SENIOR 2023 - GEOMETRIA 2

Titolo nota 06/09/2023

TRASFORMAZIONI DEL PIANO.

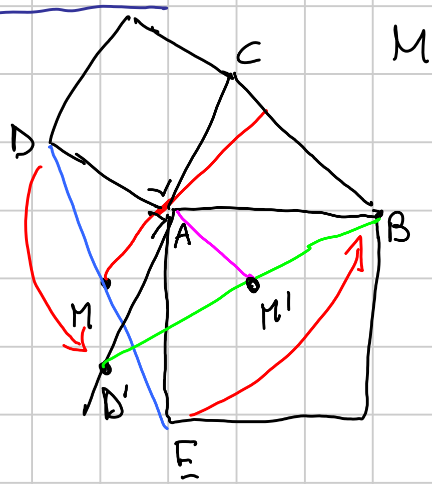
funzioni $f: P \to P$ biunivoche "spostiamo i punti"

- ISOMETRIE (traslazioni, rotazioni, simmetrie)
- OMOTETIE (= "riscalamenti")
- INVERSIONE CIRCOLARE.

ISOMETRIE cosa preservano? SOSTANZIALMENTE TUTTO

$A, B, C \longrightarrow A', B', C'$ $\quad d(A,B) = d(A',B')$ $\quad A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$

Problema.



$M =$ p.to medio. Th $AM \perp BC$.

Rot. di $\frac{\pi}{2}$ intorno ad A.

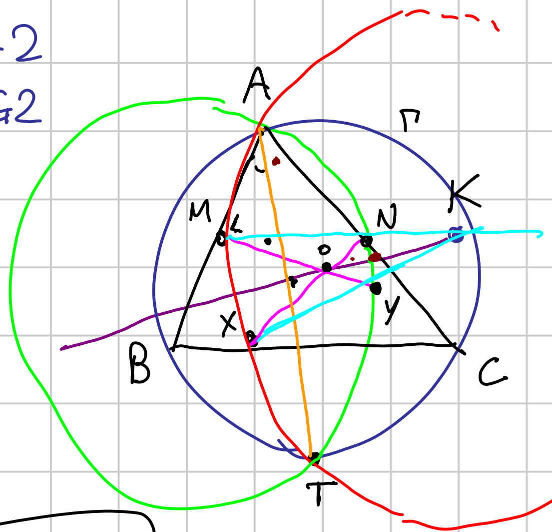
$A \to A$ $\quad M \to M'$ $\quad$ Th $AM' \parallel BC$

$E' = B$ $\quad D' =$ sym di C risp A.

$DE \to D'B$ $\quad M' =$ p.to medio di $D'B$

Nel triangolo $D'BC$, i p.ti A e M' sono p.ti medi.
e quindi $AM' \parallel BC$.

BST 2014-2
IMOSL 2013-G2



$\omega_1 = \odot AMT$

$\omega_2 = \odot ANT$

$Y =$ (asse AB) $\cap \odot ANT$

$X =$

Tesi: $\boxed{KA = KT.}$

② T sta sulla bisettrice.
Sembra dal disegno simmetrico risp KO.

Basta mostrare $K \in$ asse $(AT) = \ell$

$O \in \ell$ (perchè AT = corda di Γ

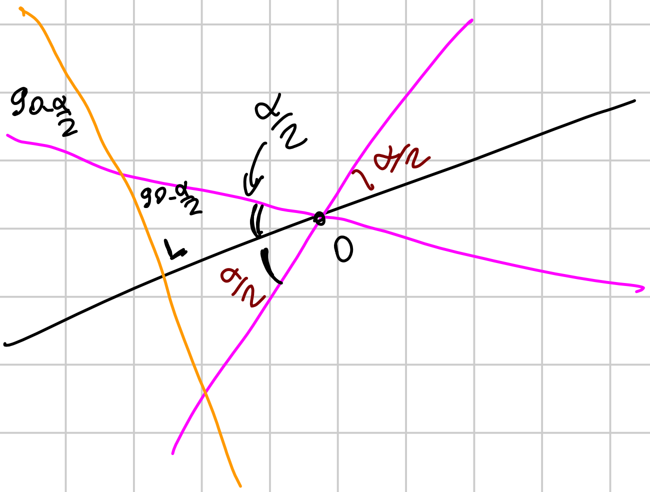
Simm. risp ℓ: Γ rimane sempre Γ

Anche $\omega_1 \to \omega_1$ anche $\omega_2 \to \omega_2$

Se dimostro $M \leftrightarrow X$ $N \leftrightarrow Y$, allora $MN \leftrightarrow XY$

$$K = MN \cap XY \leftrightarrow XY \cap MN = K \Rightarrow K \in \ell.$$

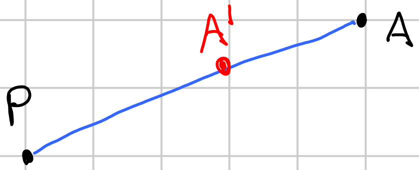
Per dire $N \leftrightarrow Y$ e $M \leftrightarrow X$ basta dire che asse AB e AC si scambiano



