A3B - SUCCESSIONI & FUNZIONALI

Sem

Titolo nota 07/09/2023

0 - PROGRESSIONI ARITMETICHE & GEOMETRICHE

(i) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + k & \text{se } n \geq 1 \\ a_0 = a \end{cases}$

Progr. aritmetica

$$\Longrightarrow a_n = a + k \cdot n$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} a + k \cdot n = a \cdot (N+1) + k \sum_{n=0}^{N} n = a(N+1) + k \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

(ii) $\begin{cases} a_n = k \cdot a_{n-1} & \text{se } n \geq 1 \\ a_0 = a \end{cases}$

Progr. geometrica

$$\Longrightarrow a_n = a \cdot k^n$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = a \sum_{n=0}^{N} k^n = a \cdot \frac{k^{N+1} - 1}{k - 1}$$

Perché? $S = \sum_{j=0}^{m} r^j$

$$r \cdot S = \sum_{j=0}^{m} r^{j+1} = \sum_{j=1}^{m+1} r^j$$

$$\boxed{rS - S = r^{m+1} - 1}$$

$$\begin{array}{rl} rS: & r + r^2 + \dots + r^{m+1} \\ -S: & 1 + r + r^2 + \dots + r^m \\ \hline & r^{m+1} - 1 \end{array}$$

$$S = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1}$$ (se $r \neq 1$, altrimenti $S = m+1$)

$\boxed{0.5}$ - SOMME DI POTENZE

$$\sum_{j=0}^{m} j^2 =$$

→ lo so a memoria

→ con i coeff. binomiali.

→ $(j+1)^3 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1$

$$(m+1)^3 = \sum_{j=0}^{m} (j+1)^3 - j^3 = 3\sum_{j=0}^{m} j^2 + 3\sum_{j=0}^{m} j + \sum_{j=0}^{m} 1 =$$

Telescopica

$$= 3 \cdot S + 3\,\frac{m(m+1)}{2} + m+1$$

$$S = \frac{1}{3}\left((m+1)^3 - \frac{3}{2}m(m+1) - (m+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(m+1)\left(m^2 + 2m \cancel{+1} - \frac{3}{2}m \cancel{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + m) = \frac{1}{6}(m+1)m(2m+1).$$

$\boxed{\text{Parentesi su A1}}$

Somma delle potenze delle radici di un polinomio

Se ho $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ e se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le sue radici, allora

$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \alpha_1 \cdots \alpha_n \qquad -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\longrightarrow \quad (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n} = \sum_{i_1 < \dots < i_j} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_j}$$

somma dei prodotti a j a j delle radici

ES: $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ $\quad \alpha, \beta, \gamma$ radici

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) =$$

$$= \left(-\frac{(-3)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} - 5 = -\frac{11}{4}.$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{5/2}{-(-7/2)} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha}{\alpha\beta\gamma} =$$

$$= \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma) - 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{5}{2}\left(-\frac{-3}{2}\right) - 3\left(\frac{7}{2}\right)}{\frac{7}{2}}$$

Teo: ogni polinomio simmetrico in $x_1, \dots, x_n$ si può scrivere in funzione delle funz. simmetriche elementari

$$e_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j}' x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_j}$$

es: $e_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ $\qquad e_3(x_1, \dots, x_n) =$ somme dei prodotti a 3 a 3.

$e_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$

Le formule per farlo si dicono (forse) formule di Newton.

1 - SUCCESSIONI per RICORRENZA

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + n + 1 & \text{se } n \geq 1 \\ a_0 = 7 \end{cases}$$

Cosa vuol dire?

$a_0 = 7$

$a_1 = 3 \cdot 7 + 1 + 1$

$a_2 = 3(3 \cdot 7 + 2) + 3 = 9 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 3$

$$a_3 = 27\cdot 7 + 9\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4$$
$$a_4 = 81\cdot 7 + 27\cdot 2 + 9\cdot 3 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3^0$$

$$a_k = 3^k\cdot 7 + \sum_{j=1}^{k} 3^{k-j}\cdot (j+1)$$

si dimostra per induzione su k:

$k=0$ passo base $\quad a_0 = 3^0\cdot 7 + \sum_{j=1}^{0} 3^{0-j}(j+1) = 7$ ok.

