Successioni per ricorrenze lineari

es. $\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$

(*) $a_{n+k} = \alpha_{k-1} a_{n+k-1} + \alpha_{k-2} a_{n+k-2} + \dots + \alpha_0 a_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

se $\{a_n\}$ soddisfa una condizione (*) allora anche $\lambda\{a_n\}$ soddisfa (*)
se $\{a_n\}, \{b_n\}$ soddisfano (*), soddisfa anche $\{a_n + b_n\}$

$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

Definiamo $zA := (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

$z^2 A := (a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$

$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n \iff z^2 A = \alpha z A + \beta A$

$\iff \underbrace{(z^2 - \alpha z - \beta)}A = 0$

Se λ_1, λ_2 sono gli zeri del pol. $z^2 - \alpha z - \beta$, posso scrivere (magia)

$(z - \lambda_1)\underbrace{(z - \lambda_2)A} = 0$

$(z - \lambda_2)\underbrace{(z - \lambda_1)A} = 0$

In part., se $(z - \lambda_1)A = 0$ o $(z - \lambda_2)A = 0$, allora A soddisfa la relazione per ricorrenza

$(z - \lambda_1)A = 0 \iff zA = \lambda_1 A$

$$zA = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots)$$
$$\lambda_1 A = (\lambda_1 a_0 \quad \lambda_1 a_1 \quad \lambda_1 a_2 \quad \dots$$

cioè le successioni che soddisfano $(z-\lambda_1)A=0$ sono quelle del tipo $(C, \lambda_1 C, \lambda_1^2 C, \lambda_1^3 C, \dots)$

Quindi $(C, \lambda_1 C, \lambda_1^2 C, \dots)$ soddisfa $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ per ogni C, e anche

$$(D, \lambda_2 D, \lambda_2^2 D, \dots)$$

$\to$ sol. generale: $a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$ (sol. generale)

sol. generale + condizioni iniziali
$\to$ determinare C, D $\to$ (sol. particolare)

es: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
$$F_n = C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Versioni più sofisticate: $\begin{cases} F_0 = 1 \\ \lim_{n\to\infty} F_n = 0 \end{cases}$ $\to$ $C=0$, $D=1$

Perché la "trasformata z" funziona?

$$A = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots$$

Radici multiple:

$p(z)A = 0$, dove p è un polinomio con radici multiple, ad es. $(z+1)^2(z-2)^3 = p(z)$

Cosa cambia? Le successioni A che soddisfano $(z+1)^2 A = 0$

sono di più di quelle che soddisfano $(z+1)A=0$

<u>Teo</u>: le successioni che soddisfano $(z-\lambda)^{\boxed{k}}A=0$ sono tutte e sole quelle del tipo $a_n=\lambda^n q(n)$, dove q è un polinomio di grado $<\boxed{k}$

$(z-\lambda)^2A=0$ sono comb. lineari di $a_n=\lambda^n$
$b_n=n\cdot\lambda^n$

<u>ES</u>: $\boxed{\lambda=1}$ Le successioni che soddisfano

$(z-1)A=0 \iff a_{n+1}=a_n \to$ costanti

$(z-1)^2A=0 \iff a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0 \to$ polinomi di grado 0 o 1

$(z-1)^3A=0 \iff a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=0 \to$ polinomi di grado 0, 1, 2

Successioni lineari con "termine noto" (non omogenee)

<u>es</u>: $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n+2^n \qquad n=0,1,2,\dots \qquad (**)$

<u>Idea</u>: Date due successioni che soddisfano $(**)$, chiamiamole $\{F_n\}$ e $\{G_n\}$, la successione $F_n-G_n=H_n$ soddisfa

$$H_{n+2}=F_{n+2}-G_{n+2}=F_{n+1}+F_n+\cancel{2^n}-(G_{n+1}+G_n+\cancel{2^n})$$
$$=H_{n+1}+H_n \qquad \text{(omogenea)}$$

$\to$ soluzione della stessa equazione senza il "termine noto"

Quindi $H_n=C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Se so trovare <u>una</u> successione G_n particolare che soddisfa $(**)$, allora tutte le altre si scrivono come $\boxed{F_n=H_n+G_n}$

soluzione generale dell'equazione non omogenea

= soluzione generale dell'omogenea più

una soluzione particolare.