$\Rightarrow$ $K \in$ asse(AT)

$\Rightarrow KA = KT$.

<u>OMOTETIE</u> risp P con fattore $\lambda > 0$.



con $\frac{PA'}{PA} = \lambda$

COSA SI CONSERVA

angoli parallelismo

allineamenti (rette $\to$ rette)

ciclicità, tangenze

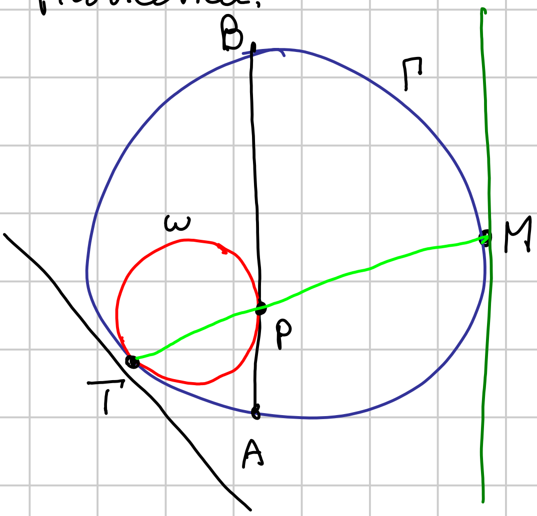
COSA <u>NON</u> SI CONSERVA

distanze (molt. per λ)

aree (molt. per λ^2)

<u>OMOTETIE $\lambda < 0$</u> OMOTETIA di $-\lambda$ e poi simm. risp a P.

Problema.



Tesi: M è p.to medio di $\widehat{AB}$

OMOTETIA di centro T e fattore $\frac{R}{r}$

T resta fisso $\quad \omega \to \Gamma$

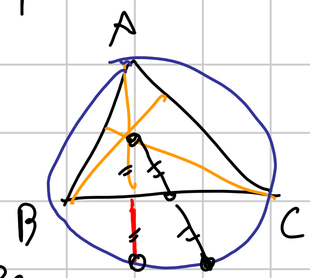
$P \to M \quad AB \to$ tang in M a Γ

Qual è il pto di Γ con tang // AB: è proprio il p.to medio.

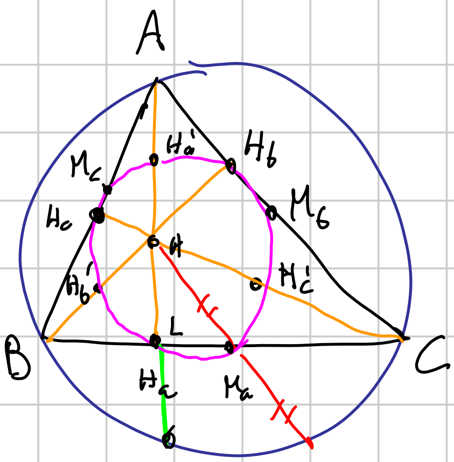
Lemma ABC triangolo H ortocentro. Γ circoscritta M = p.to medio di BC

H' = simm. di H risp BC $\qquad$ H'' = simm di H risp M

Allora $H', H'' \in \Gamma$.