$k \to k+1$ passo induttivo

Se $a_k = 3^k\cdot 7 + \sum_{j=1}^{k} 3^{k-j}\cdot(j+1)$

allora $a_{k+1} = 3\cdot a_k + (k+2) =$

$$= 3\left(3^k\cdot 7 + \sum_{j=1}^{k} 3^{k-j}(j+1)\right) + (k+2) =$$

$$= 3^{k+1}\cdot 7 + \sum_{j=1}^{k} 3^{(k+1)-j}\cdot(j+1) + \underbrace{3^0\cdot(k+2)}_{=\,3^{(k+1)-(k+1)}\cdot((k+1)+1)} =$$

$$= 3^{k+1}\cdot 7 + \sum_{j=1}^{k+1} 3^{(k+1)-j}\cdot(j+1).$$

$\square$

Riusciamo a scrivere a_k in forma chiusa?

$$a_k = 3^k\cdot 7 + \sum_{j=1}^{k} 3^{k-j}\cdot(j+1)$$

$$S = \sum_{j=1}^{k} 3^{k-j}\cdot(j+1)$$

$$3S = 3^k\cdot 2 + 3^{k-1}\cdot 3 + 3^{k-2}\cdot 4 + 3^{k-3}\cdot 5 + \dots + 3\cdot(k+1)$$

$$S = 3^{k-1}\cdot 2 + 3^{k-2}\cdot 3 + 3^{k-3}\cdot 4 + \dots + 3^0\cdot(k+1)$$

$$3S - S = 3^k\cdot 2 + \underbrace{3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots + 3}_{} - 3^0\cdot(k+1) =$$

$$= 2\cdot 3^k + \overbrace{\frac{3^k-1}{2} - 1} - (k+1) = \frac{5}{2}\cdot 3^k - \frac{5}{2} - k$$

$$S = \frac{5}{4}\cdot 3^k - \frac{5}{4} - \frac{k}{2}$$

$$a_k = 3^k\cdot 7 + 3^k\cdot\frac{5}{4} - \frac{5}{4} - \frac{k}{2}$$

$$\boxed{a_k = \boxed{\frac{11}{4}\cdot 3^{k+1}} \boxed{-\frac{5}{4} - \frac{k}{2}}}$$

parte λ^k parte particolare

Fatto: Una successione per ricorrenza del tipo

$$a_n = \lambda\cdot a_{n-1} + f(n)$$

ha una soluzione del tipo

$$a_n = c\cdot\lambda^n + g(n) \qquad \forall c\in\mathbb{R}$$

Oss: Se metto $c=0$ ottengo una soluzione $a_n = g(n)$.

Es: $a_n = 3a_{n-1} + (n+1)$ $\quad a_n = -\frac{5}{4} - \frac{n}{2}$ è una soluzione che ha $a_0 = -\frac{5}{4}$

Come trovo $g(n)$?

$$a_n = \lambda\cdot a_{n-1} + \underline{2}$$

↳ cerco $g(n)$ costante $g(n)=c$ e sostituisco

$$g(n) = \lambda\cdot g(n-1) + 2$$

$$c = \lambda \cdot c + 2 \Rightarrow c = \frac{2}{1-\lambda}$$

$$a_n = 7 a_{n-1} + \underline{n^2 - 3}$$
$$\hookrightarrow g(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$$

sostituisco $g(n) = 7 g(n-1) + n^2 - 3$

$$\alpha n^2 + \beta n + \gamma = 7\left(\alpha (n-1)^2 + \beta (n-1) + \gamma\right) + n^2 - 3$$

$$\alpha n^2 + \beta n + \gamma = 7\alpha n^2 - 14\alpha n + 7\alpha + 7\beta n - 7\beta + 7\gamma + n^2 - 3$$

$$n^2 \underbrace{(\alpha - 7\alpha + 1)}_{=0} + n\underbrace{(\beta + 14\alpha - 7\beta)}_{=0} + \underbrace{\gamma - 7\alpha + 7\beta - 7\gamma + 3}_{=0} = 0$$

__Oss__: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n^2 \\ a_0 = 0 \end{cases} \rightarrow g(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$

$$a_n = c \cdot 1^n + g(n)$$

$$g(n) = g(n-1) + n^2$$

$$\alpha n^2 + \beta n + \cancel{\gamma} = \alpha (n-1)^2 + \beta (n-1) + \cancel{\gamma} + n^2$$

