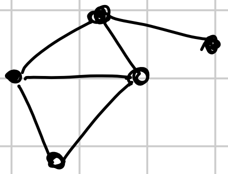
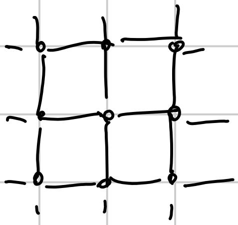
SENIOR 2023 - COMBINATORIA 2

Titolo nota 07/09/2023

GRAFI, INVARIANTI e PRINCIPIO DELL'ESTREMALE.

GRAFO $G=(V,E)$ E = archi che connettono 2 el. di V.



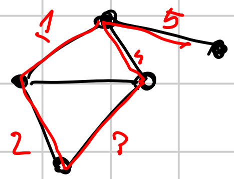


Def $v\in V$ il grado $\deg(v) = \#$ archi uscenti in v.

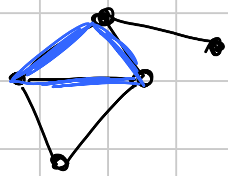
Esercizietto: $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.

Def CAMMINO: successione di archi che parte da un vertice v_0

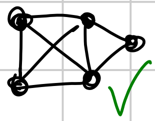
$v_0\to v_1\to v_2\to\dots\to v_n$

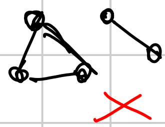


Def CICLO è un cammino che inizia e termina nello stesso vertice.

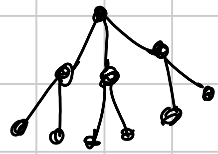


Def Un grafo si dice CONNESSO se $\forall v,w\in V$ $\exists$ cammino che li collega



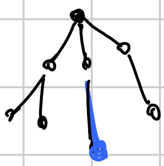


Def Un albero è un grafo connesso che non ha CICLI.



Lemma In un albero, $|E|=|V|-1$.

Dim Per induzione sul $|E|$. PB se ho 0 archi, ho 1 vertice $\Rightarrow$ OK.

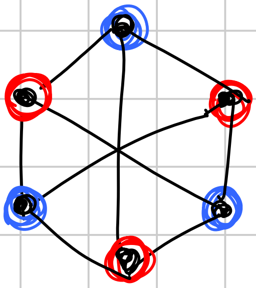
PI  $n+1$ archi. Prendo una foglia tolgo lei e il suo arco.
$|E|$ scende di 1 $|V|$ scende di 1.

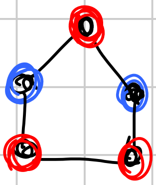
$$|E|-1 = |V|-1-1 \Rightarrow |E|=|V|-1.$$

Resterebbe da dimostrare che in un albero (finito) esiste sempre una foglia (esercizio)

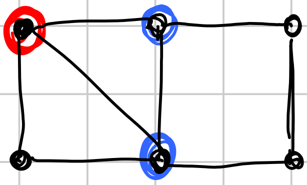
Esercizio In quali grafi ∃ ciclo euleriano?
(cioè un ciclo che tocca 1 e 1 sola volta ogni arco?)
• In quali ∃ cammino euleriano?

Def Un grafo si dice BIPARTITO se posso dividere V in due insiemi A e B in modo che non ci siano archi tra vertici di A e non ci siano archi tra vertici di B.





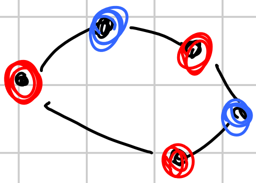
NO.



NO

Teorema Un grafo G è bipartito se e solo se NON ha cicli di lunghezza dispari.

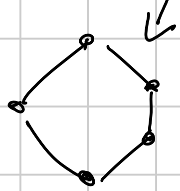
Dim (⇒) Supponiamo G bipartito. C ciclo.



Supponiamo per assurdo C abbia lung dispari allora i colori non possono essere alternati e quindi ho un assurdo.