Teorema



$H_a\ H_b\ H_c$ piedi altezze

$M_a\ M_b\ M_c$ p.ti medi lati

$H_a'\ H_b'\ H_c'$ p.ti medi AH, BH, CH

Tesi: questi 9 p.ti stanno su una circ.

circ. di Feuerbach $\qquad$ circ. dei NOVE PUNTI. $\quad \omega$

Dim OMOTETIA CENTRO H e fattore 2. $\qquad H \to H$

$H_a' \to A \qquad H_b', H_c' \to B, C$

$H_a \to$ simm. di H risp BC $\quad \in \Gamma$

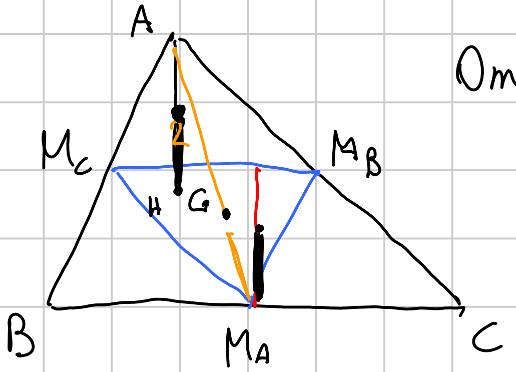
$M_a \to$ simm di H risp M_a. $\quad \in \Gamma$

immagini dei 9 p.ti stanno su Γ.

N = centro di Feuerbach p.to medio di OH

raggio di circ. di Feuerbach è $R/2$

Teorema. $G \in OH$



Omotetia di centro G e fattore $-\frac{1}{2}$

$G \to G$

$A \to M_A$ (G sta a $\frac{2}{3}$ di AM)

$B \to M_B$ $\quad C \to M_C$

H è l'inters. delle altezze di ABC.

$H \to$ inters. delle altezze $M_A M_B M_C$.

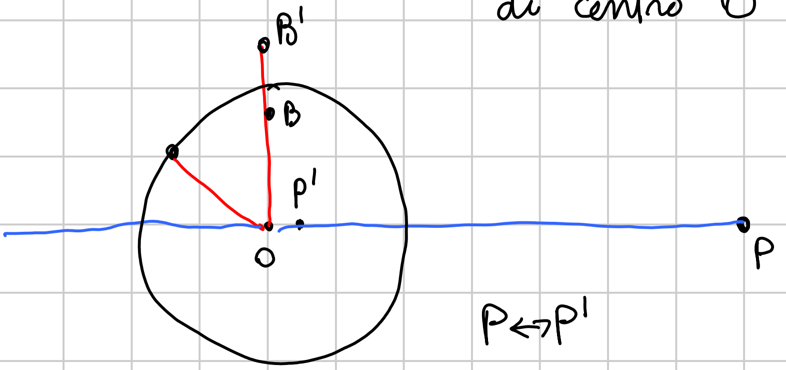
Ma le altezze di $M_A, M_B M_C$ sono gli assi di ABC.

$H \to O$ $\quad$ H, G, O allineati in quest'ordine e $GO = \frac{1}{2} GH$.

$AH = 2 M_A O$ $\qquad AH_a' = M_a O$ $\qquad H_a' H = M_a O$.

Inversione circolare. rispetto a una circ Γ.

di centro O e raggio R

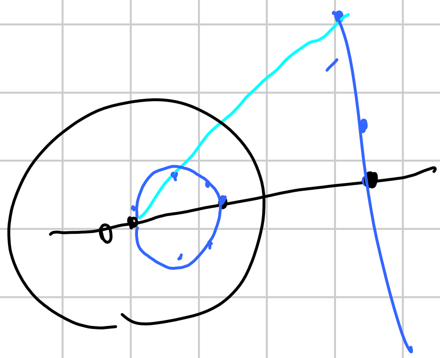


$P \leftrightarrow P'$

$OP' \cdot OP = R^2$

è un'involuzione.

I punti si scambiano a coppie



rette per O $\to$ sé stesse

rette non per O $\to$ circ. per O

circ. per O $\to$ retta non per O.

circ. non per O $\to$ circ. non per O.

COSA SI CONSERVA

\# inters. fra oggetti ($\neq O$)

rette per O fisse / p.ti su Γ fissi

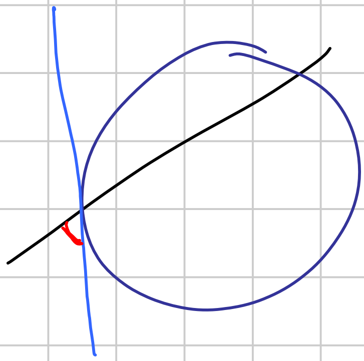
angoli, tangenze

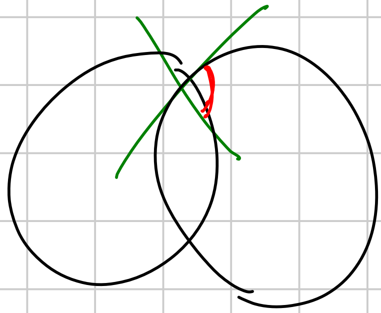
COSA NON SI CONSERVA.