Quindi, per la (**), devo trovare una soluzione particolare con condizioni iniziali a mia scelta.

Come la cerco? Proviamo $G_n = 2^n \cdot k$

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n + 2^n \iff 2^{n+2} k = 2^{n+1} k + 2^n k + 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff 2^2 k = 2k + k + 1 \iff \boxed{k=1}$$

Cioè, $k=1$, $\boxed{G_n = 2^n}$ soddisfa (**) (con cond. in. $G_0 = 1$, $G_1 = 2$)

In particolare, posso concludere che tutte le successioni F_n che soddisfano (**) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n + 2^n$ sono della forma

$$F_n = \underbrace{C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\text{sol. generale della omogenea}} + \underbrace{2^n}_{G_n,\ \text{sol. part. della non omogenea}}$$

Se ho un termine noto del tipo α^n, allora conviene cercare sol. particolari della forma $k \cdot \alpha^n$

Questo metodo funziona sempre, a meno che α^n sia già di suo una sol. particolare della omogenea

<u>ES</u>:

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$$

Come trovo una sol. particolare di?

$$C_{n+2} = 3C_{n+1} - 2C_n + 2^n$$

Se provo a cercare una soluzione della forma $C_n = k \cdot 2^n$:

$$k\cdot 2^{n+2} = 3\cdot k\cdot 2^{n+1} - 2\cdot k\cdot 2^n + 2^n \iff k\cdot 4 = k\cdot 6 - k\cdot 2 + 1$$

$0=1$ impossibile!

Quando sono in queste condizioni, la soluzione è alzare i gradi: cerco $C_n = 2^n\cdot(p_1 n + p_0)$

$$2^{n+2}(p_1(n+2)+p_0) = 3\, 2^{n+1}(p_1(n+1)+p_0) - 2\cdot\cancel{2^n}(p_1 n+p_0) + \cancel{2^n} \quad \forall n$$

$$4(p_1(n+2)+p_0) = 3\cdot 2\cdot(p_1(n+1)+p_0) - 2(p_1 n+p_0)+1 \quad \forall n$$

$$n(4p_1 - 6p_1 + 2p_1) + 8p_1 - 6p_1 + 4p_0 - 6p_0 + 2p_0 - 1 = 0$$

... trovo p_1, p_0.

Perché funziona questa tecnica? Usiamo trasformate z: Stiamo cercando una successione tale che

$$(z^2-3z+2)\,C = (1,2,4,8,16,\dots)$$

$$(z-2)(z^2-3z+2)\,C = (z-2)(1,2,4,8,16,\dots) = 0$$

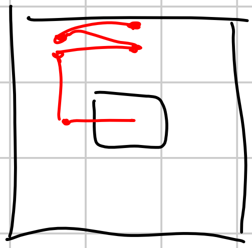
cioè $0 = (z-2)(z^2-3z+2)z\,C = (z-2)^2(z-1)\,C$

$1^n \quad 2^n \quad n\cdot 2^n$

<u>ES</u>: $C_{n+2} = 3C_{n+1} - 2C_n + n^2$, dove cerco una sol. particolare? qual è la generale?

