Gallo

N2 - Basic   EQUAZIONI DIOFANTEE

Titolo nota   06/09/2023

- Un'equazione qualunque $x^2+y^2=z^2$

  $5^x 7^y + 4 = 3^z$

  $k! = (2^n-1)(\dots)(2^n-2^{n-1})$

  che vogliamo risolvere nei numeri interi si dice DIOFANTEA

  $y^2 = x^{37}+1$

- TECNICHE DI BASE: fattorizzare,
  mod p,
  disuguaglianze,
  discesa infinita
  $\Delta = \square \dots$
  LTE
  vieta jumping
  Mordell

- EQ. D. NOTE:
  1. $Ax+By=C$
  2. QUADRATICHE
  3. Pell
  4. Thue
  5. Curve ellittiche

EQ. LINEARI

$Ax + By = C$

$7x + 13y = 25$

$7x + 13y = 26$

$x = 13x'$

$13x' + 26y = 7$

$7x_1 + 13y_1 = 0$

$7x_0 + 13y_0 = C$

$7(x_0 + x_1) + 13(y_0 + y_1) = C$

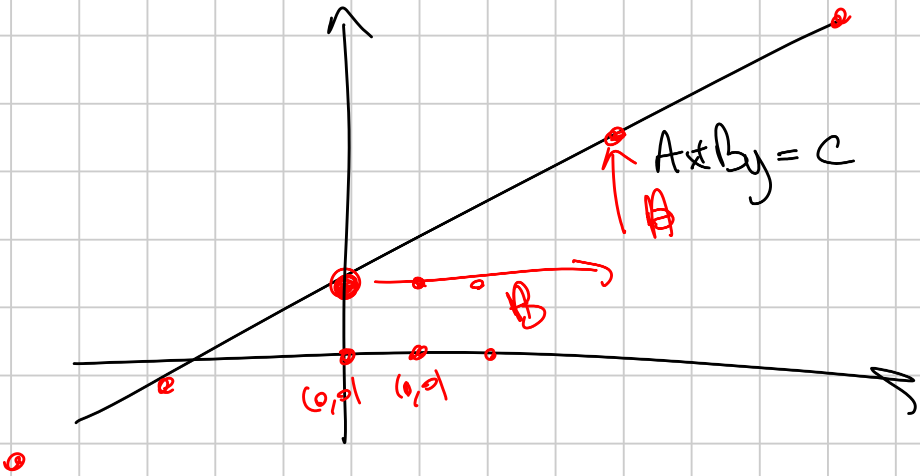
Teorema di Bezout

- $\exists$ interi x, y tc $Ax + By = \text{MCD}(A, B)$
- Se $\text{MCD}(A,B) \mid C$ allora trovo una sol.

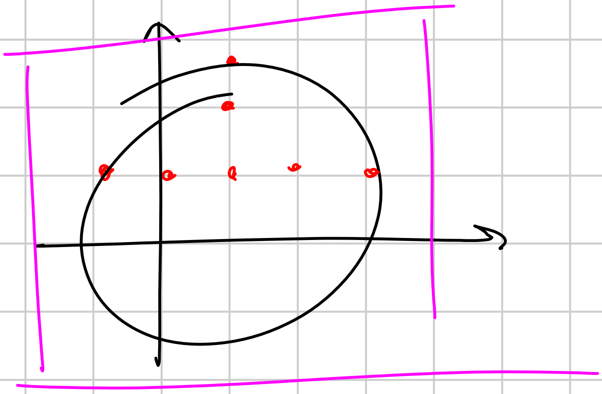
Uso alg. di Euclide per trovare x e y

trovo (x_0, y_0) tc $Ax_0 + By_0 = C$

- $(x_0 + 13k,\ y_0 - 7k)$ sono tutte le soluzioni



II grado



ELLISSE

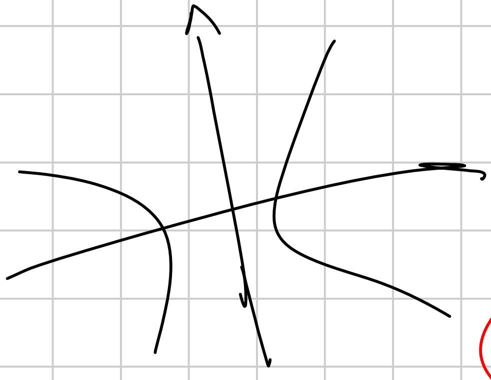
• $aX^2+bY^2=c$

finiti pt. → coordinate
intere

• PARABOLA

$y = Ax^2 + Bx + C$

infinite sol.