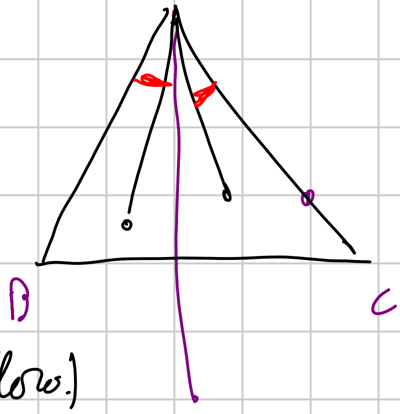
distanze

"essere una retta"

praticamente niente



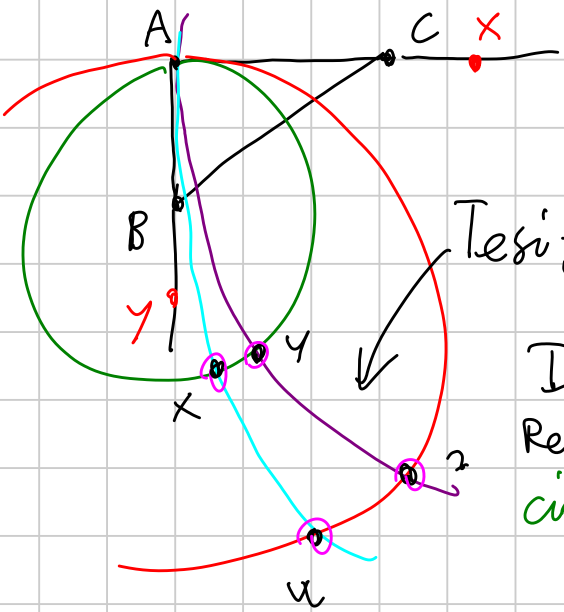




Perchè mai dovrei usarle:

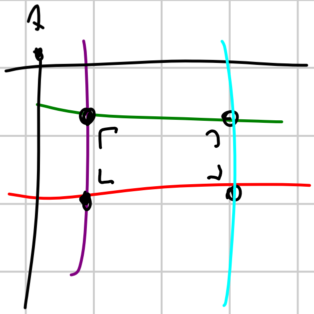
- Sbarazzarmi di circonferenze.
- Si accoppiano bene a simm. risp. bisettrice
- Perchè mi va.
  (tutti i p.ti interessanti si scambian fra di loro.)
  (avanzato)
- Tesi è ciclicità ⇒ se inverto può diventare allineamento.

Problema

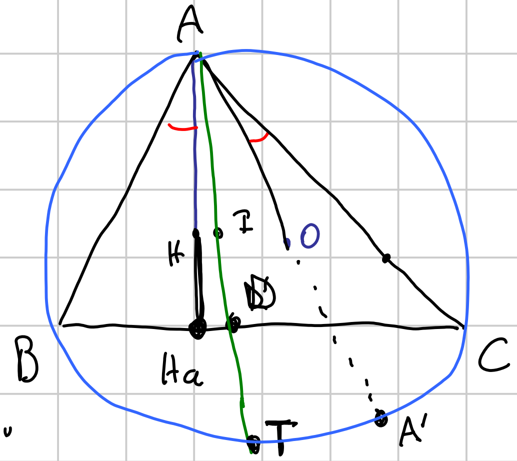


Tesi: questo è ciclico.

Inverto in A, raggio come mi pare.
Retta AC resta sè stessa
circ. verde: retta. // AC
rossa retta // AC
viola retta // AB
azzurra retta // AB



X'Y'Z'W' è rettangolo ⇒ ciclico.
XYZW è ciclico ⇒ fine.



+ simm. risp. bisettrice

Inversione di centro A e raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$.

C' è un pto su AB

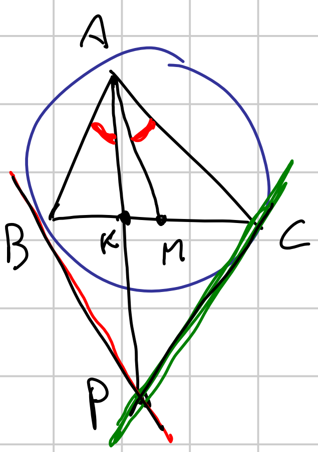
$AC' \cdot \cancel{AC} = AB \cdot \cancel{AC}$ $\qquad AB' \cdot \cancel{AB} = \cancel{AB} \cdot AC$

Dove va la retta BC? Va ~~nella~~ circoscritta.