(⇐) Supponiamo G abbia solo cicli pari.
Supponiamo G connesso per semplicità.
Prendo un vertice a caso e lo coloro di rosso. (V)
Prendo tutti i suoi vicini e li coloro di blu.
Prendo tutti quelli vicini ai blu e li coloro di rosso ...
Due problemi: (1) PTO SI COLORA SIA DI ROSSO SIA DI BLU
(2) POTREBBE ESSERCI PTO MAI COLORATO
(1) NON succede se w rosso e blu.
w rosso ⇒ ∃ cammino lungo pari $v \to w$
w blu ⇒ ∃ cammino dispari $v \to w$
} ciclo dispari

(2) NON succede perché il grafo è connesso.



IMO 2021-1 Ho carte con $n, n+1, \dots, 2n$. $n \geq 100$

le mischio e divido in due pile.

Dimostrare che in una delle due pile c'è un coppia di carte che ha somma un quadrato perfetto.

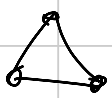
<u>Dim</u> Definisco un grafo G.

$V =$ numeri da n a $2n$ ($n+1$ vertici)

ho arco da v a w se (e solo se) $v+w = k^2$.

La tesi è che G NON è bipartito

Per dimostrarlo basta trovare un ciclo di lungh. dispari.



per esempio un triangolo a, b, c $\quad a+b = \square \quad b+c = \square \quad c+a = \square$.

$$a = 2m^2+1 \qquad b = 2m^2-4m \qquad c = 2m^2+4m.$$

$$(a+b) = (2m-1)^2 \qquad a+c = (2m+1)^2 \qquad b+c = (2m)^2.$$

Devo trovare m tale che

$$2m^2-4m \geq n \qquad\qquad 2m^2+4m \leq 2n.$$

Questi m si trovano a patto che $n \geq 99$.

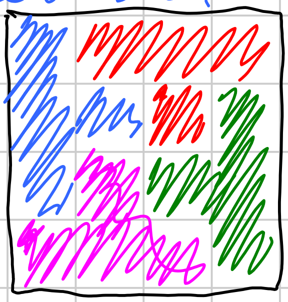
Altri grafi

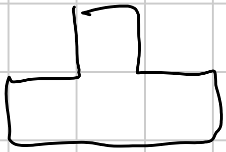
Ho persone in una stanza e alcuni sono amici fra di loro.

Persone si stringono la mano.

(1) Dimostrare che esiste una certa configurazione.
Dimostrare che X non si può fare / si può fare.
C'è un certo procedimento iterativo. Il procedimento termina?

Esercizio?



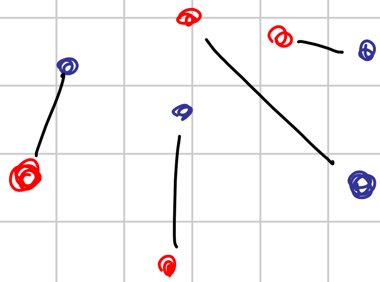
Si può tassellare con  ?

E se prendo quadrato $4n \times 4n$?
sì, divido in tanti 4×4 e tassello quelli.

Esercizio A un senior ci sono 65 stagisti.
Vengono da 8 città diverse e stamattina hanno magliette di 8 colori diversi. $\exists$ due stagisti stessa città e maglietta stesso colore?

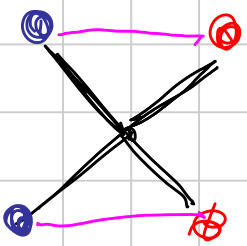
Dim. Ci sono $8 \times 8 = 64$ comb. città-maglietta, 65 stagisti
pidgeonhole.

Esercizio Nel piano n pti blu e n pti rossi
(a 3 a 3 non allineati)
Dimostrare che $\exists$ n segmenti rosso-blu
e non si intersecano



PRINCIPIO DELL'ESTREMALE.
Voglio un oggetto con una proprietà P.
Posso scegliere un oggetto che massimizza/minimizza una quantità Q e dimostrare che (per miracolo) quell'oggetto lì ha la prop. P.

Scelgo il matching con somma lunghezze minimo.



