ALGEBRA 2 - BASIC

Titolo nota 9/5/2023

Notazione: a, b, c numeri (in genere in $\mathbb{R}$)

$f(x,y,z)$ funzione a 3 argomenti

* $\sum_{cyc} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$

Esempio: $\sum_c a \cdot b^3 \cdot c^{-2} = \frac{ab^3}{c^2} + \frac{bc^3}{a^2} + \frac{c \cdot a^3}{b^2}$

$\sum_c a = a+b+c$

* $\sum_{sym} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(a,c,b) + f(b,a,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b) + f(c,b,a)$

Esempio: $\sum_s a^2 b = a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b$

$\sum_s a = a + a + b + b + c + c = 2 \sum_c a$

N.B. Possiamo farlo per più di 3 numeri

$\sum_c f(a_1 \ldots a_n) = f(a_1 \ldots a_n) + f(a_2 \ldots a_n, a_1) + \ldots$

$\sum_s f(a_1 \ldots a_n) = \sum_{\substack{\sigma \text{ perm.} \\ \text{di } \{1 \ldots n\}}} f(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$

Problema 1: Sia $n \geq 3$ un intero dispari, $x_1 \ldots x_n$ reali non neg. ($\mathbb{R}_0^+$)

Dimostrare che $\min_{i=1 \ldots n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{i=1 \ldots n} 2 x_i x_{i+1}$

$\longrightarrow$ con $x_{n+1} := x_1$

Oss: • Di solito $x^2 + y^2 \geq 2xy$

• Ci basta trovare $i, j \in \{1 \ldots n\}$ t.c. $x_i^2 + x_{i+1}^2 \leq 2 x_j x_{j+1}$

Siccome sono in numero dispari, ce ne sono certamente tre ordinati: $\circ\ \exists i:\ x_i \le x_{i+1} \le x_{i+2}$ $\quad \circ\ \exists j\ x_j \geq x_{j+1} \geq x_{j+2}$

(con $x_{n+2} = x_2$)

- crescenti

$$2x_{i+1}x_{i+2} = x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+2}$$
$$\geq x_{i+1}^2 + x_i^2$$

- decrescenti ESERCIZIO

Problema 2: Dimostrare che il polinomio

$$P(x) = x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

non può avere 6 radici reali positive.

Chiamiamo $\alpha_1 - \alpha_6$ le radici. Dalle formule di Viete abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 6 \qquad \prod_{i=1}^{6} \alpha_i = 1$$

$$AM(\alpha) = \frac{\sum \alpha_i}{6} = 1 \geq GM(\alpha) = \sqrt[6]{\prod \alpha_i} = 1$$

$\Rightarrow$ tutte le radici sono uguali a 1

$$P(1) = 1 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = -2 \neq 0$$

Sia $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ $\quad a_1, \dots a_k \in \mathbb{R}^+$

$$M_p(a_1 - a_k) := \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i^p}{k} \right)^{1/p}$$

$$M_0(a_1 - a_k) := \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i}$$

$p = -1$ HM
$p = 0$ GM
$p = 1$ AM
$p = 2$ QM

Teorema: $a_1 - a_k \in \mathbb{R}^+$, $p < q$ $\quad p, q \in \mathbb{R}$

$$\min_{i=1-k}(a_i) =: M_{-\infty} \leq M_p \leq M_q \leq M_{+\infty} := \max_{i=1-k}(a_i)$$

E l'uguaglianza si ha sse tutti i termini sono $=$.