AI resta fissa. T ⟷ D.

Ha ⟷ diam. opposto di A sulla circoscritta.

Lemma (della simmediana)

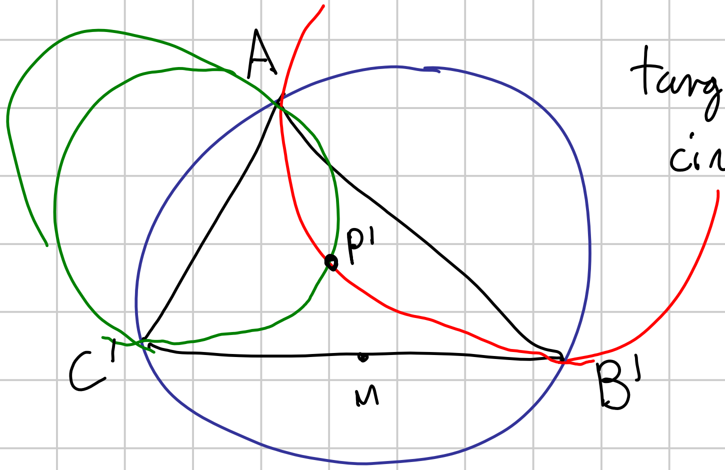


Tesi: $\underline{\hat{BAP} = \hat{MAC}}$ $\qquad \frac{BK}{CK} = \frac{AB^2}{AC^2}$

inversione di centro A e raggio $\sqrt{bc}$.
+ simmetria risp BISETTRICE

Tesi AP'M allineati

Γ ⟷ BC



tang in B

circ. passe per B'
tag a BC
passa per A

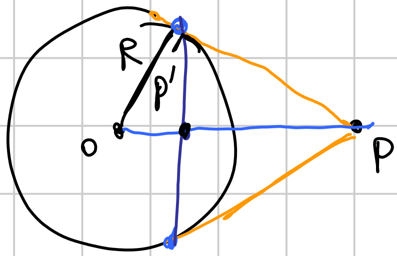
essere tang a circ. ⟶ essere tang a BC

AP' = asse radicale

|

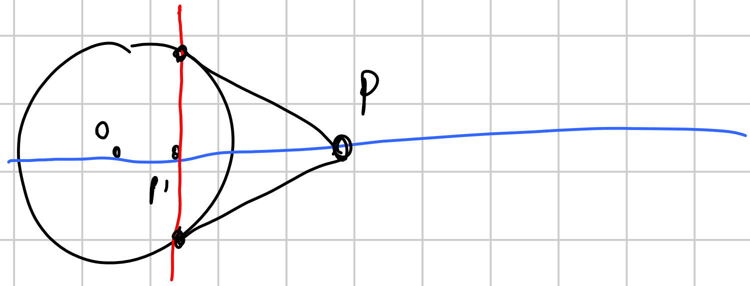
$pow_{\text{green}}(M) = pow_{\text{red}}(M)$
$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$
$MC'^2 \quad = \quad MB'^2$