Se per assurdo ho intersezione, faccio lo scambio tra quei 4. Così la somma scenderebbe, ma non è possibile perché era già il minimo.

INVARIANTI e MONOVARIANTI.

invariante "caratteristica" che non cambia quando faccio mosse.

quantitativo "spaziale" = COLORAZIONI.

Esempio Parto con $\{10, 8, 15\}$ Mossa $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \longmapsto \frac{3a-4b}{5}, \frac{4a+3b}{5}$

Posso arrivare a scrivere $\{12, 13, 14\}$?

$$S = a^2+b^2+c^2 \longmapsto \frac{(3a-4b)^2}{25} + \frac{(4a+3b)^2}{25} + c^2$$

$$\frac{9a^2 - \cancel{24ab} + 16b^2 + 16a^2 + 9b^2 + \cancel{24ab}}{25} + c^2 = a^2+b^2+c^2$$

$$10^2+8^2+15^2 = 100+64+225 = 389$$
$$12^2+13^2+14^2 = 144+169+196 = 509$$
sono diversi.

Esercizio Ho numeri $1, 2, \ldots, n$.

Mossa scegliere a, b, cancello e scrivo $|a-b|$

Rimane solo 1 numero. Per quali n sono sicuro che sia pari?

INVARIANTE La parità della somma dei numeri sulla lavagna.

$a+b \longrightarrow |a-b|$ stessa parità.

Numero finale è pari $\Leftrightarrow$ $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ è pari.

MONOVARIANTI Quantità che cresce sempre.

o decresce sempre.

Esempio A e B giocano ad un gioco.

Ci sono varie pile di monete e si possono fare queste mosse:

(1) togliere una moneta da una pila (≥ 2 monete)

(2) dividere in 2 una pila che ha ≥ 2 monete.

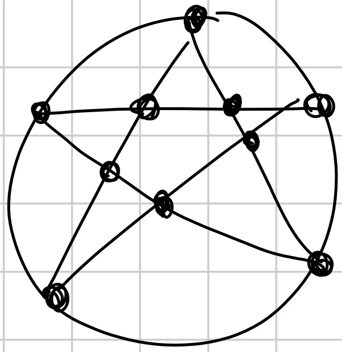
Non puoi muovere $\Rightarrow$ perdi.

è vero che il gioco finisce sempre.

\# monete − \# pile decresce sempre (strettamente)

Ma al minimo può diventare 0.

Esercizio



mossa è prendere segmento e ON → OFF, OFF → ON

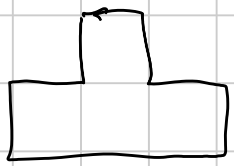
PARTO TUTTO OFF.
può diventare tutto ON?

Guardo solo quelle sulla circonferenza. SONO 5.
Ogni mossa ne cambia 2.

\# candele esterne accese ha stessa parità.

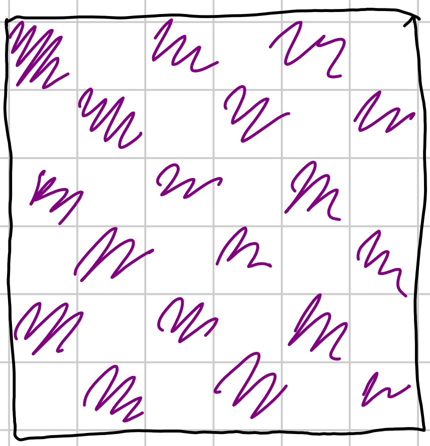
SS → AA		2
SA → AS		0
AA → SS		−2

All'inizio sono in numero dispari quelle spente
⇒ Alla fine è dispari ⇒ non può essere 0.

Tassellando con  Quadrati $4n \times 4n$ ce la faccio

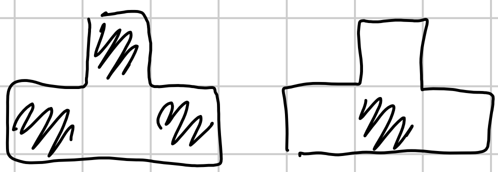
Quadrato $(2n+1)\times(2n+1)$? NO perché \# quadretti copro sempre mult di 4.