Fibonacci & co

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2 a_{n-2} \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

provo a cercare sol del tipo λ^n

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2}$$

$\underline{\lambda = 0 \text{ è poco interessante}}$

$$\lambda^2 = \lambda + 2 \Rightarrow \lambda = 2 \ \circ \ \lambda = -1$$

$\Rightarrow$ quindi $a_n = A(-1)^n$, $a_n = B \cdot 2^n$ sono soluzioni

ma anche $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$ è soluzione e tutte le sol sono fatte così.

$$1 = Q_1 = A\cdot(-1) + B\cdot 2 \qquad \begin{cases} A+B=1 \\ 2B-A=1 \end{cases} \qquad 3B=2 \Rightarrow B=\frac{2}{3}$$
$$1 = Q_0 = A\cdot 1 + B\cdot 1 \qquad \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow Q_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n$$

Idem con Fibonacci

$$\begin{cases} Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} \\ Q_1 = 1 \\ Q_0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \lambda^2 = \lambda + 1$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow Q_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$1 = Q_0 = A + B$$
$$1 = Q_1 = \frac{A + A\sqrt{5}}{2} + \frac{B - B\sqrt{5}}{2} = \frac{A+B+(A-B)\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad 2A = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$
$$B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Oss:
$$\begin{cases} Q_n = 7Q_{n-1} - 3Q_{n-2} + n \\ Q_1 = 2 \\ Q_0 = 0 \end{cases} \qquad Q_n = A\cdot\lambda_1^n + B\cdot\lambda_2^n + g(n)$$

con $g(n)$ sol particolare

2 - EQUAZIONI FUNZIONALI

Trovare tutte le funzioni che soddisfano una certa identità, da un insieme ad un altro.

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$(0,0) \longrightarrow f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$(0,y) \longrightarrow f(0) \cdot f(y) = 0$
$(x,0) \longrightarrow f(x) \cdot f(0) = 0$
] inutili (vere se $f(0)=0$)

$(x,x) \longrightarrow f(x)^2 = x^2 \Rightarrow f(x) = c_x \cdot x \qquad c_x = \pm 1$ indipendentemente per ogni val di x

Sostituisco nel testo

$$c_x \cdot x \cdot c_y \cdot y = xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$c_x \cdot c_y = 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$c_x = \frac{1}{c_y} \quad \text{ma } \frac{1}{1} = 1 \quad e \ \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Rightarrow c_x = c_y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ ho 2 soluzioni: $f(x) = x$ e $f(x) = -x$.

ed entrambe verificano la richiesta. $\square$

Teo: Se $f(g(x))$ è iniettiva, allora $g(x)$ è iniettiva

Se $f(g(x))$ è surgettiva, allora $f(x)$ è surgettiva

Es: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $f(f(n)) = n+1$.

(1) f è iniettiva!

(2) $f(f(0)) = 1$ $\quad \boxed{f(0) = k}$ $\quad k \neq 0$ $\left[\text{Se } k=0,\ f(f(0)) = f(0) = 0\right]$ $\quad f(1) = f(f(k)) = k+1$

$$0 \xrightarrow{f} k \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} k+1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} k+2$$

$$\dots k-1 \xrightarrow{f} 2k-1 \xrightarrow{f} k$$

f iniettiva

$$f(0) = k = f(2k-1) \Rightarrow \boxed{2k-1 = 0} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad \underline{\text{IMPOSS}}$$

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni.!!

Eq. di CAUCHY

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad \text{t.c. } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(1) $(0,0) \to f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

(2) Sia $k = f(1)$, allora $f(x+1) = f(x) + k \quad \forall x$

$\Rightarrow$ per induzione $f(n) = kn \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Inoltre, $(x, -x) \to f(0) = f(x) + f(-x)$

$$\Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

$\Rightarrow f$ dispari

$\Rightarrow f(n) = kn. \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

④ "Per induzione": $f(nx) = f((n-1)x + x) =$

$$= f((n-1)x) + f(x) = f((n-2)x) + f(x) + f(x) = \dots$$

$$\dots = n \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

⑤ Allora, dato $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(q \cdot x) = q \cdot f(x)$$

$$f(q \cdot x) = f(p) = k \cdot p$$

$$\Rightarrow f(x) = k \cdot \frac{p}{q} = kx \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

⑥ Sostituendo si vede che va bene $\forall k \in \mathbb{R}$.