• IPERBOLE

$Ax^2 - By^2 = C$

• succede $\underbrace{(x-y)}\underbrace{(x+y)} = C$

→ finiti casi

oppure è un'equazione di Pell

$x^2 - Dy^2 = 1$

→ infinite soluzioni

AL MEDIUM

Problema 1. [TF ?]

$$9^a + 3^a - 2 = 2p^b, \quad \text{con } a,b \text{ int. pos e } p \text{ primo}$$

mod 3 $p^b \equiv 1$

$(a=1, b=1, p=5)$

$$p(t) = t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1)$$

si fattorizza

$$(3^a+2)(3^a-1) = 2p^b$$

$$\begin{cases} 3^a - 1 = 2\cancel{p^x} \\ 3^a + 2 = p^y \end{cases} \longrightarrow a = 1$$

$$(3^a - 1, 3^a + 2) = (3^a - 1, 3) = (-1, 3) = 1$$

sono coprimi!

Problema 2. Trovare tutte le coppie (m, n) di naturali tc

$$m(n+3) = n^4 + 2016$$

$$m = \frac{n^4 + 2016}{n+3} \quad \text{quando è intero?}$$

$+3n^3 - 3n^3$

$$= \frac{n^3(n+3) - 3n^3 + 2016}{} = n^3(n+3) - 3n^2(n+3) + 9n^2 \text{ — } + 2016$$

$$= \frac{n^3(n+3) - 3n^2(n+3) + 9n(n+3) - 27(n+3) + 81 + 2016}{(n+3)}$$

$$= \left[n^3 - 3n^2 + 9n - 27\right] + \frac{81 + 2016}{n+3}$$

sempre intero

Quando $\frac{2097}{n+3}$ è intero?

mi basta trovare i divisori di 2097

[EGMO]

Problema 3. Trovare tutti gli interi a, b per cui

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$ assume valori interi per 3 valori consecutivi di n

$-n^5 \equiv a \mod b$

$(n-1)^5 + a \equiv 0 \mod b$

$n^5 + a \equiv 0 \mod b$

$(n+1)^5 + a \equiv 0 \mod b$

1 5 10 10 5 1

$\rightarrow [(n+1)^5 + \cancel{a}] - [(n-1)^5 + \cancel{a}] \equiv 0 \mod b$

$\cancel{10}n^4 + 2\cancel{0}n^2 + 2 \equiv 0 \mod b$

$[(n+1)^5 + a] - (n^5 + a) \equiv 0$

$2(\cancel{5}n^4 + 10n^3 + \cancel{10}n^2 + 5n + 1) \equiv 0 \mod b$

$20n^3 + 10n \equiv 0 \mod b$

$10\cancel{n}(2n^2 + 1) \equiv 0 \mod b$

$10(2n^2+1) \equiv 0 \mod b$

$(n, b) = 1$ coprimi!

$20n^2 + 10$

$(n^5 + a) - ((n-1)^5 + a) = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$

$20n^4 - 40n^3 + 40n^2 - 20n + 4$

$-n^2(20n^2 + 10)$

$-40n^3 + 30n^2 - 20n + 4$

$+2n(20n^2+10)$

$\rightarrow q(n) \equiv 0 \mod b$

$\deg(n) = 1$

$An + B \equiv 0 \mod b$

$20n^4$

$\rightarrow b = \pm 2, \pm 11, \pm 1, \pm 22$

$\rightarrow 30n^2 + 8$

$-3(20n^2 + 10)$

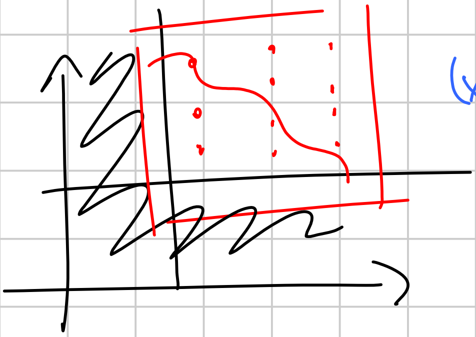
$= 8 - 30 = -22 \equiv 0 \mod b$

$\mod 4$

se lo rifacciamo otteniamo $C \equiv 0 \mod b$

Problema 4. Risolvere $x^3+y^3 = x^2+42xy+y^2$ negli interi positivi

per x,y grossi $\geq$



$(x+y)(x^2-xy+y^2) = (x^2+42xy+y^2)$

WLOG $x \geq y \geq 1$

$x^2+42xy+y^2 \leq 44x^2 \leq x^3 < x^3+y^3$

$44 \leq x$

Simmetrica nelle variabili

$A = x+y$, $B = xy$

$A^3 - 3AB = A^2 + 40B$!!

