COMBINATORIA 1 - BASIC

Titolo nota 05/09/2023

PROBABILITÀ

Abbiamo un insieme finito Ω chiamato "spazio degli eventi"

Gli elementi $\omega \in \Omega$ sono gli eventi elementari

$$p : \Omega \to [0,1]$$

ci dice quant'è "probabile" un certo evento. $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

Quando gli eventi sono equiprobabili, $p(\omega) = 1/|\Omega|$

Dato $A \subseteq \Omega$, chiamato evento, abbiamo $p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$

"Somma"

Se $A = B \sqcup C$, dove $A, B, C \subseteq \Omega$, allora $p(A) = p(B) + p(C)$

"Prodotto"

Sotto certe condizioni, $p(A\cap B) = p(A)p(B)$.

Serve che A e B siano indipendenti, Cosa vuol dire?

Def. $p(A|B) = p(A\cap B)/p(B)$

Se i casi sono equiprobabili $\overset{!}{=} \dfrac{|A\cap B|/\cancel{\Omega}}{|B|/\cancel{\Omega}} = \dfrac{|A\cap B|}{|B|}$

Se A e B sono indipendenti, $p(A|B) = p(A)$

Dove sta l'analogia con i conteggi?

Supponete di dover contare le coppie ordinate prese da $\{1, \dots, n\}$

Queste sapete che sono $n\cdot(n-1)$

Approccio probabilistico: prendete 2 palline, una dopo l'altra, da una scatola di n palline. La probabilità che esca una certa coppia è $1/|\text{numero di coppie}|$

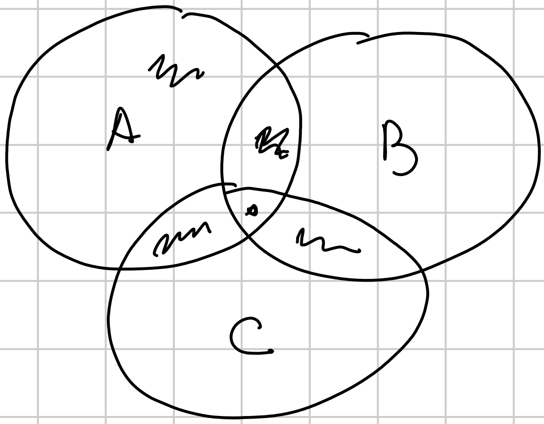
A questo punto, $p(1,2) = \underset{\uparrow 1/n}{p(1)}\, \underset{\uparrow 1/n-1}{p(2|1)}$

Esclusione - Inclusione.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

E se sono 3?

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(B \cap C) - p(C \cap A) + p(A \cap B \cap C)$$



Oss.

Quanti sono i numeri di 5 cifre che terminano per 7?

A colpo d'occhio è chiaro che sono 1/10.

Potete dire che gli eventi elem. sono "l'ultima cifra è K" ($K \in \{0, \dots 9\}$)

"Ricorsione"

Alberto tira n monete. Qual è la probabilità che non ottenga mai due "croce" consecutive?

Oss. equivale a contare le stringhe di A e B senza B consecutive.

Idea: ricondurci a un caso più piccolo.

Alberto tira la moneta: o viene testa (al primo lancio) (evento A) o viene croce (al primo lancio) (evento B)

Chiamo X_n l'evento "no due croci consecutive" in n lanci

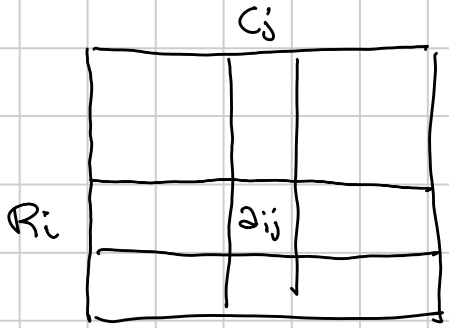
$$p(X_n) = p(X_n \cap A) + p(X_n \cap B)$$
$$\overset{!}{=} p(A)p(X_n|A) + p(B)p(X_n|B)$$
$$\frac{1}{2}p(X_{n-1}) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{secondo lancio venga testa}} \cdot p(X_{n-2})$$

$p_n := p(X_n)$

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} \qquad (\text{oss. } q_n = 2^n p_n)$$

$$2^{-n} q_n = 2^{-n} q_{n-1} + 2^{-n} q_{n-2} \Rightarrow q_n = F_n \quad (\text{circa: bisogna guardare } p_1 \text{ e } p_2)$$

Double counting.



