G3 - Basic — GEOMETRIA SINTETICA

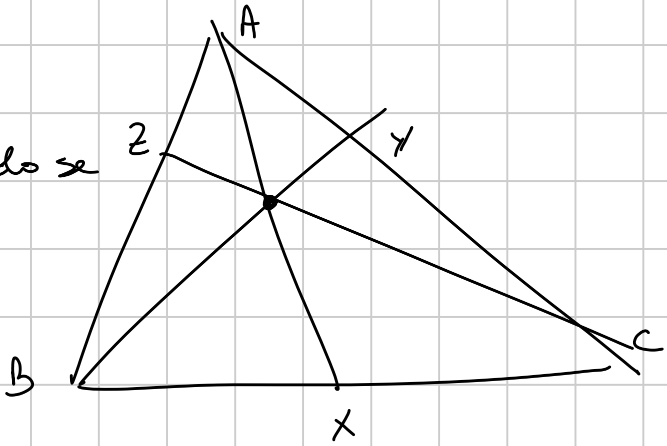
Gallo

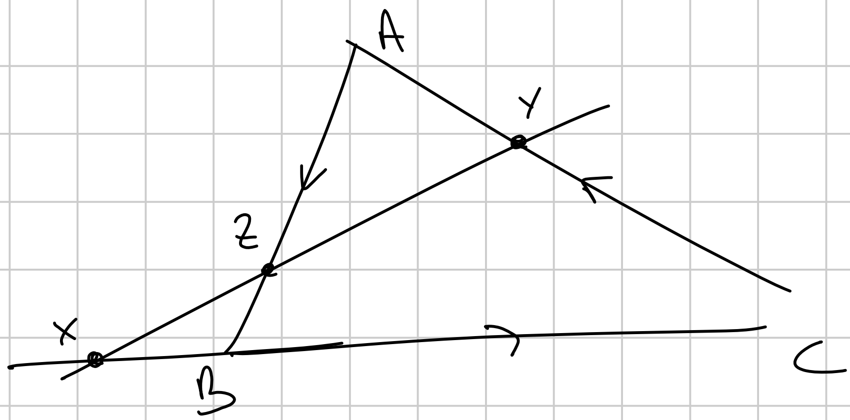
Titolo nota — 08/09/2023

TEOREMA DI CEVA

AX, BY, CZ sc e solo se

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$



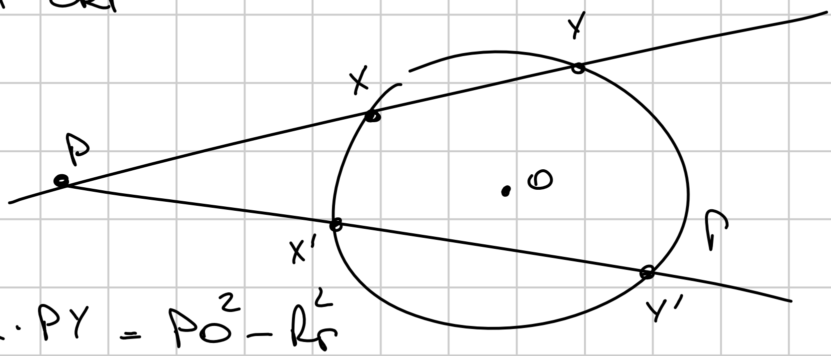


TEOREMA DI MENELAO

X, Y, Z sono allineati se e solo se

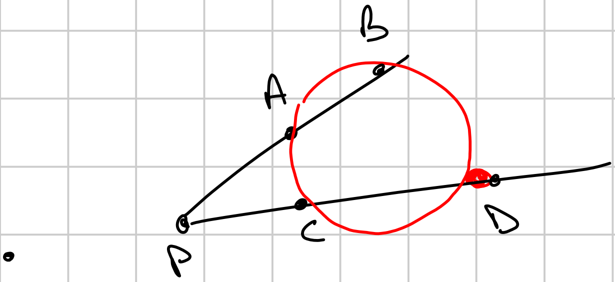
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$$

POTENZA DI PUNTO RISP. A UNA CRF



$$Pow_\Gamma P = PX\cdot PY = PO^2 - R_\Gamma^2$$
$$= PX'\cdot PY'$$

e vale il viceversa!