Problema 3: Siano a, b, c, d reali positivi t.c. $a+b+c+d=1$

Dimostrare che
$$\sum_c \frac{a^3}{a+b} \geq \frac{1}{8}$$

$$\sum_c \frac{a^3}{a+b} = \sum_c \left(\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \qquad \frac{2(a+b+c+d)}{2} = 1$$

$$2(a+b+c+d) = a+b+b+c+c+d+d+a$$
$$= (\sqrt{a+b})^2 + (\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+d})^2 + (\sqrt{d+a})^2$$

$$\to \sum_c \left(\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_c \left(\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \sum_c (\sqrt{a+b})^2 \geq \text{(continua dopo)}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (CS)

Se abbiamo due n-ple $x_1 - x_n$, $y_1 - y_n$ reali allora
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$
in cui vale l'uguaglianza se e solo se $\exists\, \lambda, \mu$ reali non entrambi nulli tali che $\lambda x_i + \mu y_i = 0 \quad \forall i = 1 - n$

(cioè $\frac{x_i}{y_i} = -\frac{\mu}{\lambda}$ o $\frac{y_i}{x_i} = -\frac{\lambda}{\mu}$ ossia se il rapporto è costante)

Dim $(x_1 t - y_1)^2 + (x_2 t - y_2)^2 + \dots + (x_n t - y_n)^2 \geq 0$

quindi $\Delta \leq 0$
$$\left(\sum x_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum x_i y_i\right) t + \sum y_i^2 \geq 0$$

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 - \underbrace{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)}_{} \leq 0$$

D

(continua da prima) $\overset{C.S.}{\geq} \frac{1}{2}\left(\sum_c \frac{a^{3/2}}{\cancel{\sqrt{a+b}}} \cdot \cancel{\sqrt{a+b}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \left(\frac{1}{4} \sum a^{3/2}\right)^2$

$$= 8\left(\underbrace{\left(\frac{1}{4}\sum_c a^{3/2}\right)^{2/3}}_{M_{3/2}}\right)^3 = 8\left(M_{3/2}(a)\right)^3 \geq$$

$$\geq 8\left(M_1(a)\right)^3 = 8/4^3 = \frac{1}{8}$$

$$x^2 = \left((x^2)^{1/3}\right)^3 = \left(x^{2/3}\right)^3$$

<u>Problema 4</u>: Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Allora

$$\sum_c \frac{b^2+c^2}{a} \geq 2(a+b+c)$$

Idea: $$\sum_{cyc} \frac{b^2+c^2}{a} = \sum_{sym} \frac{b^2}{a} = \sum_{sym} \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2$$

Consideriamo C.S. $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ $y_i = \sqrt{b_i}$ $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}^+$

$$\left(\sum a_i\right)^2 \leq \left(\sum \frac{a_i^2}{b}\right)\left(\sum b_i\right)$$

Dis. di Titu

$$\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum b_i}$$

$$\sum_{sym} \frac{b^2}{a} \geq \frac{\left(\sum_s b\right)^2}{\sum_s a} = \frac{\left(\sum_s a\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sum_s a}} = 2\sum_c a = 2(a+b+c)$$

<u>Problema 5</u> $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ t.c. $a+b+c+d = 4$

Allora $a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$

$a(abc)$ $b(bcd)$

Disuguaglianze di riarrangiamento

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \qquad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \quad \text{reali}$$

allora

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i}$$

con σ permutazione di $\{1 - n\}$

Sia $e \geq f \geq g \geq h$ $\quad \{e,f,g,h\} = \{a,b,c,d\}$

$$efg \geq efh \geq egh \geq fgh$$

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = a(abc) + b(bcd) + c(cda) + d(dab)$$

$$\leq e(efg) + f(efh) + g(egh) + h(fgh)$$

$$= ((ef+gh)(eg+fh))$$

$$= \left[\sqrt{(ef+gh)(eg+fh)}\right]^2 \overset{\text{AM-GM}}{\leq} \left[\frac{ef+gh+eg+fh}{2}\right]^2$$

$$= \left(\frac{(e+h)(f+g)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{(e+h)(f+g)}\right)^2\right]^2 \leq$$

$$\overset{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{4}\left[\left(\frac{e+f+g+h}{2}\right)^2\right]^2 = \frac{2^4}{4} = 4$$

Altre disuguaglianze (alle volte) utili: Chebychev

$$x_1 \geq \dots \geq x_n \qquad y_1 \geq \dots \geq y_n \quad \text{allora}$$

$$\frac{\sum x_i y_i}{n} \geq \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\left(\frac{\sum y_i}{n}\right)$$