Ho una tabella, su ogni casella ho un numero reale a_{ij}

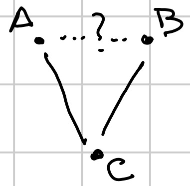
questa è la cosa interessante

Allora $\underbrace{\sum_{i,j} a_{ij}}_{\text{non ci interessa}} = \underbrace{\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right)}_{\text{somma della riga } R_i} = \underbrace{\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)}_{\text{somma della colonna } C_j}$

Esempio:

A un party partecipano $12k$ persone, ognuno stringe la mano a $3k+6$, $\exists N$: per ogni coppia, $\exists$ esattamente N persone che stringono la mano a entrambi. Trovare k

Conto



Potete pensare di avere una tabella in cui righe = coppie e colonne = persone. Scrivete 1 su una casella se il tizio non è nella coppia e stringe la mano a entrambe, 0 altrimenti

- Fisso una coppia: ho N tizi che stringono la mano. $N\frac{(12k)(12k-1)}{2}$
- Fisso un tizio: stringe a $\binom{3k+6}{2}$ coppie: totale $12k\binom{3k+6}{2}$

Dall'uguaglianza (esercizio!) viene $k=3$. Ovviamente bisogna anche esibire una configurazione...

Interpretazione probabilistica:

$\Omega = A_1 \sqcup A_2 \ldots \sqcup A_n = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_m$

$\Omega = \bigsqcup_{i,j} A_i \cap B_j =$

$$1 = \sum_i \left(\sum_j p(A_i \cap B_j) \right) = \sum_j \left(\sum_i p(A_i \cap B_j) \right)$$

$$\| \quad \sum_i p(A_i) \sum_j p(B_j | A_i) = \sum_j p(B_j) \sum_i p(A_i | B_j)$$

Esercizio: provare a interpretare le strette di mano in questo senso.

Esercizio

Quante sono le permutazioni $a_1, \dots, a_n$ di $\{1, \dots, n\}$ tali che
$$1a_1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq na_n \quad *$$

Oss. L'ultima disuguaglianza è quella più restrittiva.
$$(n-1)a_{n-1} \leq na_n.$$
O $a_n > a_{n-1}$, o $a_{n-1} = n$ $a_n = n-1$ $\leftarrow$

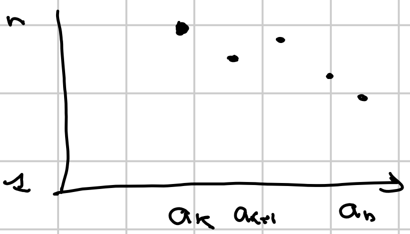
Oss (che in realtà segue da quanto detto prima)

Se metto $a_k = n-k+1$, si rompe perchè i prodotti all'esterno sono piccoli.

Oss. Sappiamo calcolare ricorsivamente quante sono le sequenze che terminano in $n-1$: sono A_{n-2} (numero di perm. che soddisfano $*$ con $n-2$ elementi)

Claim: nel caso in cui $a_n > a_{n-1}$, allora per forza $a_n = n$.

Idea: guardo dove sta $n = a_k$



Per rendere preciso sto discorso, bisogna notare che per $i > k$ $a_i \geq k$

$na_n \geq ia_i \geq ka_k = kn$

Però in realtà potete migliorare un pochettino la stima (esercizio)

Esercizio 118.

Calcolare la cardinalità di $\{(A,B) \in \mathcal{P}(X)^2 : A \cap B = \emptyset\}$

$|X| = n$

Se prendo due insiemi a caso $\subseteq X$, qual è la prob. che non si intersechino?

Chiamo Y_i l'evento "non si intersecano in i"

$p(Y_i) = 3/4 \implies p(A \cap B = \emptyset) = \prod_i (p(Y_i)) = (3/4)^n$

Esercizio 119

$$\sum_{A,B \in \mathcal{P}(X)^2} |A \cup B|$$

$$\sum_{A,B \in \mathcal{P}(X)^2} \sum_{x \in A \cup B} 1 = \sum_{A,B \in \mathcal{P}^2(X)} \sum_{x \in X} \chi_{A\cup B}(x)$$

$$\overset{!}{=} \sum_{x \in X} \left(\sum_{A,B \in \mathcal{P}^2(X)} \chi_{A \cup B}(x) \right) = \sum_{x \in X} \sum_{\substack{A,B \in \mathcal{P}^2 X \\ x \in A \cup B}} 1$$

$$= \sum_{x \in X} 3 \cdot 4^{n-1} = n \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$$

Esiste il concetto di variabile aleatoria.