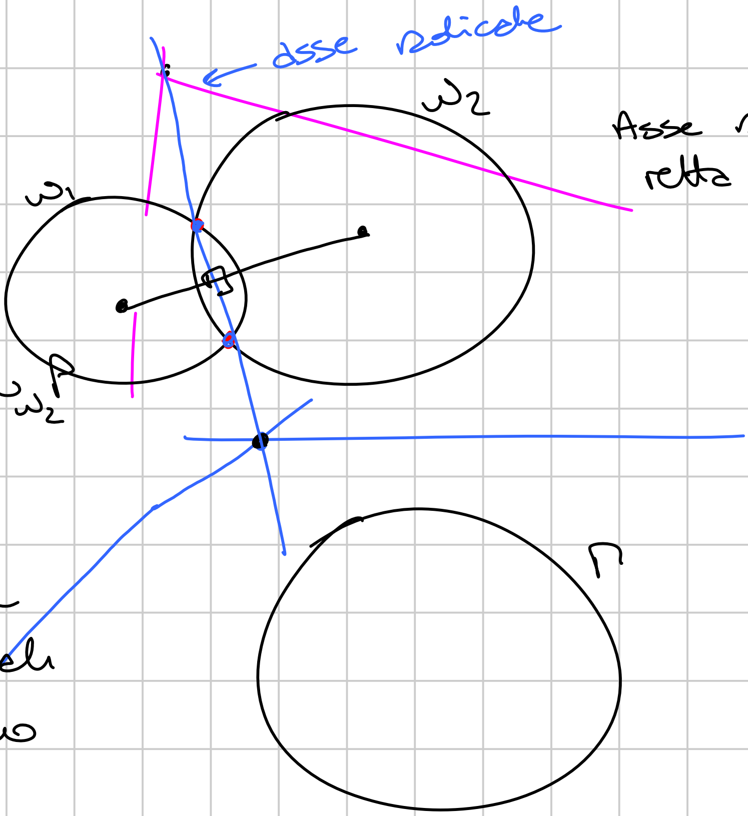
$$PA\cdot PB = PC\cdot PD$$

$\longrightarrow$ ABCD ciclico

ASSI RADICALI

il luogo dei punti con la stessa pot. risp. alle due CRF

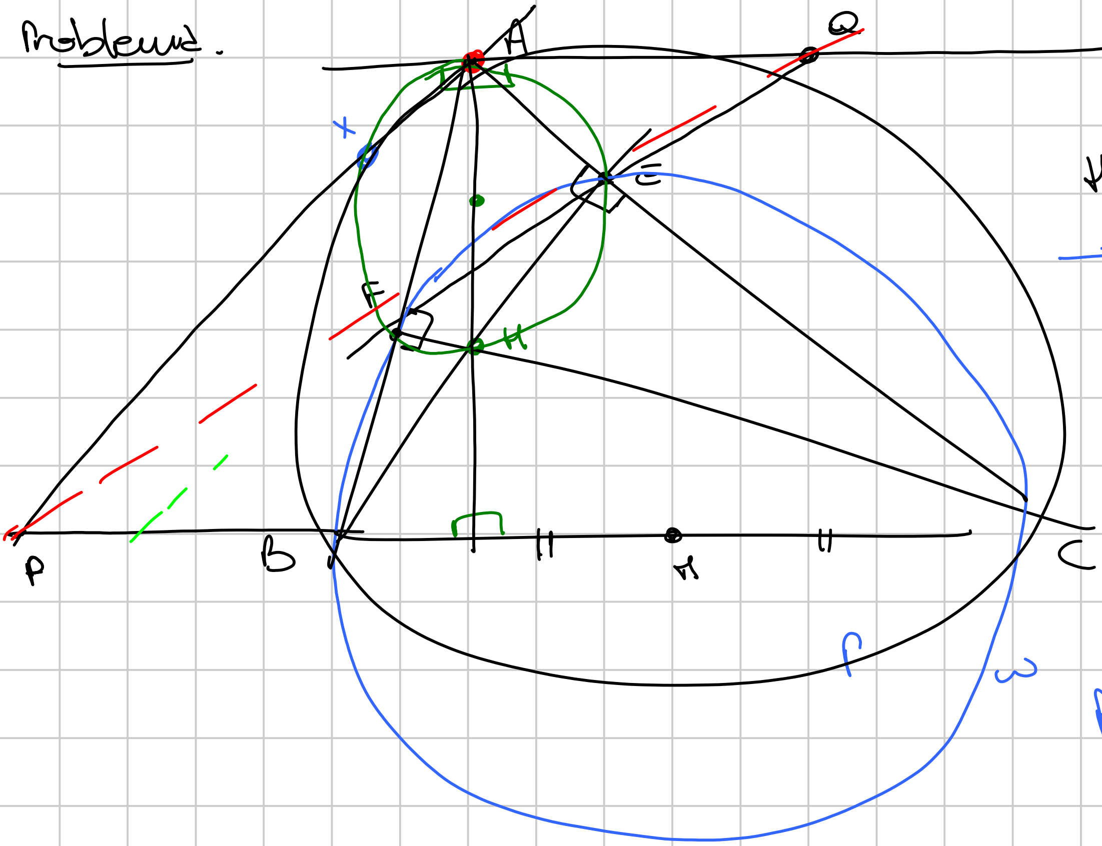
P t.c. $\mathrm{Pow}_{\omega_1} P = \mathrm{Pow}_{\omega_2} P$



Asse radicale $\perp$ retta dei centri

→ Tre circonferenze hanno assi radicali che concorrono

Problema.



$AB \neq AC$

Th) $PQ \perp AM$

$\rightarrow BCEF$ è ciclico, M è il centro

$\mathrm{Pow}_\omega P = PB \cdot PC = \mathrm{Pow}_\Gamma P = PA^2$

$\mathrm{Pow}_\omega Q = QE \cdot QF = \mathrm{Pow}_{\odot} Q = QA^2$

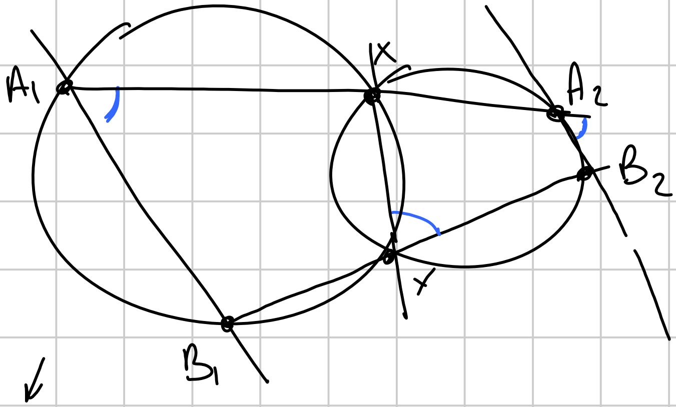
$\rightarrow AFHE$ è ciclico, e la circonferenza tange AQ

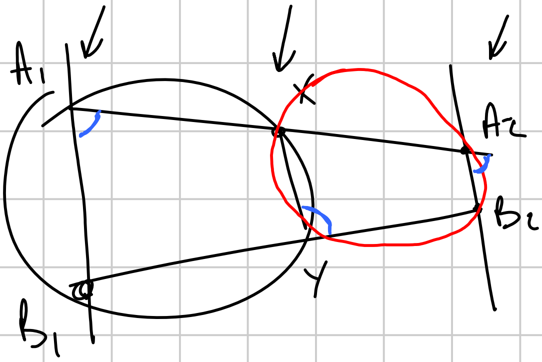
$\longrightarrow PQ$ è asse radicale della coppia di circ $\omega = \odot BCEF$ e $\odot A$

e quindi è $\perp$ alla retta dei centri AM !!

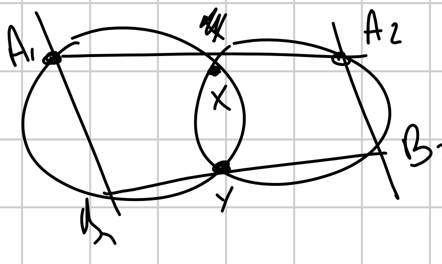
TEOREMA DI REIM

A_1B_1XY e A_2B_2XY sono ciclici allora $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.