Quadrato $(4n+2)\times(4n+2)$?



6×6

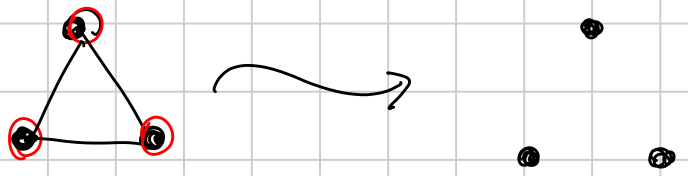
neri 18
bianchi 18

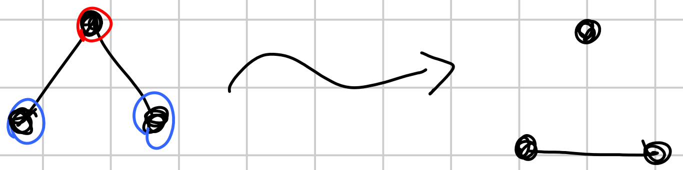


Sono 9 pezzi. Copro un numero dispari.
Quindi sicuramente non 18.

Esercizio (C2-8) C'è un grafo G.

A e B giocano ad un gioco. Inizia A, le mosse sono.

(1) 

(2) 

Quando non puoi muovere, perdi.

Dimostrare che l'esito della partita non dipende da come giocano, e capire chi vince al variare del grafo.

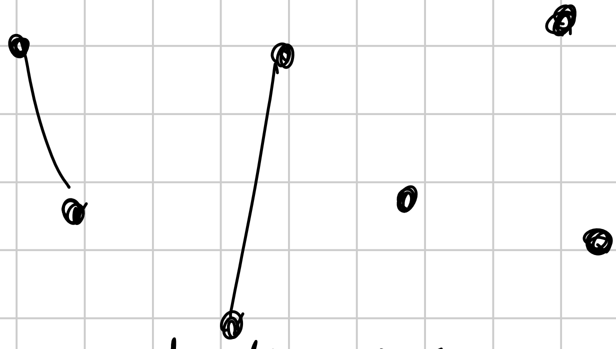
- Il gioco finisce sempre: ogni mossa diminuisce #archi.

Scelgo il mio vertice preferito e guardo lui

o perde 2 archi   o perde 1 guadagna 1

⇒ Parità di $\deg(v)$ non cambia mai.

Parità # archi cambia a ogni mossa $(-3\ ,\ -2+1=-1)$



Alla fine la situazione è che ho
- vertici isolati
- coppie isolate.

Quelli con grado dispari saranno accoppiati

pari isolati.

$$\#\text{archi fine} = \frac{\#\{\text{vertici grado dispari}\}}{2}$$

Sia P parità iniziale degli archi.
se a un certo punto la parità è P tocca ad Alberto
se è $P+1$ tocca a Barbara.

INVARIANTE $\#$archi $\begin{cases} +1 \text{ se tocca a Barbara} \\ +0 \text{ se tocca a Alberto} \end{cases}$ mod 2.

Sia $E = \#$ archi inizio.

$F = \#$archi fine $= \#\{\text{vert. grado dispari}\} \cdot \frac{1}{2}$

$|E-F|$ $\begin{cases} \text{pari tocca a A} \Rightarrow \text{vinto B} \\ \text{dispari tocca a B} \Rightarrow \text{vinto A.} \end{cases}$

IMO 2022 - 1 n A n B parola lunga $2n$.

$n=4$
$K=5$

$n=4$
$K=5$

$1 \le K \le 2n$

A A B B A B A B
A A A B B B A B
B B B A A A A B
A A A A B B B B

Per quali K, a prescindere dalla parola iniziale mi ritrovo sempre AAAAABBBB... BBB...BA...A

Fatto Se $K \le n-1$.

$\underbrace{A \dots A}_{n-1}\underbrace{BB \dots B}_{n}A$ Parola rimane uguale.

