$ quindi $Q(a) = \dots Q(e) = 0$

e ancora $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)R(x)$

Chiedere $P(k) = 37 \iff Q(k) = 35 \iff 35 = (k-a)\dots(k-e)\underset{\mathbb{Z}}{R(k)}$

$\pm 1 \quad \pm 5 \quad \pm 7 \quad \cancel{\pm 35}$

$P(n) = 14 \iff Q(n) = 12$ $\qquad \pm 1 \ \pm 2 \ \pm 3 \ \pm 4 \ \pm 6 \ \pm 12$

$$|12| = \underset{1}{|n-a|}\ \underset{-1}{|n-b|}\ \underset{2}{|n-c|}\ \underset{-2}{|n-d|}\ \underset{\pm 3}{|n-e|}\ \underset{1}{|H(n)|}$$

$P(\pm 1, \pm 2, -3) = 2$

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x+3) + 2 \qquad P(0) = 14 \ \checkmark$$

Problemi

1. Quali sono le radici terze di $1 + i$?
2. Scomporre in $\mathbb{R}[x]$
   - $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$
   - $x^6 - c^2$
   - $x^6 + 3x^3 - 2$
3. Mostrare che vale l'identità $1 = \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$
4. Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con $P(2) = \alpha$, $P(\alpha) = \alpha + 2$ $\quad \alpha \in \mathbb{Z}$. Trovare i possibili valori di α
5. Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $P(16) = 36$, $P(14) = 16$, $P(5) = 25$. Quali sono i possibili valori di $P(10)$?
6. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_{100}$ le radici 100-sime dell'unità (in $\mathbb{C}$). Quanto vale $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5$?

1. $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$ vogliamo $\underset{\rho \cdot e^{i\vartheta}}{\overset{\shortparallel}{z}}$ t.c. $\underset{\rho^3 e^{i3\vartheta}}{\overset{\shortparallel}{z^3}} = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

quindi $\rho = \sqrt[6]{2}$

$\vartheta_{1,2,3} = \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}$

P3: $P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \_\_\_$

$Q(x) = P(x) - 1$

OSS 1: $Q(x)$ ha grado 2

OSS 2: $P(a) = P(b) = P(c) = 1$ quindi $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$

$\Rightarrow Q(x) \equiv 0$ perché se non lo fosse avrebbe 3 radici distinte pur essendo di grado 2

P4: $(a-b) \mid P(a) - P(b)$

$(a-2) \mid P(a) - P(2) = a+2-a = 2$

$a-2 \in \{\pm 1, \pm 2\}$ $a = 0, 1, 3, 4$

$p(p(2)) = p(2) + 2$

$p(2) = a$

$p(x) - a = (x-2)\, q(x)$

$p(a) - a = (a-2)\, q(a)$

$\overset{\shortparallel}{\cancel{a}+2-\cancel{a}}$

$p(x) = (x-2)\frac{2}{a-2} + a$

P5: $P(16) = 36 = 6^2$

$P(14) = 16 = 4^2$

$P(5) = 25 = 5^2$

$16 - 10 = 6 \mid (36 - P(10))$

$14-10 = 4 \mid 16 - P(10)$

$5 - 10 = -5 \mid 25 - P(10)$

quindi $6 \mid P(10)$, $4 \mid P(10)$, $5 \mid P(10)$

quindi $60 \mid P(10)$

$$P(x) - (x-10)^2 = Q(x)$$

$\Rightarrow$ 16, 5, 14 radici Q $\Rightarrow$ $Q(x) = \overset{R(x)}{\vphantom{x}}(x-16)(x-5)(x-14)$

$$P(x) = (x-16)(x-5)(x-14)R(x) + (x-10)^2$$

$$P(10) = 120 \cdot R(10)$$

P6 $\underline{\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5}$ α_i radici 100-sime unità

$\alpha_i \alpha_j = \alpha_k$ $k \underset{100}{\equiv} i+j$

oss se α_i è radice 100-sima α_i^5 è radice 20-sima

$\{\alpha_1^5, \dots, \alpha_{100}^5\}$ ciascuna radice 20-sima compare 5 volte

$\longrightarrow$ $(x - \alpha_1^5) \dots (x - \alpha_{100}^5) = (x^{20} - 1)^5$

$\underline{z^{100} = 1}$ $z, z^2, z^3, \dots, z^{100}$

nella sommatoria ho $z^5, z^{10} \dots z^{500}$

$$\sum_{i \le j} = \sum_{i<j} (\alpha_i \alpha_j)^5 + \sum_{1 \le i \le 100} (\alpha_i^2)^5$$

corrisponde al coefficiente 98° (per Viete)
(modulo un fattore 2)
$\Rightarrow$ $= 0$

$$\sum_{1 \le i \le 100} \alpha_i^{10} = 10 \sum_{i=1}^{10} \tilde{\alpha}_i$$ $\hat{\alpha}_i$ = radici 10-me unità