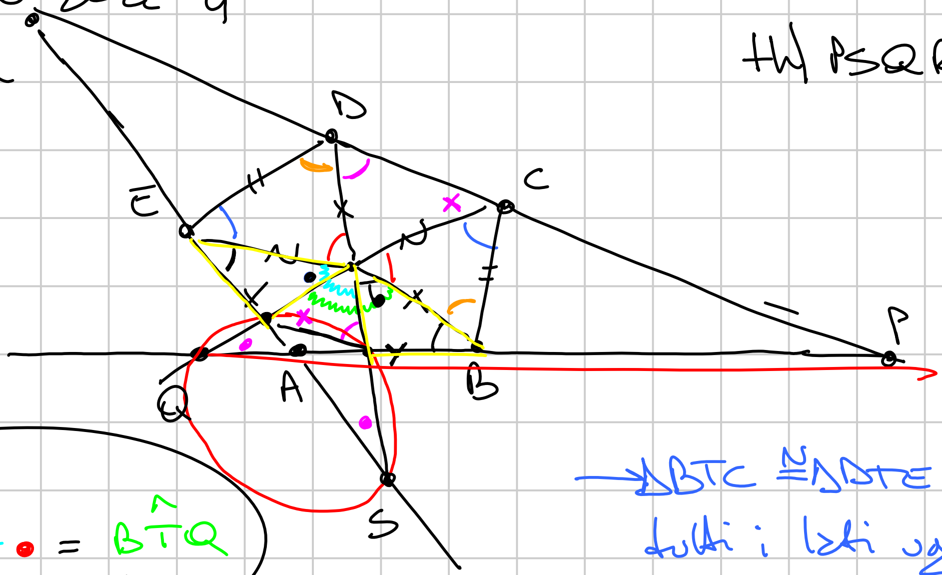
se $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ e A_1B_1XY ciclico allora A_2B_2XY è ciclico



se A_1XYB_1 e l'altro sono ciclici e $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \Longrightarrow X \in A_1A_2$

Problema IMO 2022-4

Th) PSQR è ciclico



→ $\triangle BTC \cong \triangle DTE$ hanno tutti i lati uguali
⟹ tutti gli angoli uguali

$S\hat{T}E = \pi - \bullet = B\hat{T}Q$

⟹ $E\hat{T}X = B\hat{T}Y$

$\bullet = \pi - (\bullet + \bullet + \bullet)$

→ QSXY è ciclico

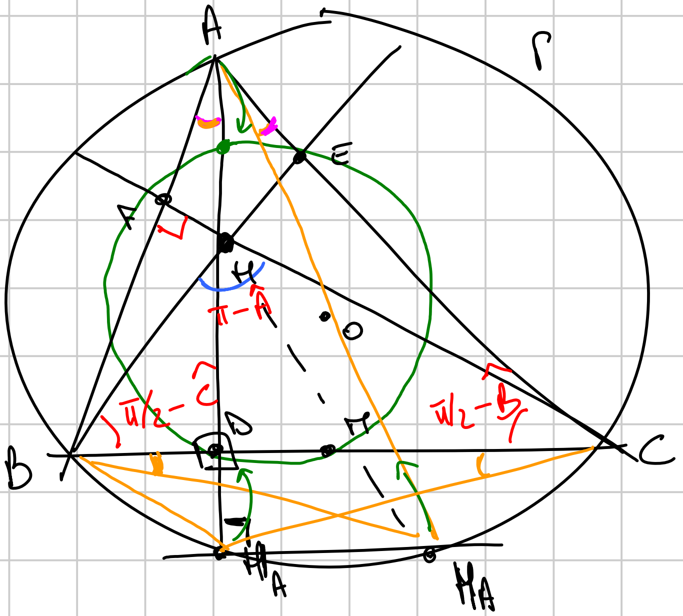
→ Con Reim finiamo se $XY \parallel PR \parallel CD$

$XY \parallel PR$ ⟸ $\triangle TCD \sim \triangle TXY$

→ $E\hat{T}X \sim B\hat{T}Y$

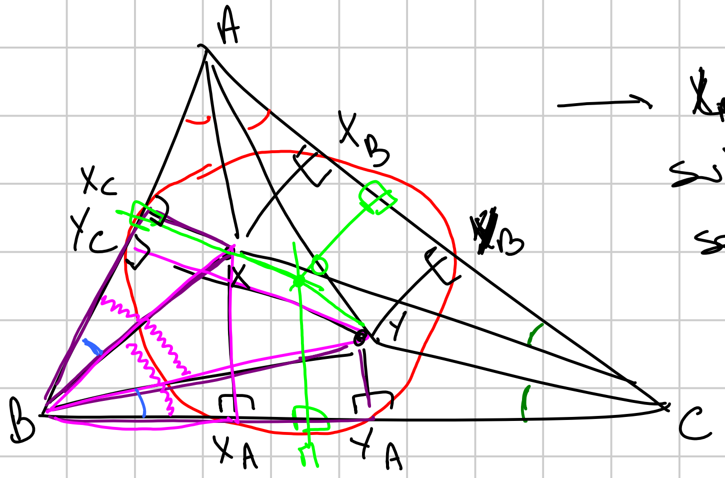
→ $TX/TY = TE/TB = TC/TD$

CONFIGURAZIONE DELL'ORTOCENTRO



- Il simmetrico di H rispetto a BC e ad M sta sulla circoscritta Γ.
- AM_A è un diametro
- Feuerbach: i piedi delle altezze e i pt. medi dei lati sono conciclici
- H e O sono CONIUGATI ISOGONALI