$t^2 - At + B$

$B(\cancel{40}-3A) = \dfrac{-A^2+A^3}{+40+3A}$ intero?

$= \dfrac{A^3-A^2}{3A+40}$

$3B = \dfrac{3A^3-3A^2}{3A+40} = \dfrac{}{} = [\quad] + \dfrac{?}{3A+40}$

$27B$

$3A+40 \mid$ NUMERO $= 68\,800$

Problema 5. Risolvere negli interi

$\left[\frac{\varphi(n)}{3} = \#\text{ residui cubici}\right]$

$$y^3 = x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+7)^3$$

$x \to x-3$

$$y^3 \equiv x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+7)^3 \mod 8$$

$1^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$= (x-3)^3 + \ldots + (x+4)^3$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 3(3^2+2^2+1^2+0+1^2+2^2+3^2+4^2)x + 64$$

$$y^3 = 8x^3 + 12x^2 + 132x + 64$$

$$y^3 = (2x+1)^3 + 126x + 63$$

$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

lui è più piccolo della diff. di due cubi succ!

$(2x+1)^3 < y^3 < (2x+2)^3$

$(2x)^3 < \quad (2x+1)^3$

$0 < 126x + 63 \qquad < 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$

$-\frac{1}{2} < x$

$0 < 12x^2 - 108x - 56$

$-0{,}5 \qquad 9{,}50$

$$x \geq 10$$

$x \mapsto -x$

$y \mapsto -y$

$$y^3 = (-x-3)^3 + (-x-2)^3 + \ldots$$

$$= -\left[(x+3)^3 + (x+2)^3 + \ldots\right]$$

$\longrightarrow -10 \leq x \leq 10$ potrebbero esserci sol. solo qui

Problema 6 [IMO − 2019 − 4] Trovare (k,n) interi pos t.c.:

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})$$

$2(2^{n-1})$

• IDEA: guardo i fattori 2 ?

l'esponente di 2 nella fatt. di quel numero

$$\to v_2(k!) = v_2(k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 1)$$

$$= \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + \_\_$$

$$\leq \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{8} < k$$

$$v_2(RHS) = 0 + 1 + 2 + \ldots + n-1 = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$\longrightarrow k \sim \frac{n(n-1)}{2}$$

• $$k! = \underbrace{(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})}_{<2^n \cdot 2^n \cdot 2^n \cdots 2^n} < (2^n)^n = 2^{n^2}$$

$$2^{n^2} < \left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right)! < k!$$

$k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k}$ Stirling

eventualmente $k! > 2^k$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$$

$$\vee \quad \vee \quad \vee\vee$$

$$2^k = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2 \cdots 2}_{k \text{ volte}}$$

$2^n < n!$

$$2^{n^2} < \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]!$$

$n=2 \qquad 2^4 \overset{?}{<} 1! = 1$

$n=6 \qquad \dfrac{2^{36}}{8} \overset{?}{<} 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \left(\dfrac{12}{8}\right) \cdot \left(\dfrac{11}{8}\right) \cdot \left(\dfrac{10}{8}\right) \text{---}$

ip induttiva $2^{n^2} < \left(\dfrac{(n-1)n}{2}\right)!$

$\rightarrow$ step induttivo $2^{2n+1} < \left(\dfrac{(n-1)n}{2}+1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$

$2 \cdot 4^n$

sono n numeri e se sono tutti più grandi di 4 ho finito

1. (x,y) interi positivi, p primo tc $x^5+x^4+1=p^y$

2. (x,y) interi tc $x^3+y^4=7$

3. Per quali primi p il polinomio $x^2+px-444p$ ha radici intere?

4. Trovare n interi positivi per cui $n^2-85n+2017$ è un quadrato perfetto

5. Trovare soluzioni intere positive (x,y) di $x^3-y^3=xy+61$

6. Trovare tutte le funzioni $f:\mathbb{N}_{>0}\to\mathbb{N}_{>0}$ tc
$n+f(m) \mid f(n)+nf(m) \quad \forall n,m\in\mathbb{N}_{>0}$

1. $\underbrace{x^5+x^4+1}=p^y$ $\longrightarrow$ ω radice 3- dell'unità

$\omega^3=1$

$(\omega-1)(\underline{\omega^2+\omega+1})$

$\omega^5+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=0$

$$\underbrace{(x^2+x+1)}_{p^a}\underbrace{(x^3-x+1)}_{p^b}=p^y$$

$$\begin{aligned}MCD(x^3-x+1,\ x^2+x+1) &= MCD(-x^2-2x+1,\ x^2+x+1)\\ &= MCD(-x+2,\ x^2+x+1)\\ &= MCD(-x+2,\ 3x+1)\end{aligned}$$