Modo geometrico di vedere P' e P

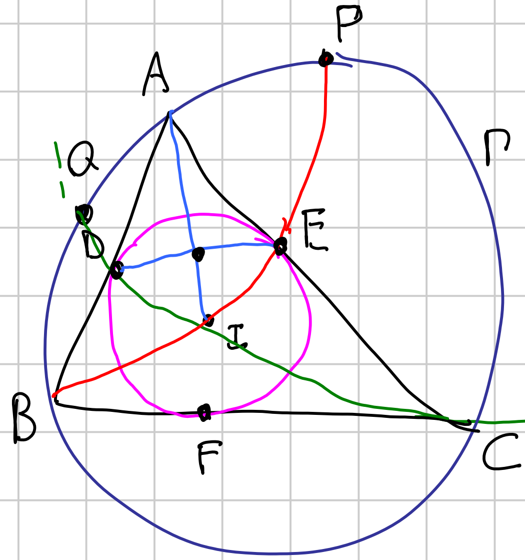


Basta vedere $\boxed{OP' \cdot OP = R^2}$

Basta usare euclide



WC 2023
Ammissione G1

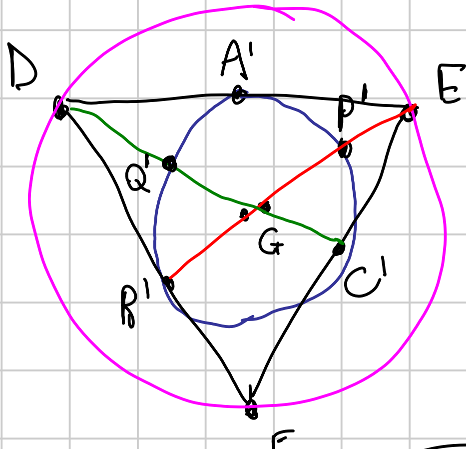


$\odot BEI \cap \Gamma = P$

$\odot CDI \cap \Gamma = Q$

Tesi $DEPQ$ è ciclico.

Inverto risp. alla circ. inscritta.



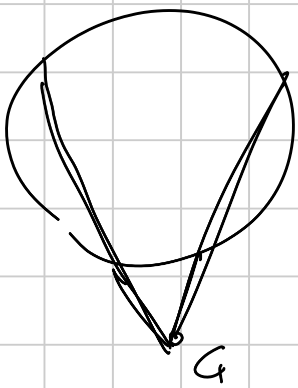
$A'B'C'$ p.ti medi

per la costruzione geometrica di prima

circ verde $\rightarrow$ DC' mediana

circ rosso $\rightarrow$ EB' mediana

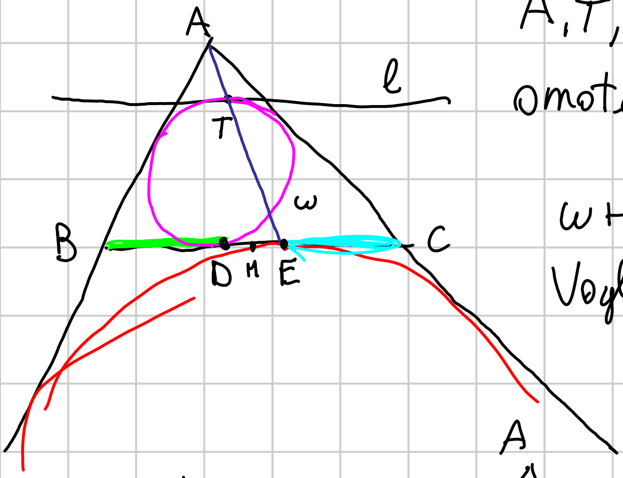
Tesi $DEP'Q'$ ciclico.



Basta mostrare $\boxed{GQ' \cdot GD = GP' \cdot GE}$

$GQ' \cdot 2GC' = GP' \cdot 2GB'$ $\quad P'B'Q'C'$ ciclico.

PROBLEMA 4



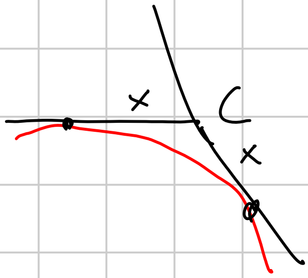
A, T, E allineati

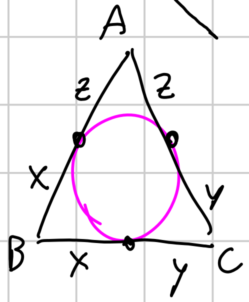
omotetia di centro A che manda $l \to BC$.

$\omega \mapsto$ exscritta, ω_a

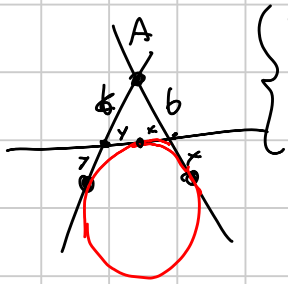
Voglio che E è p.to tang. di ω_A su BC

E' = p.to tangenza. $\boxed{BD = CE \text{ ipotesi}}$





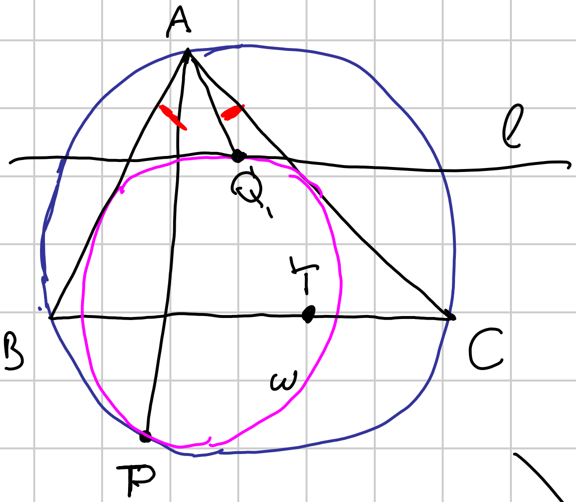
$$\begin{cases} x+z=c \\ z+y=b \\ x+y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= p-b \\ y &= p-c \\ z &= p-a \end{aligned} \qquad p = \frac{a+b+c}{2} \qquad \frac{a+b-c}{2}$$