CONIUGATI ISOGONALI



→ ~~Le~~ proiezioni sui lati dei due pt sono concicliche

$$BX_A \cdot BY_A \stackrel{?}{=} BX_C \cdot BY_C$$

• So che $\dfrac{BX_C}{BY_A} = \dfrac{BX}{BY} = \dfrac{BX_A}{BY_C}$

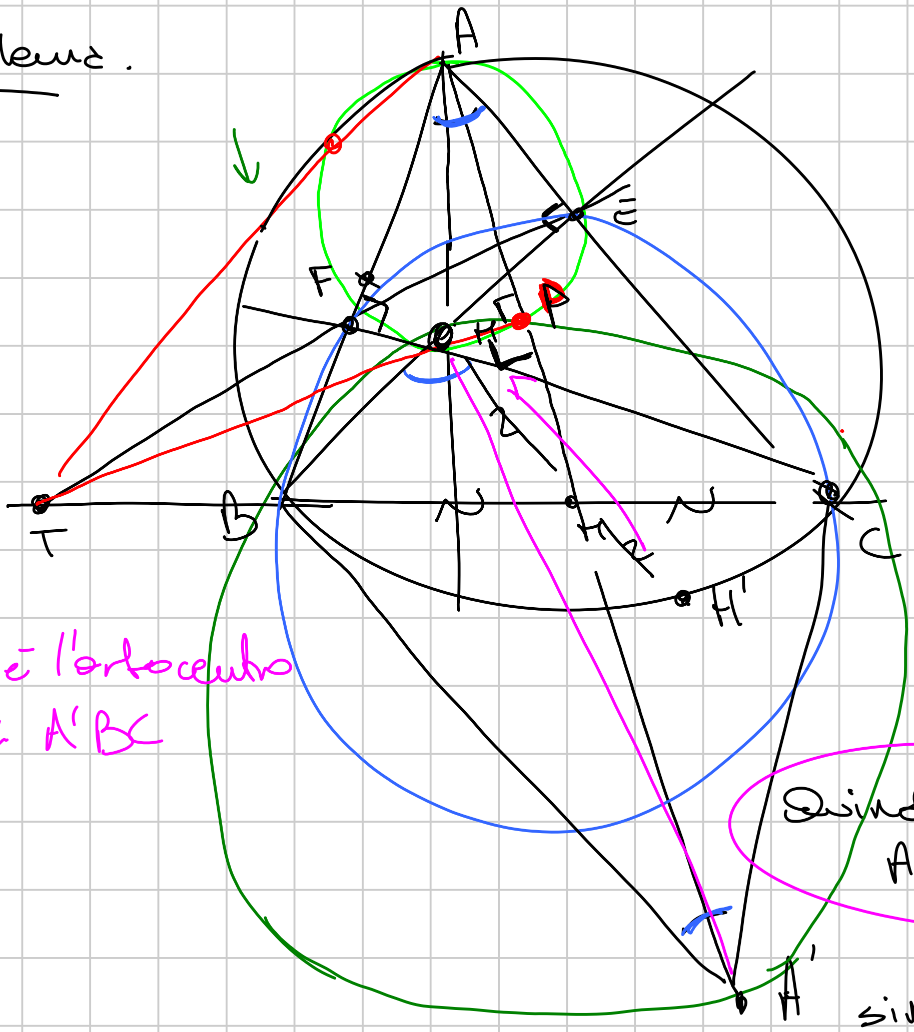
dalle similitudini!

→ $X_A Y_A X_C Y_C$ è ciclico! e simmetrici

O è il pt medio ~~fra~~ XY

(per Talete)

Problema.



th) TH ⊥ AM

EFBC ciclico

AFHE ciclico

→ EF è il loro asse radicale

T sta su EF e BC, che sono assi radicali

→ TH asse radicale di ⊙BHC e ⊙AFE.

→ AP ⊥ TH

Quindi ci manca solo A, P, M allineati!

simmetrico di A risp. al M ∈ ⊙BHC

H' è l'ortocentro di A'BC

→ $\odot BHC$ è il simm di $\odot BAC$ rispetto a BC

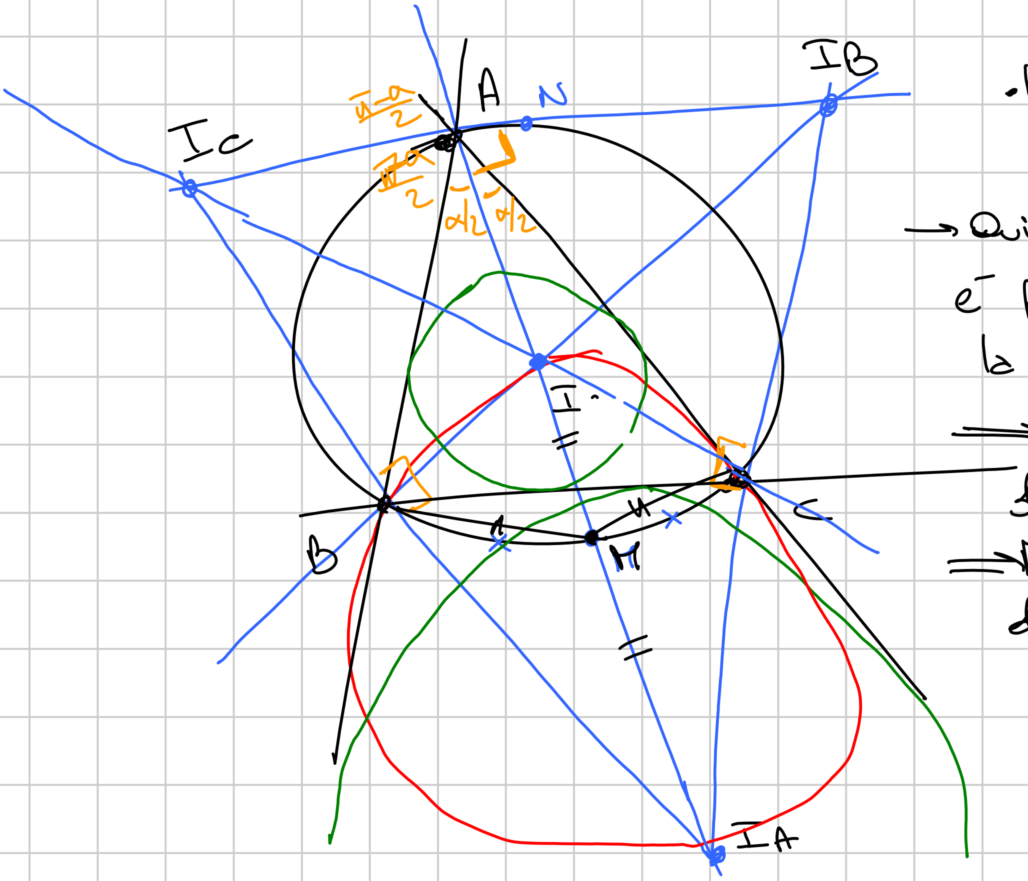
o anche perché H è ortocentro di $\Delta ABHC$.

→ $A'H$ è un diametro!