Fatto Se $K \ge \lceil \frac{3}{2} n \rceil$ allora esiste una parola che non ci arriva.

$\underbrace{A \dots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{B \dots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}A \dots A B \dots B$

Pesco sempre l'ultima catena.

$\#$catene massimali non cresce mai.

<u>OSS</u> Quando tolgo una catena che non è prima o ultima, le catene a dx e sx di quella si fondono $\Rightarrow$ $\#$catene diminuisce.

<u>Goal</u>: Dire che se $n \le K \le \frac{3n+1}{2}$, e la parola non è A^nB^n o B^nA^n, allora ad un certo punto prenderò una catena non prima e non ultima.

<u>OSS</u> Non prendo mai la prima.

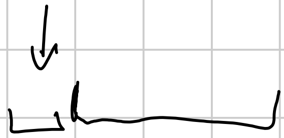
<u>OSS</u> Se la parola non è A^nB^n o B^nA^n, allora, WLOG le A sono separate $\Rightarrow$ almeno due catene di A.

$\Rightarrow$ una è più corta di $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (lunga $\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$)

Finchè prendo sempre l'ultima catena, le catene si muovono di un passo alla volta verso destra.
$\Rightarrow$ Tutte le catene arrivano in fondo ad un certo punto.

Ma quando arriva in fondo quella corta. che $K \le 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

e quindi prendo la penultima.



$\Rightarrow$ continua a diminuire $\#$catene.

Esercizi Dal 125 al 143.

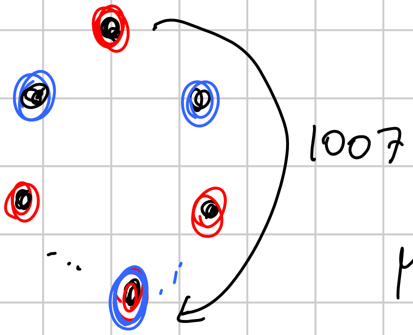
Altrimenti fare esercizi di C2. (17, 12, ...)

126 Scacchiera 47×47 cavallo che si muove.
è possibile visitare ogni casella 1 e 1 sola volta ritornando a quella di partenza?

Passa da nero a bianco.
G grafo vertici = caselle
archi = movimenti a L
Allora G è bipartito.
Cerchiamo un ciclo lungo 47^2, che è dispari $\Rightarrow$ non esiste.

127 2014-agono $A_1 \dots, A_{2014}$.
Tutti 0 tranne A_1 e A_3 e questi sono $=1$.
Mossa:
- aumentare di 1 due adiacenti
- aumentare di 1 due opposti

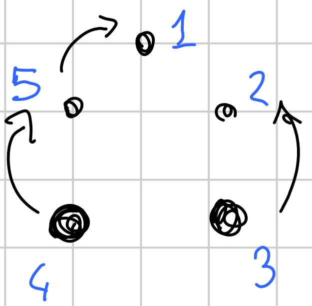
È possibile arrivare ad avere numeri tutti uguali?



$\sum$ rossi $- \sum$ blu è invariante

All'inizio è 2.
Ma se fossero tutti uguali sarebbe 0.

130 n-agono regolare su ogni vertice c'è una pedina.



mossa.

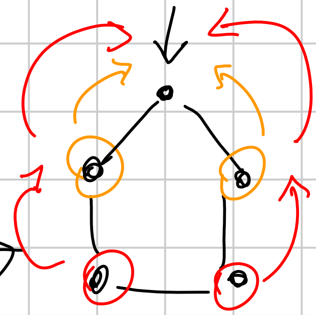
Per quali n
Posso mettere le pedine sullo stesso vertice?

$S = \sum_{P \in P}$ numero del vertice in cui si trova P.

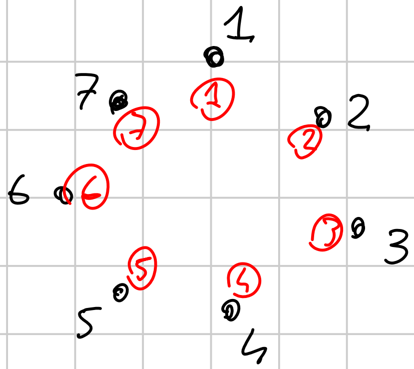
all'inizio è $\boxed{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$ è invariante mod n.