$$\begin{cases} y+x=a \\ b+x=c+y \end{cases}$$

$x = p-b \quad y = p-c$

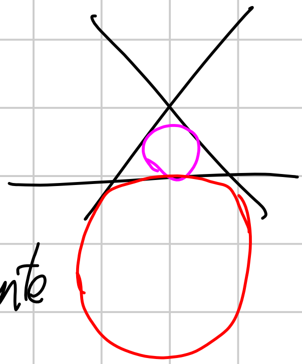
PROBLEMA 9

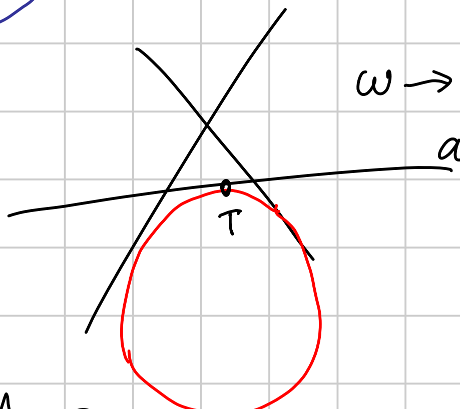


Inversione centro A e raggio $\sqrt{bc}$.
+ simmetria risp bisettr.

$B \leftrightarrow C$

$\Gamma \leftrightarrow BC$



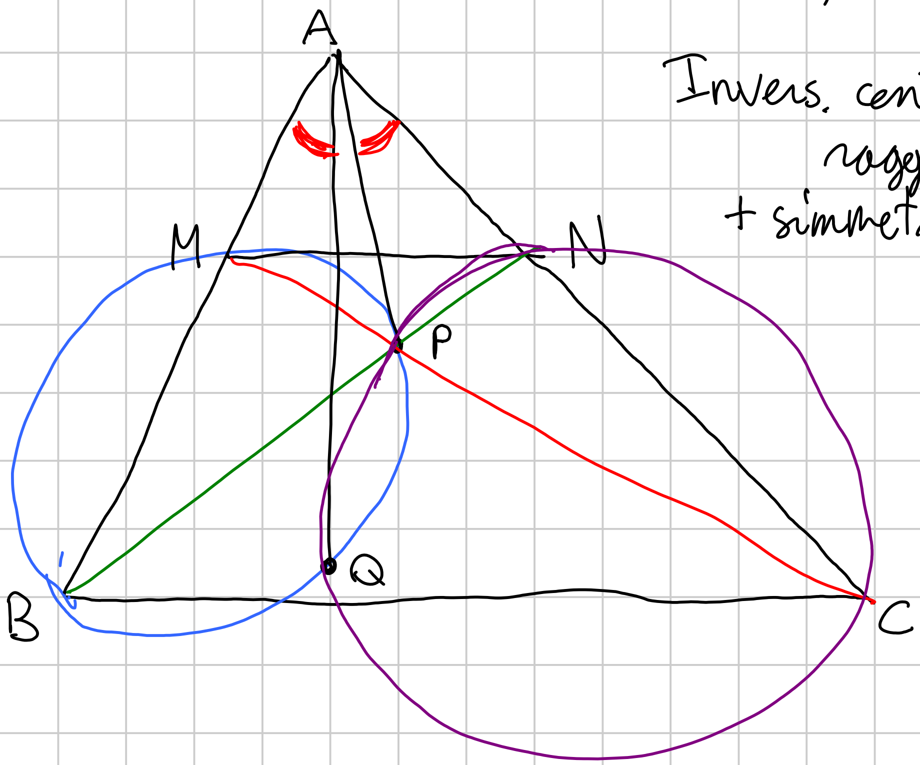


$\omega \to$ nella circ. tangente a AB, BC, CA ma FUORI

Basta che A, Q e p.to tang ex-~~in~~scritta allineati.

Ma questo si dimostra come prima con un' omotetia.