⟹ $\widehat{HPA'}$ è retto

⟹ A, P, A' sono allineati

INCERCHI ED EX-CERCHI



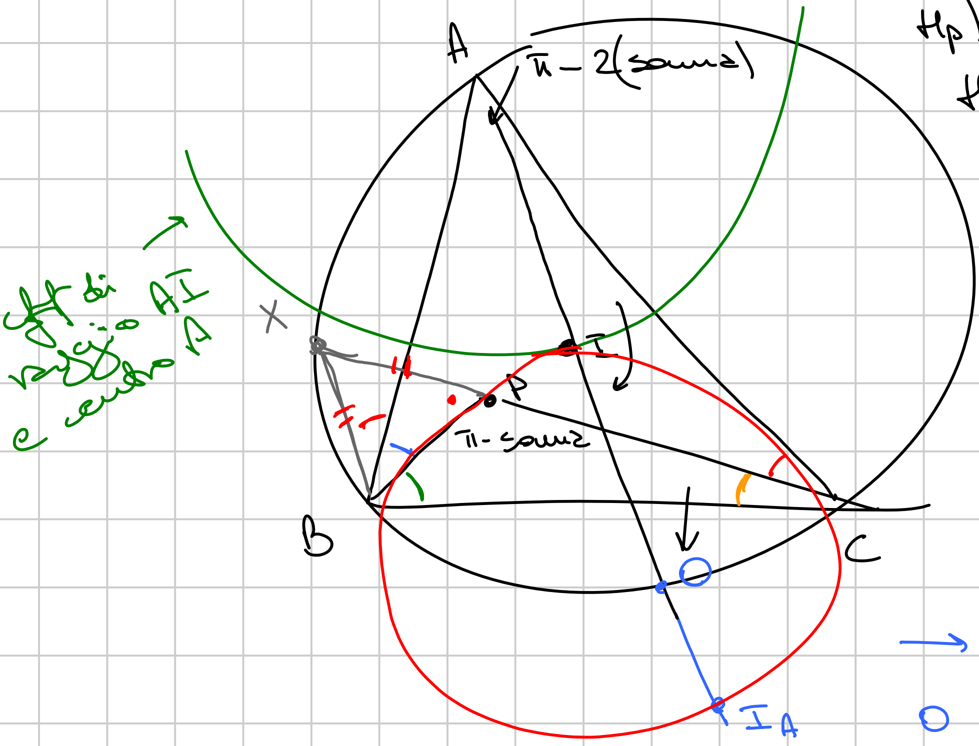
• bisettrice int ed esterna sono ⊥

→ Quindi, $\odot ABC$ è per $\Delta I_A I_B I_C$ la crf di Feuerbach

⟹ N è pt medio del segmento $I_B I_C$

⟹ M è il centro della CRF ROSSA!

Problema. IMO 2006



Hp) $P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B$

Th) $AP \geq AI$

e c'è $=$ $\iff P = I$

$B\hat{I}C = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$

$= \pi -$ somma

→ BPIC è ciclico

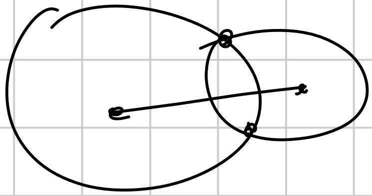
→ $P \in \odot BIC$

O è il centro di $\odot BIC$

tesi ⟸ CRF verde tangente a CRF rossA

AO è retta dei centri e passa per l'intersezione

⟹ tangenza!

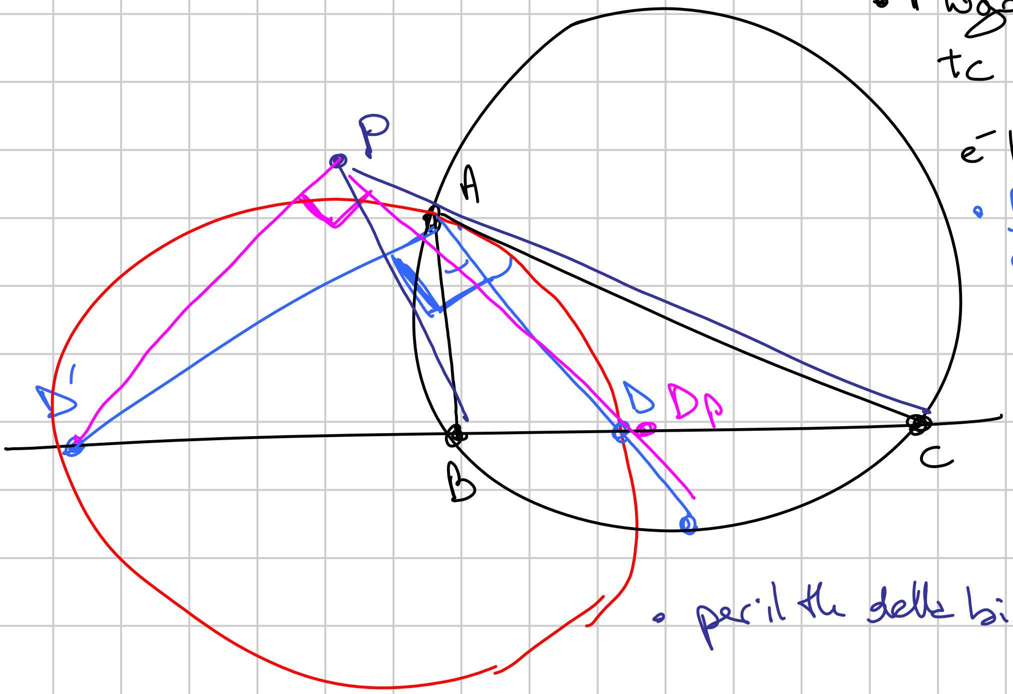


CIRCONFERENZA DI APOLLONIO

• il luogo dei punti P tc $\frac{BP}{CP} = \frac{BA}{CA}$ è la crf di diametro DD'