Alla fine sia $\underbrace{n \cdot d}$ $= 0 \mod n$.

Se n è pari non c'è speranza.
Se n è dispari si può →



$\boxed{131}$ Mossa come prima



Ci chiediamo per quali n e per quali vertici si può spostare tutto lì.

invariante = per ogni pedina sommo il numero della casella.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \frac{n(n+1)}{2} \cdot \#\text{vertice}.$$

Ci riesco quando sono $\equiv \mod n$.

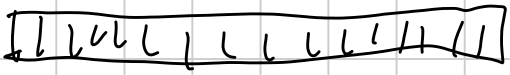
Se sono $\equiv \pmod n$ ci riesco?
Scelgo una pedina, che chiamo jolly.
Uso jolly per spostare le altre pedine.

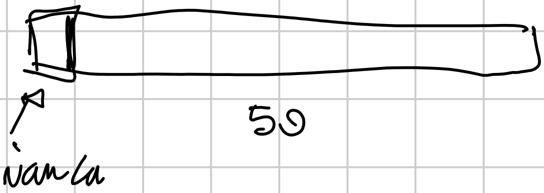
Itero il procedimento, riesco a mettere a posto tutte tranne la pedina jolly, che non so dove va.

Dove può stare la jolly? Diciamo che sta in w

$$\underbrace{(N-1)\,\underline{v} + 1 \cdot v} = \underbrace{(N-1)\,v + 1\,w}$$

$$v \equiv w \pmod n \qquad v = w$$

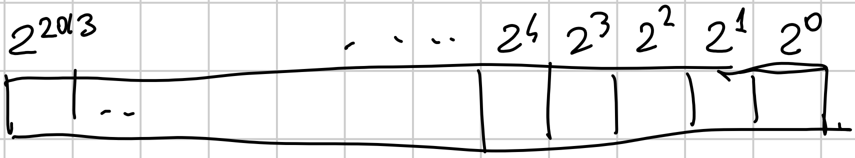
132) 2014 carte bianco o nero. 

mossa 

e capovolgerle tutte

Dimostrare che ad un certo punto non posso più muovere.

Se lo vedo in base 2.



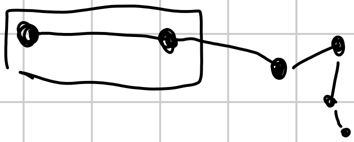
$Q = \Sigma$ numeri sopra le caselle bianche.

Scende sempre! All'inizio è $2^{2014}-1$

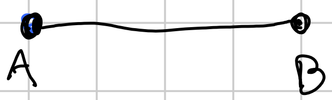
Al minimo è 0. Quindi mi fermo.

143) Numero dispari di cowboy che litigano
sono nel piano e a distanze a due a due diverse

Ognuno spara al più vicino.
Dimostrare che uno loro (almeno) sopravvive.



Prendo il tizio che spara più lontano di tutti. A spara a B

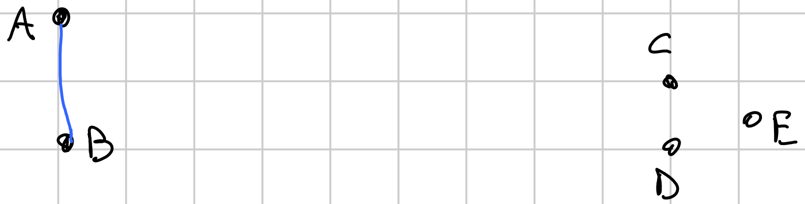


B spara ad A
B spara ad un altro. ⇒ A sopravvive.

Per massimalità della lungh. dello sparo l'unico che può uccidere A è B.

Se si sparassero a vicenda, potrei toglierli ed avere un numero dispari e continuare.

GLI spari delle altre persone non cambiano.



e quindi ho un numero più piccolo $\Rightarrow$ continuo