Dim: $\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_{i+j}$ modulo n

$$\leq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\sum x_i y_i \geq \sum x_i y_{i+j}$

$\square$

Dimostr. dis. tra medie (alcune)

$\boxed{HM \leq AM}$ $\quad \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n} \overset{?}{\geq} \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$ $\quad$ moltiplico per $n \cdot \sum \frac{1}{x_i}$

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum \frac{1}{x_i}\right) \overset{?}{\geq} n^2$$

e ora possiamo usare C.S. con $\sqrt{x_i}, \frac{1}{\sqrt{x_i}}$

$\boxed{AM \leq QM}$ $\quad \dfrac{\sum x_i}{n} \overset{?}{\leq} \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n}}$

$$\left(\sum x_i\right)^2 \overset{?}{\leq} n\left(\sum x_i^2\right) \qquad \text{C.S.} \qquad (1), (x_i)$$

$\boxed{GM \leq AM}$ $\quad$ Supponiamo $x_1 \geq \ldots \geq x_n > 0$ $\quad \frac{1}{x_1} \leq \ldots \leq \frac{1}{x_n}$

Se consideriamo $\longrightarrow \sum \dfrac{x_{i+1}}{x_i}$ è una permutazione

mentre il minimo è per $\sum x_i \cdot \frac{1}{x_i} = n$

$$\sum \frac{x_{i+1}}{x_i} \geq \sum x_i \frac{1}{x_i} = n$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} =: g \qquad y_i := \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_i}{g^i}$$

Ma in questo modo $\dfrac{y_{i+1}}{y_i} = \dfrac{x_{i+1}}{g}$

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i+1}}{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{g} = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} = \frac{\sum x_i}{g}$$

$$\frac{\sum x_i}{g} \geq n \qquad \underset{\text{AM}}{\frac{\sum x_i}{n}} \geq \underset{\text{GM}}{g}$$

$\square$

$a,b,c>0$

Problema 6! Qual è il minimo a^4+b^2+c se $a\cdot b\cdot c=1$

IDEA medie pesate

$$a^4+b^2+c = \underbrace{a^4+\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{4}}_{*}$$

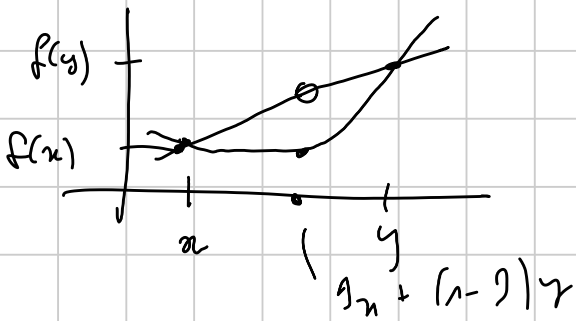
7 addendi

$$\frac{a^4+b^2+c}{7} = \frac{*}{7} \geq \sqrt[7]{a^4\left(\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{c}{4}\right)^4} = \frac{\sqrt[7]{(abc)^4}}{\sqrt[7]{2^2\cdot 4^4}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^{10}}}$$

ESERCIZIO: verificare se è un minimo (e non un inf)

$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice convessa se $\forall x,y\in[a,b]$, $\forall\lambda\in[0,1]$

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$



f è concava se $-f$ è convessa

Esempi di funzioni convesse

- x
- e^x
- x^{2k}
- $-\log x$
- $\frac{1}{x}$ $x>0$
- x^{2k+1} $x>0$

Se f è convessa
$f+a$ $a\in\mathbb{R}$ è convessa

la somma pesata (pesi ≥ 0) di f. convesse è convessa

$g(f(x))$ se g è convessa e non decresc.

se f è conv. non crescente e g è concava allora $f(g(x))$ è convessa

...