• $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$ per th delle bis

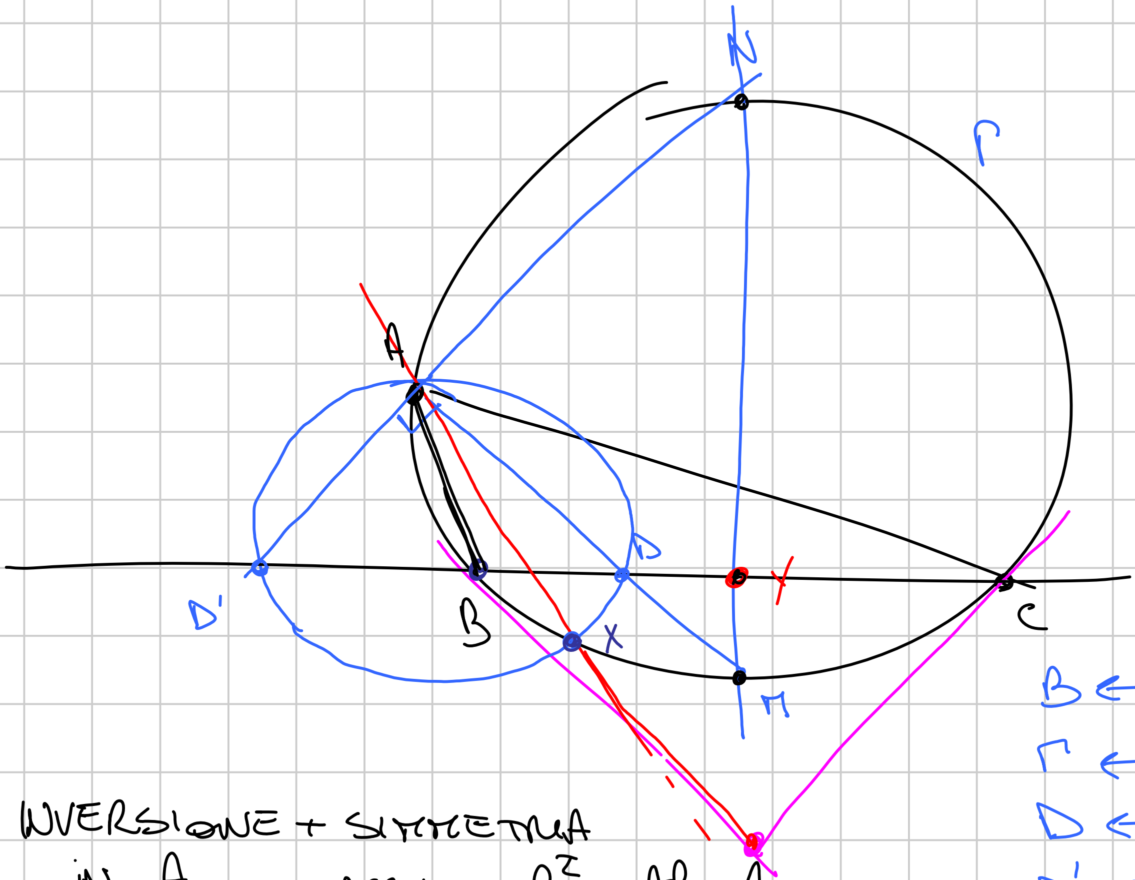
e lo stesso per D' piede della bis. esterna



• per il th delle bis Dp piede della bis soddisf $\dfrac{BD_P}{CD_P} = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BD}{CD}$

$\longrightarrow D = D_P$

$\longrightarrow P \in$ crf rossa



B ⟷ C

Γ ⟷ BC

D ⟷ M

D' ⟷ N

crf di Ap. ⟷ NM, diametro delle circsub

• INVERSIONE + SIMMETRIA IN A DI RAGGIO $R^2 = AB \cdot AC$

⟶ AX è la simmediana di ABC in A

X ⟷ Y

AX ⟷ AY mediana

1. $\triangle ABC$ un triangolo, D, E, F i piedi delle altezze, H ortocentro dimostrare che H è l'incentro di $\triangle DEF$

2. $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ circonferenze di raggi $6, 3, 2$ risp. Γ_1, Γ_2 tangenti esternam. in A. Γ, Γ_1 e Γ, Γ_2 tangenti internamente in A_1 e A_2.
Determinare il raggio di $\odot AA_1A_2$.

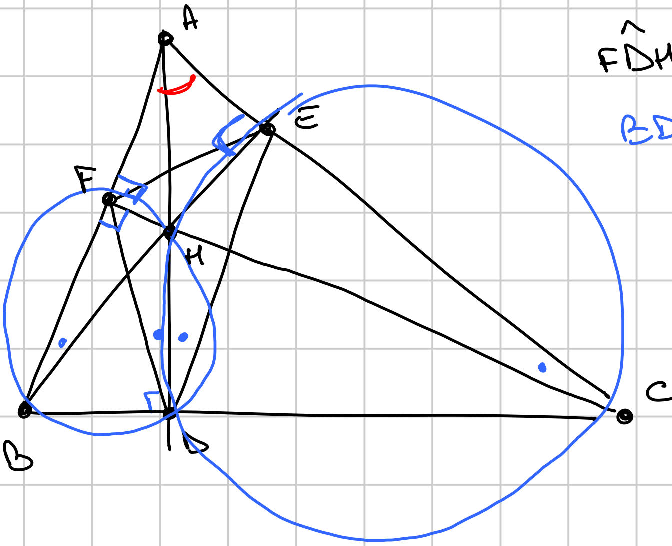
3. $\triangle ABC$ un triangolo, P pt sulla circoscritta. Dimostrare che le riflessioni di P rispetto i lati giacciono su una retta che passa per l'ortocentro H di $\triangle ABC$.

4. $\triangle ABC$ triangolo acutangolo, D, E, F piedi delle altezze (di A, B, C risp.)
$\omega = \odot AEF$, ω_1, ω_2 crf per D tangenti a ω in E, F risp.
Dimostra che ω_1 e ω_2 si incontrano in un punto $P \in BC$ (diverso da D).

5. Tre punti A, B, C sono fissati su una retta in quest'ordine. Γ una crf passante per A e C. P intersezione delle tangenti a Γ per A e C.
$\Gamma \cap PB = Q$. Dimostra che l'int. della bisettrice di $A\hat{Q}C$ con AC non dipende dalla scelta di Γ.

6. $\triangle ABC$ ha perimetro 4. X, Y sono scelti sulle semirette AB, AC in modo che $AX = AY = 1$. I segmenti BC e XY si int. in M.
Dimostrare che il perimetro di $\triangle ABM$ o quello di $\triangle ACM$ è 2.