<u>Sistemi di ricorrenze</u>:

Trovare quanti sono i percorsi lunghi n passi su una scacchiera 3×3 che partono dal centro e si muovono su caselle con un lato adiacente



<u>Oss</u>: ci sono molte simmetrie. Posso contare

$A_n = \#\{$ percorsi lunghi n che partono dal centro $\}$

$B_n = \#\{$ percorsi lunghi n che partono da uno spigolo $\}$

$C_n = \#\{$ percorsi lunghi n che partono da un angolo $\}$

C_n	B_n	C_n
B_n	A_n	B_n
C_n	B_n	C_n

$$\begin{cases} A_n = 4B_{n-1} \\ B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1} \\ C_n = 2B_{n-1} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$A_0 = B_0 = C_0 = 1$$

Elimino variabili:

$$B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1} = 4B_{n-2} + 4B_{n-2} = 8B_{n-2}$$

$$A_n = 4B_{n-1} = 4\left(A_{n-2} + 2C_{n-2}\right) = 4A_{n-2} + 8C_{n-2}$$

$$= 4A_{n-2} + 16B_{n-3} = 4A_{n-2} + 4A_{n-2} = 8A_{n-2}$$

$$(z^2 - 8)A = 0 \qquad = \pm\sqrt{8}$$

$$A_n = u\cdot(\sqrt{8})^n + v(-\sqrt{8})^n$$ devo trovare u, v dai valori iniziali

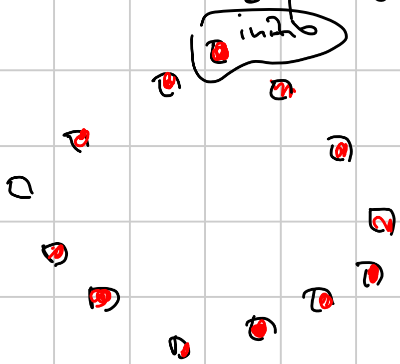
---

$$\begin{cases} A_n = 4B_{n-1} \\ B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1} \\ C_n = 2B_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} zA - 4B = 0 \\ zB - A - 2C = 0 \\ zC - 2B = 0 \end{cases}$$

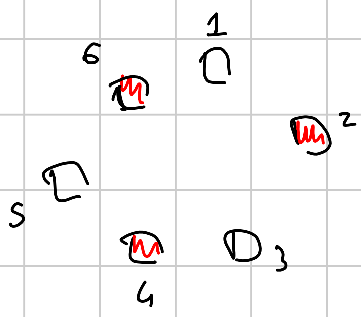
$$\underbrace{\begin{bmatrix} z & -4 & 0 \\ -1 & z & -2 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}}_{\det = 0} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0$$

Problema di Josephus



13 → posizione 11

Dato il numero di stagisti n, come trovo la posizione in cui mettersi per salvarmi?

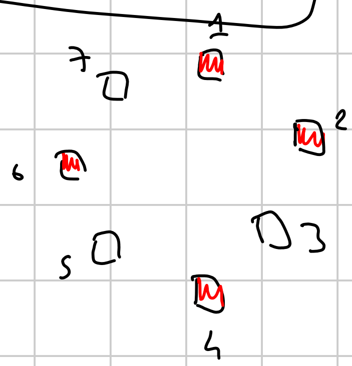


Se $n = 2m$ è pari, posso ridurmi al caso m

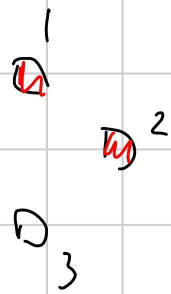
$f(n) = \{$posizione che si salva tra n stagisti$\}$

$$\boxed{f(2n) = 2f(n) - 1}$$

Se n dispari:



$$\boxed{f(2n+1) = 2f(n) + 1}$$



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	-			16
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

$$f(2^m + k) = 1 + 2k \qquad \text{se } 1 \le k < 2^m$$

Supponiamo vero fino a 2^m

$$f(2^m + k) = \begin{cases} k \text{ pari}: \ 2f\left(2^{m-1} + \frac{k}{2}\right) - 1 = 2\cdot\left(1 + 2\frac{k}{2}\right) - 1 = 1 + 2k \\ \end{cases}$$

$$f(1011_2) = 111_2$$

Josephus's problem

$$f(1100_2) = 1001_2$$

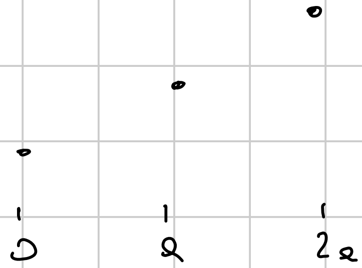
IMO2019/A1 $\quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \qquad \forall a, b \qquad P(a,b)$$