$= \gcd(-x+2, 7) \mid 7$

$\longrightarrow p = 7$ $\qquad \longrightarrow p \neq 7.$ $\quad x^2+x+1 = \pm 1$ $\quad x =$

$x^3 + x + 1 = \pm 1$

$x^2+x+1 = 7$ $\qquad x^2+x-6=0$

$x^3+x+1 = 7$ $\qquad (x+3)(x-2)=0$

$x^2+x=0 \qquad x = 0, -1$

$x^2+x+2 \qquad (0,0)$

$(-1,0)$

$x=2$ ✓

$x^3-x-6=0$ $\qquad x^2(x-2)$

$(x-2)\left(\cancel{x^2+2x+3}\right) = 0$

2\. $x^3 + y^4 = 7$ mod 13 $\qquad p \quad t.c.\ 12 \mid \phi(p) = p-1$

$0^3 = 0$

$1^3 = 1 \qquad 12^3 = (-1)^3 = -1 = 12$

$2^3 = 8 \qquad 11^3 = -8 = 5$

$3^3 = 1$

$4^3 =$

$\phi(p)$

3

$x^3 = 0, 1, 5, 8, 12$

$y^4 = 0, 1, 3, 9$

$0^4 = 0$

$1^4 = 1$

$2^4 = 3$

$3^4 = 3$

$4^4 = 9 = 2^4 \cdot 2^4$

3\. $x^2 + px - 444 \cdot p \longrightarrow \Delta = \square$

$p^2 + 4 \cdot 444 p = y^2$

$p(p + 4 \cdot 444) = y^2 = (py_1)^2 = p^2 y_1^2$

$4 \cdot 111$

$p + 4 \cdot 444 = p \cdot y_1^2$

$p = 2, 3, 37$

4. $n^2 - 85n + 2017 = m^2$ iperbole

$4n^2 - 4\cdot 85\cdot n + 2017\cdot 4 = 4m^2$

$(2n-85)^2 - 4m^2 = 85^2 - 4\cdot 2017$ 7225

$(2n-85-2m)(2n-85+2m) = -843 = -3\cdot 281$

$\begin{cases} 2n - 2m - 88 = 1 \\ 2n + 2m - 85 = \dfrac{-3\cdot 281}{1} \end{cases}$

5. $x^3 - y^3 = xy + 61$ $A = x-y$, $B = xy$

$A^3 + 3BA = B + 61 \longrightarrow B = \dfrac{61 - A^3}{3A-1}$

$(x-y)^3 + 3xy(x-y)$

$x^3 - \cancel{3x^2y} + \cancel{3xy^2} + y^3 + 3\cancel{x^2y} - \cancel{3xy^2}$

$3B = \dfrac{3\cdot 61 - 3A^3}{3A-1} = ⊖ \dfrac{A^2(3A-1) + A^2 - 3\cdot 61}{3A-1}$

$9B = \text{———} \dfrac{A(3A-1) + A - 9\cdot 61}{3A-1}$

$27B = \text{———} \dfrac{+3A - 27\cdot 61}{3A-1}$

$\dfrac{+27\cdot 61 - 1}{3A-1} = 1646 = 2\cdot 823$

1646	2
824	2
412	2
206	2
103	

$3A-1 \mid 2\cdot 823$

$n+1 \quad 1 \quad 1+n$

6. $n + f(m) \mid f(n) + n f(m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}_{>0}$

$n + m^2 \mid n^2 + nm^2 = n(n+m^2)$

$f(n) = n^2$

$f \equiv 1$

- $\dfrac{f(n) + n f(m) + n^2 - n^2}{n + f(m)}$ intero

$\iff \dfrac{f(n) + n(f(m)+n) - n^2}{n + f(m)} \qquad 0 < \left|\dfrac{c}{n}\right| < 1$

$\iff \dfrac{f(n) - n^2}{n + f(m)}$ intero $\quad \forall n, m$

fisso n e faccio variare m

$n = 31$

- f è limitata

$0 < f(m) \le M$

- $f(n) - n^2 = 0$

cioè $f(n) = n^2$ ✓

- $\dfrac{f(n) + n f(m) + f(m)^2 - f(m)^2}{n + f(m)}$ è int.

$f(m)(n + f(m))$

$\iff \dfrac{f(n) - f(m)^2}{n + f(m)}$ è int

se f è lim.

allora NON assume finiti valori.

MA IL DENOMINATORE PRENDE VALORI ARB. GRANDI

$f(n) = f(m)^2 \quad \forall n, m$

$\Rightarrow f = 1$