1. $\triangle ABC$ un triangolo, D, E, F i piedi delle altezze, H ortocentro
dimostrare che H è l'incentro di $\triangle DEF$



$\widehat{FDH} = \widehat{FBH} = \pi/2 - \widehat{BAC}$

$BDHF$ è ciclico

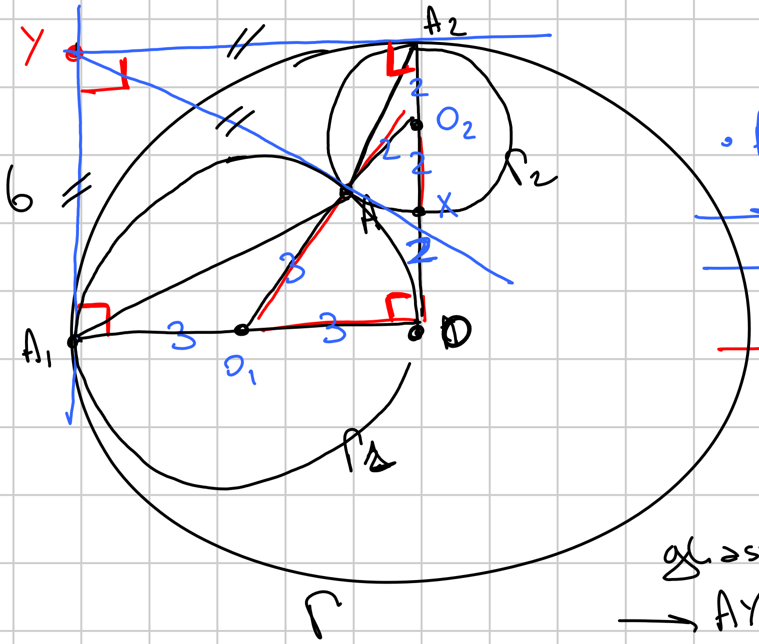
$= \widehat{ACF}$

$= \widehat{HDE}$

$\rightarrow DH$ bisettrice di $\widehat{EDF}$

$\rightarrow$ la tesi per simmetria

2. $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ circonferenze di raggi $6, 3, 2$ risp. Γ_1, Γ_2 tangenti esternam. in A. Γ, Γ_1 e Γ, Γ_2 tangenti internamente in A_1 e A_2.
Determinare il raggio di $\odot AA_1A_2$.



• $A_2 O_2 O$ allineati

$\rightarrow OX = 2$

$\rightarrow O_1 O O_2$ è retto

$\rightarrow YA_1OA_2$ rettangolo

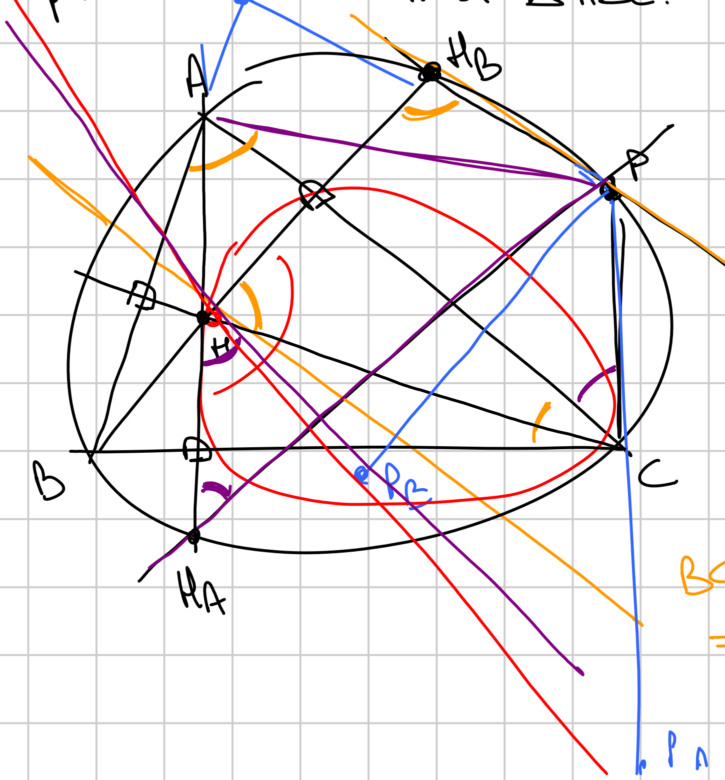
gli assi radicali concorrono

$\rightarrow AY$ è tangente a Γ_1 e Γ_2

$YA_1^2 = YA^2 = YA_2^2$

$\rightarrow$ il centro di $\odot AA_1A_2$ è Y e il raggio è 6

3. ΔABC un triangolo, P pt sulla circoscritta. Dimostrare che le riflessioni di P rispetto i lati giacciono su una retta che passa per l'ortocentro H di ΔABC.



Faccio vedere che se rifletto H_BP per AC e H_AP per BC ottengo la stessa retta

$H_A\hat{H}H_B = \boxed{\pi - \hat{C}}$

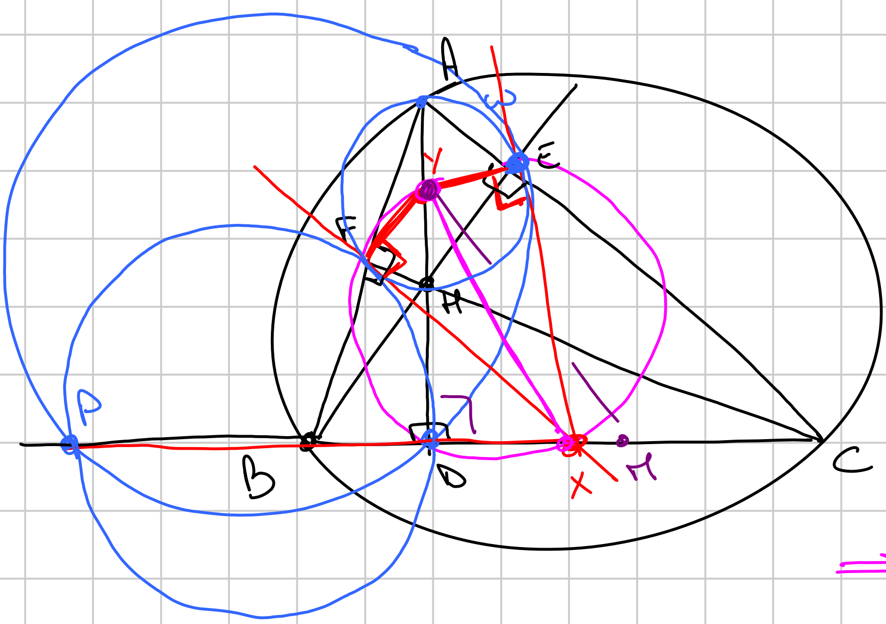
BCPA ciclico

$\Rightarrow (\hat{C} + \bullet) + \bullet = \pi$

4. ΔABC triangolo acutangolo, D, E, F piedi delle altezze (di A, B, C risp.)