$P(a,0)$: $f(2a) + 2f(0) = f(f(a))$

$P(0,b)$: $f(0) + 2f(b) = f(f(b))$

$\Rightarrow \boxed{f(2a)+f(0)=2f(a)}$ $(*)$



Usando queste relazioni,

$$f(2a)+2f(b) = f(f(a+b)) \overset{P(a,a+b)}{=} f(0)+2f(a+b)$$

Con la $(*)$

$$\boxed{2f(a)-f(0)+2f(b)=f(0)+2f(a+b)} \qquad (***)$$

$$\cancel{2}f(a)+\cancel{2}f(b) = \cancel{2}f(0)+\cancel{2}f(a+b)$$

$$g(x)=f(x)-f(0) \qquad f(x)=g(x)+f(0)$$

$$g(a)+\cancel{f(0)}+g(b)+\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)}+g(a+b)+\cancel{f(0)} \rightarrow \text{Cauchy}$$

Oppure: rifaccio dim. Cauchy a partire dalla $(***)$

Varianti di Cauchy:

es: $f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{Q},\ y\geq 0$

es: $f(x+y+1)=f(x)+f(y)+f(1) \quad \forall x,y\in\mathbb{Q}$

es: $f(a)+f(d)=f(b)+f(c) \quad \forall\ a,b,c,d$ in progr. aritmetica

es: $f(xy)=f(x)f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+$ = reali positivi

Sostituzione 1: $\log f(xy) = \log f(x) + \log f(y)$

$g=\log f \rightarrow g(xy)=g(x)+g(y) \quad \forall x,y$ reali pos.

Sostituisco $x = e^a$, $y = e^b$

$$g(e^{a+b}) = g(e^a) + g(e^b) \qquad \forall a,b \text{ reali}$$

$$h(x) := g(e^x) \qquad h(a+b) = h(a) + h(b) \quad \forall a,b \text{ reali}$$

Se avessi ipotesi in più, potrei concludere che $h(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

"wild"

Cerchiamo tutte le soluzioni di $f(x+y) = f(x) + f(y)$

sull'insieme dei numeri della forma $S = \{a + \sqrt{2}b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$

$f(qx) = q f(x) \quad \forall q \in \mathbb{Q}$.

Per ogni $a,b \in \mathbb{Q}$, posso scrivere

$$f(a+\sqrt{2}b) = f(a) + f(\sqrt{2}b) = a\, f(1) + b\, f(\sqrt{2}) \qquad (4*)$$

Se scelgo $f(1)$, $f(\sqrt{2})$ arbitrariamente, la f definita da $(4*)$ è una soluzione "wild" dell'equazione di Cauchy.

Difatti, se ho $x, y \in S$,
$$x = a + \sqrt{2}b$$
$$y = c + \sqrt{2}d$$
$$x+y = (a+c) + \sqrt{2}(b+d)$$

e sostituendo vedo che la f definita dalla $(4*)$ soddisfa
$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Dettaglio importante: f è ben definita perché $\forall x \in S$ esistono unici a,b t.c. $x = a + \sqrt{2}b$, per irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Dimostriamo che queste soluzioni hanno grafico che è denso nel piano (a meno che siano le soluzione non-wild).

Idea: per ogni scelta di $k \in \mathbb{Q}$, consideriamo i punti della forma $S_k = \{ q(1+k\sqrt{2}), \text{ per } q \in \mathbb{Q} \}$

Sia f una soluzione di $f(x+y) = f(x) + f(y)$ su S.