Idee sparse

1] Sostituzioni di valori "standard"
2] Cercare iniettività / surgettività
3] Scambiare x, y se alcuni pezzi sono simmetrici e altri no
4] Cercare di rendere uguali o far annullare argomenti della f
5] Ricondursi alla Cauchy

ACHTUNG! La Cauchy funziona su $\mathbb{R}$ solo con altre ipotesi come monotonia, continuità, limitata su un limitato, ...

Esercizi

Parte II Libretto : $\boxed{A3}$ 4, 6, 10

Parte I Libretto : 96, 94

IMO 2019 - A1

Riconduzione all'eq di Cauchy:

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x+y) = f(x) + f(y) + a$

$f(x+y+a) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

Eq. funz. : 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona t.c.

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

2) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t.c. $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$

3) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y))$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4y f(x)$

---

96 $\to$ affari vostri!

94 $\to$ $a_{n+1} = 7a_n + 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = \dfrac{7^n - 1}{6}$

$$7^n - 1 \equiv 0 \mod 180 \qquad 7^n \equiv 1 \quad (180)$$

$$\varphi(180) = \varphi(2^2 \cdot 3^2 5) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

$n \mid 48$ e poi si fanno i conti.

$\boxed{A3-4}$ $f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona

se $x \geq y$ allora $f(x) \geq f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

se $x \geq y$ allora $f(x) \leq f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$(0,0) \to ff(0) = f(0)$

$(x,0) \to f(x + f(0)) = f(x)$

$\to$ o f è costante — impossibile perché comunque è bigettiva

o $f(0) = 0$

$(0,y) \to \boxed{f f(y) = \cancel{f(0)} + y} \Rightarrow f$ bigettiva ✓

$y = f(t)$ $\quad f(x+\underset{\overset{\shortparallel}{ff(t)}}{t}) = f(x) + f(t) \Rightarrow f(x) = kx$

Sostituisco $\quad \cancel{k}(x + ky) = \cancel{kx} + y$

$$k^2 y = y \Rightarrow k = \pm 1$$

6 - $\quad x_0 = 1 \quad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 2y_n \\ y_n = y_{n-1} + x_n \end{cases}$$

$$x_{n+1} = 6x_n - 2(y_{n-1} + x_n) =$$

$x_n = 6x_{n-1} - 2y_{n-1}$

$-2y_{n-1} = x_n - 6x_{n-1}$

$$= 6x_n - 2x_n - 2y_{n-1} =$$
$$= 6x_n - 2x_n + x_n - 6x_{n-1}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases} \qquad x_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 3B = 4 \end{cases}$$

$\boxed{10}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$

$(0,y) \to f f(y) = f(0)^2 + y \Rightarrow f$ bigettiva

$\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) = 0$ $\qquad \Rightarrow f(0) = 0$

$(a,y) \to f(f(y)) = y$

$(x,0) \to \boxed{f(xf(x)) = f(x)^2}$

$(x, f(y)) \to f(xf(x) + f(f(y))) = f(x)^2 + f(y)$

$$f(\underbrace{xf(x)}_{z} + y) = f(xf(x)) + f(y)$$

$$f(z+y) = f(z) + f(y)$$

Devo verificare che $xf(x)$ assume tutti i valori reali.
Boh.

$(f(x), y) \to f(f(x)\cdot x + f(y)) = (f f(x))^2 + y$

$(x,y) \to f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$

$\Rightarrow f(f(x))^2 = f(x)^2$ $\quad$ f è surgettiva!

$\Rightarrow \forall w \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = w$

$\Rightarrow f(w)^2 = w^2 \Rightarrow f(w) = \pm w$

ORA DEVO ESCLUDERE IL MISCHIONE

Se $f(a) = a$ e $f(b) = -b$ $\quad a, b \neq 0$

$(a,b) \to f(a\cdot a - b) = a^2 + b$

$f(a^2 - b) = a^2 + b$

$a^2 - b = a^2 + b \Rightarrow b = 0$

$a^2 - b = -b - a^2 \Rightarrow a = 0$

IMPOSSIBILE

$f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$

o

$f(x) = -x\ \forall x \in \mathbb{R}$