Dis. di Jensen $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ $\quad a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R}_0^+$ $\quad \sum a_i = 1$

se f è convessa $\quad f\left(\sum a_i x_i\right) \leq \sum a_i f(x_i)$

se f è concava $\quad f\left(\sum a_i x_i\right) \geq \sum a_i f(x_i)$

Corollario $\quad a_i = \frac{1}{n}$ $\quad f$ convessa $\quad f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum f(x_i)}{n}$

Esercizi:

pag 16 $\quad$ 84 → 89

pag 27 $\quad$ 1, 4, 5, 9, $\boxed{10}$

Correzione problema 10

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

(Nesbitt)

Metodo 1: sostituzione

$a+b = x \quad b+c = y \quad c+a = z \qquad a = \frac{z+x-y}{2}$

$$\sum \frac{a}{b+c} = \sum_c \frac{z+x-y}{2y} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}$$

$$\sum_c \frac{z+x-y}{y} = \sum_c \left(\frac{z}{y} + \frac{x}{y} - 1\right) \overset{?}{\geq} 3$$

$$\sum_s \frac{z}{y} = \sum_c \left(\frac{z}{y} + \frac{x}{y}\right) \overset{?}{\geq} 6$$

$$\boxed{\frac{z}{y}} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \boxed{\frac{y}{z}} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} \geq 6 \qquad \checkmark$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq \sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{y}{z}} = 1$$

AM-GM

Metodo 2 C.S.

$$\sum_c \frac{a}{b+c} \overset{\text{tito}}{\geq} \frac{(\sum \sqrt{a})^2}{\sum(b+c)} = \frac{\sum a + 2\sum\sqrt{ab}}{2\sum a} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{2}\sum\sqrt{ab} \geq \cancel{2}\sum a \quad \text{FALSA}$$

$$\sum_c \frac{a}{b+c} = \sum_c \frac{a^2}{a(b+c)} \overset{\text{tito}}{\geq} \frac{(\sum a)^2}{\sum(ab+ac)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{2\sum ab} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum a^2 \overset{?}{\geq} \sum ab \quad \text{VERA}$$

Metodo 3

$$S = \sum_c a$$

$$\sum_c \frac{a}{b+c} = \sum_c \frac{a}{S-a} \quad . \text{con Jensen}$$

$$f(x) = \frac{x}{S-x} \qquad f''(x) = \frac{2x}{(S-x)^3} + \frac{2}{(S-x)^2}$$

$$\sum \alpha\, f(a)$$

$$\sum \frac{1}{3}\frac{a}{S-a} \geq f\left(\sum_c \frac{1}{3} a\right) = f\left(\frac{S}{3}\right) = \frac{S/3}{S - S/3} = \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{a}{S-a} = 3\sum \frac{1}{3}\frac{a}{S-a} \geq \frac{3}{2}$$

2^a parte del 10 migliori costanti per $c_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq c_2$

prova 1 $a = b = c$ dà $c_1 \leq 3/2$ $c_2 \geq 3/2$

prova 2 $A^2, A, 1$

$$\underset{\substack{\simeq \\ 1}}{\frac{A^2}{A^2+A}} + \underset{\substack{\simeq \\ 1}}{\frac{A}{A+1}} + \underset{\substack{\simeq \\ 0}}{\frac{1}{1+A^2}} \simeq 2$$

prova 3 $\quad 1, A, A^2$ $\qquad \underbrace{\frac{1}{1+A}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{A}{A+A^2}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{A^2}{A^2+1}}_{\approx 1} \approx 1$

$$\sum \frac{a}{a+b} = \sum \frac{a^2}{a^2+ab} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum(a^2+ab)} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\sum a^2 + \sum ab} \geq 1$$

Quindi $c_1 = 1$

Consideriamo $c_1 \leq \sum \frac{b}{a+b} \leq c_2$

$$\sum \frac{a}{a+b} + \sum \frac{b}{a+b} = 3$$

siccome il più piccolo è ≥ 1 e la somma è 3, il più grande non può essere maggiore di 2

Quindi $c_2 = 2$ (e sappiamo come raggiungerlo) $\blacksquare$