Per ogni $q \in \mathbb{Q}$, $f(q(1+k\sqrt{2})) = q f(1+k\sqrt{2})$

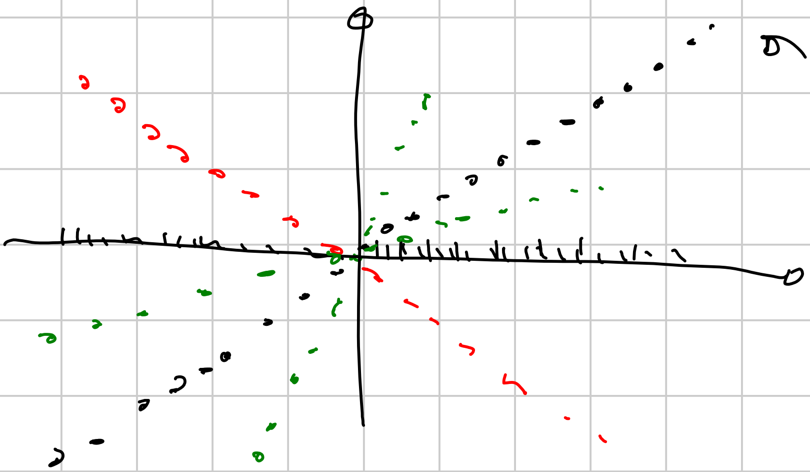


grafico di f su S_k con coeff. ang.

$$\boxed{\frac{f(1+k\sqrt{2})}{1+k\sqrt{2}}}$$

Se la quantità $\dfrac{f(1+k\sqrt{2})}{1+k\sqrt{2}}$ non è costante al variare di k, allora ho altre "rette razionali" nel grafico

Questi coeff. angolari, se non sono costanti, sono densi in tutto $\mathbb{R}$

$$f(1+k\sqrt{2}) = f(1) + k f(\sqrt{2})$$

$$\frac{f(1) + k f(\sqrt{2})}{1+k\sqrt{2}} \qquad \text{per } k \in \mathbb{Q}$$

definiamo $\alpha = \dfrac{1}{1+k\sqrt{2}}$ $\quad 1-\alpha = \dfrac{k\sqrt{2}}{1+k\sqrt{2}}$

$$\frac{f(1) + k f(\sqrt{2})}{1+k\sqrt{2}} = \alpha f(1) + (1-\alpha) \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

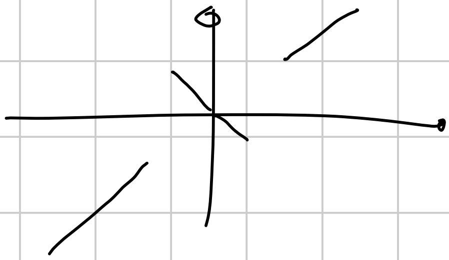
Al variare di k in $\mathbb{Q}$, α varia in un insieme tipo-razionali

---

Molte eq. funzionali hanno soluzioni "wild":

$[f(x)]^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \pm x$



$\boxed{f(f(x)) = x}$ $\quad x \in \mathbb{Z} \quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$a = f(b)$

$b = f(a)$

soluzioni: tutte quelle che ottengo "appaiando" gli interi a 2 a 2 in un modo qualsiasi.

es:

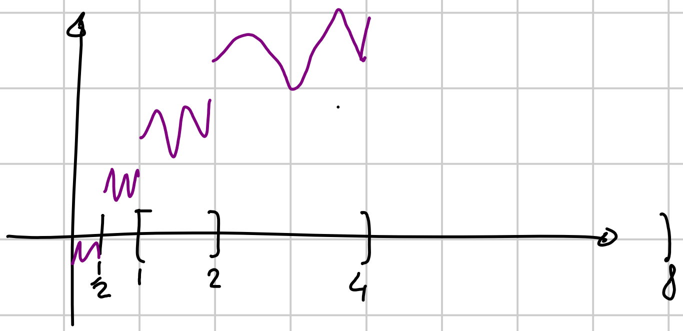
0	1	2	3	4	5	6
1	0	5	3	6	2	4

Trovare $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x^2) = f(x) + 1 \quad \forall x$

$\boxed{g(2x) = g(x) + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Pongo $x = e^y$ con $y > 0$ $\quad f(e^{2y}) = f(e^y) + 1$

Se conosco g su $[1, 2)$, riesco a capire cosa fa su $[2, 4)$



T1 2015: è vero che $f(xy + f(x)) = f(7xy) \quad x, y \in \mathbb{R}$ ha solo le sol. costanti?