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

Il valore atteso

$$E(f) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) p(\omega)$$

Nell esempio

$$f : \mathcal{P}^2(X) \to \mathbb{R}$$
$$A, B \mapsto |A \cup B|$$

$$\sum_{A,B} |A \cup B| = 4^n E(f)$$

$f = \sum_{x \in X} f_x$, quindi $E(f) = \sum_{x \in X} E(f_x) = n E(f_x) = n \cdot 3/4$

$E(f_x) = 3/4$ perché è come dire: scelgo due insiemi a caso, faccio un punto se $x \in A \cup B$ e 0 altrimenti

---

$$\boxed{114 \quad 115 \quad 116 \quad 118 \quad 119}$$

114. Una pedina parte a sx di $\boxed{\ \ |\ \ |\ \ }$ e si muove di 0 o 1 caselle.

$$s_{2n} = 2s_n^2 + 2s_{n+1}s_{n-1}$$

Idea: notare che il testo è falso, e la formula giusta è

$$s_{2n} = s_{n+1}s_{n-1} + s_n s_{n-2}$$

$S_n = C_n + \ell_n$

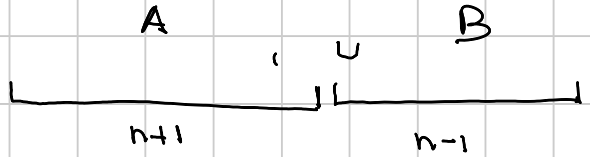
finisce al centro (on C_n) · finisce di lato (on ℓ_n)

$$\begin{cases} C_n = C_{n-1} + \ell_{n-1} \\ \ell_n = 2C_{n-1} + \ell_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \quad S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

Per farlo per induzione, bisogna claimare $S_{2n+1} = S_n S_{n+1} + S_{n-1} S_{n+2}$ (forse?)

$$S_{2n+2} = 2S_{2n+1} + S_{2n}$$
$$\qquad\quad\ \ \| \qquad\quad \|$$

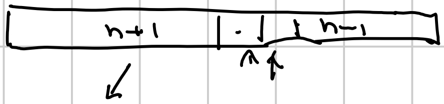
S_n è il # di successioni di n caselle, tali che due caselle cons. sono adiacenti o la stessa e la prima casella non è quella di destra



Ma a_{n+1} potrebbe non essere adiacente a a_{n+2}!

Allora faccio così: se non sono adiacenti, attacco ad A la riflessione di B

Più precisamente, prendo una succ. lunga $2n$ e la taglio



Ho S_{n+1} modi di scegliere la prima sottosequenza

Se a_{n+2} è la casella di destra, invece di considerare la seconda sottosequenza considero la sua riflessa.

Se a_{n+1} è centrale e a_{n+2} non lo è, allora potete decidere di attaccare la seconda stringa dritta o riflessa

Osservazione: non si è capito niente!

non la casella 0 che c'è quella a sx.

A_n = succ. di caselle che partono con la prima casella a sx

B_n = // // // // // al centro

C_n = // // // // // dx

$S_n = A_n + B_n$

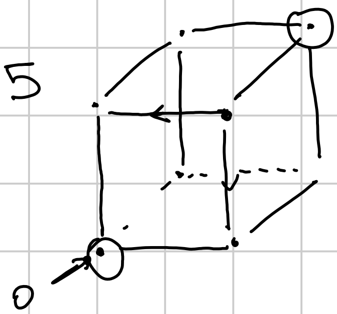
t_n finiscono al centro

u_n finiscono di lato

$$S_{2n} = t_{n+1}(A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}) + u_{n+1}(A_{n-1} + B_{n-1})$$

Usando la ricorsione con u_n e t_n si dovrebbe finire

115



A_n = percorsi che finiscono in 0

B_n = " " " a distanza 1

C_n = " " " a distanza 2

D_n = " " " a distanza 3

$$A_n = B_{n-1}$$

$$B_n = 3A_{n-1} + 2C_{n-1}$$

$$C_n = 3D_{n-1} + 2B_{n-1}$$

$$D_n = C_{n-1}$$