$\omega = \odot AEF$, ω_1, ω_2 crf per D tangenti a ω in E, F risp.

Dimostra che ω_1 e ω_2 si incontrano in un punto $P \in BC$ (diverso da D).



tesi $\Longleftrightarrow$ $X \in BC$

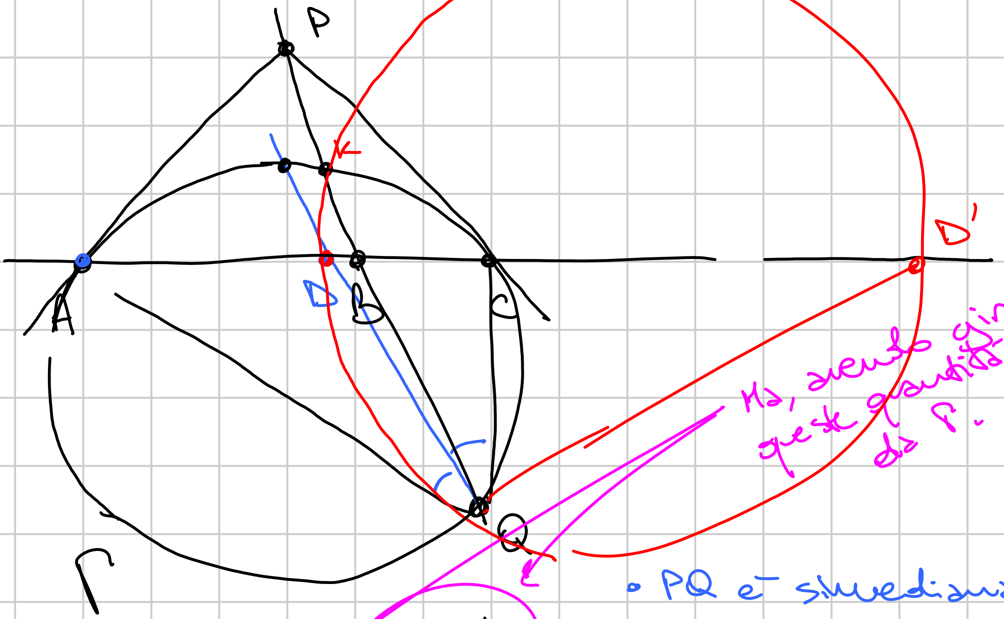
claim: X pt medio di BC

dalle tangenti trovo che $Y\hat{E}X = Y\hat{F}X = \pi/2$

$\rightarrow$ FYEX è ciclico è Feuerbach

$\Rightarrow$ X è il pt. diam. opposto su Feuerbach a Y

5. Tre punti A, B, C sono fissati su una retta in quest'ordine. Γ una crf passante per A e C. P intersezione delle tangenti a Γ per A e C. $\Gamma \cap PB = Q$. Dimostra che l'int. della bisettrice di $A\hat{Q}C$ con AC non dipende dalla scelta di Γ.



Ma, avendo girato il problema, queste quantità non dipendono da Γ.

• PQ è simmediana di $\overset{\triangle}{AQC}$ per il lemma della simmediana

→ traccio la crf di apollonio in Q di $\overset{\triangle}{AQC}$.

B ∈ asse radicale

$\Longleftrightarrow$ $Pow_\Gamma B = Pow_{Ap} B = BD \cdot BD'$

$\parallel$

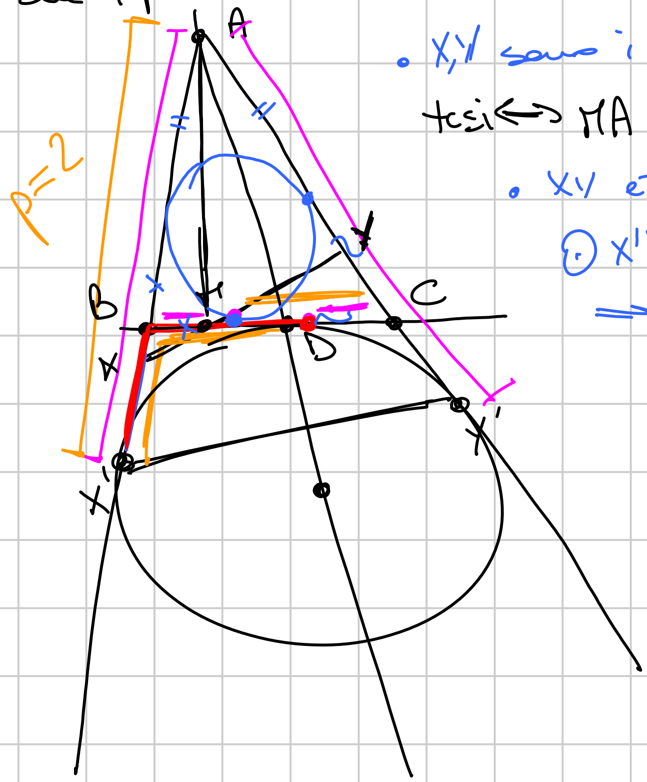
$AB \cdot BC$

tesi $\Longleftrightarrow$ AQ/QC costante

voglio mostrare che Q sta sempre su Apollonio

$\Updownarrow$ B sta sull'asse radicale delle crf Γ e Apollonio

6. △ABC ha perimetro 4. X, Y sono scelti sulle semirette AB, AC in modo che AX = AY = 1. I segmenti BC e XY si int. in M. Dimostrare che il perimetro di △ABM o quello di △ACM è 2.



• X, Y sono i pt. medi di AX', AY'.

tesi $\Longleftrightarrow$ MA = MD

• XY è asse radicale delle crf

⊙X'DY', ⊙A

$\Longrightarrow MA^2 = MD^2$