PROBLEMA 10 (BMO 2009-2)



Invers. centro A
raggio $\sqrt{AM \cdot AC}$
+ simmetria.

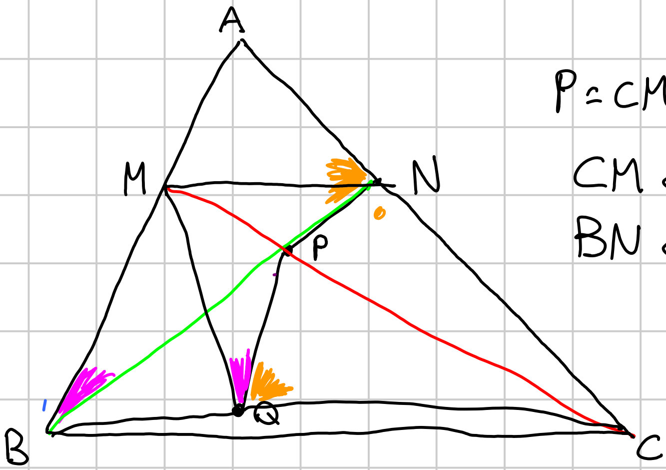
$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

$$\boxed{AM \cdot AC} = \boxed{AB \cdot AN}$$

$B \leftrightarrow N \qquad C \leftrightarrow M.$

Spero tantissimo che $P \leftrightarrow Q$. Se è vero ho finito:

$$Q\hat{A}B = P'\hat{A}B = P\hat{A}C$$



$P = CM \cap BN$

$CM \leftrightarrow \odot MCA$

$BN \leftrightarrow \odot BNA$

$P' = \text{circ } MCA$ e BNA.

Devo mostrare $Q \in \odot MCA$

$Q \in \odot BNA$

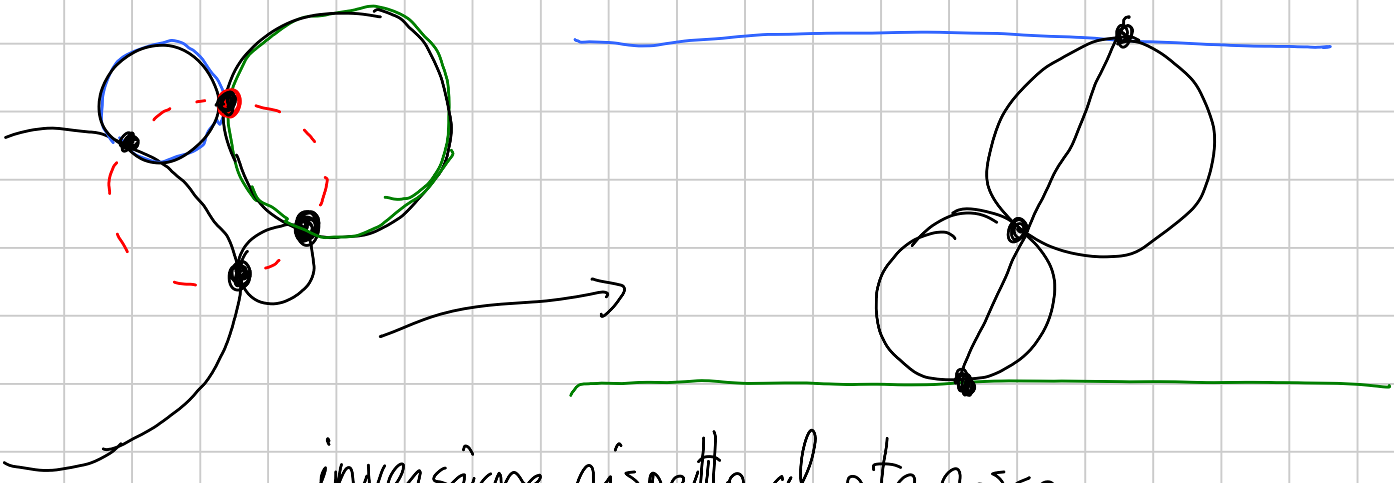
Devo mostrare che $MQCA$ è ciclico (anche $BQNA$ ciclico)

Voglio $M\hat{Q}C = 180 - \alpha$

$M\hat{Q}C = M\hat{Q}P + P\hat{Q}C = M\hat{B}N + B\hat{N}A = 180 - B\hat{A}N = 180 - \alpha$ come voluto.

$BQNA$ ciclico si vede allo stesso modo.

PROBLEMA 6



inversione rispetto al p.to rosso.