Chiedere questa relazione è equivalente a chiedere

$$f(z+f(x)) = f(7z) \qquad \forall z, x \in \mathbb{R}$$

La f deve prendere un po' di valori diversi

<u>Idea</u>: parto dalla funzione di Dirichlet: $f(z) = \begin{cases} 1 & z \notin \mathbb{Q} \\ 0 & z \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Funziona! se $z \in \mathbb{Q}$,

$$0 = LHS = RHS = 0$$

se $z \notin \mathbb{Q}$ $\quad 7z \notin \mathbb{Q} \quad z+1,\ z+0 \notin \mathbb{Q}$

SL 2005 $\quad \overset{P(x,y)}{f(x)f(y) = 2f(x+yf(x))}, \quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

<u>Idea</u>: riesco a fare in modo che $y = x + yf(x)$?

$$y = \frac{x}{1-f(x)}$$

Se $f(x) < 1$, posso prendere $P\left(x, \frac{x}{1-f(x)}\right)$:

$$f(x)\,\cancel{f\left(\frac{x}{1-f(x)}\right)} = 2\cancel{f\left(x + \frac{x}{1-f(x)} f(x)\right)} \Rightarrow f(x) = 2, \text{ assurdo}$$

Quindi, tutti gli $f(x)$ sono ≥ 1 $\qquad \operatorname{Im} f \subset [1, \infty)$

La $P(,)$ ci dice che:

se $a = f(x)$, $b = f(y)$, allora $\frac{ab}{2} = f(\text{qualcosa})$

$$a, b \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \frac{ab}{2} \in \operatorname{Im} f$$

Può essere $1 \in \operatorname{Im} f$? No! se no $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \in \operatorname{Im} f$, imp.

Può essere $c < \sqrt{2} \in \operatorname{Im} f$? No! Se no $\frac{c \cdot c}{2} < 1 \in \operatorname{Im} f$

Può essere $c<2 \in \mathrm{Im}\, f$? No! Se no, $\frac{c}{2} \cdot c \in \mathrm{Im}\, f$

$\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot c \in \mathrm{Im}\, f$, $\left(\frac{c}{2}\right)^k \cdot c \in \mathrm{Im}\, f \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$

e in particolare finirò con avere un valore <1 nell'im, assurdo!

$\Rightarrow$ tutti i valori assunti dalla funzione sono ≥ 2!

$$2f(x) \leq f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \qquad : P(x,y) \quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

Dati x e $z > x$, faccio in modo che $x + yf(x) = z$

$$y = \frac{z-x}{f(x)}$$

$$P\left(x, \frac{z-x}{f(x)}\right): \quad 2f(z) = f(x) f\left(\frac{z-x}{f(x)}\right) \geq 2f(x)$$

$\Rightarrow$ debolmente crescente: $f(z) \geq f(x)$

Se $2 \notin \mathrm{Im}\, f$, allora la disug. è stretta $\Rightarrow f$ strett. crescente e iniettiva

$P(x,y)$ e $P(y,x)$:

$$\cancel{2f}(y + xf(y)) = f(x)f(y) = \cancel{2f}(x + yf(x))$$

iniettività

$$y + xf(y) = x + yf(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$xf(y) - x = yf(x) - y$$
$$\Updownarrow$$
$$x(f(y)-1) = y(f(x)-1)$$
$$\frac{f(y)-1}{y} = \frac{f(x)-1}{x} = \text{costante}$$
$$f(x) = cx + 1 \quad \forall x$$

Sostituisco, e trovo i valori di c che verificano

Cosa succede se $2 \in \operatorname{Im} f$?

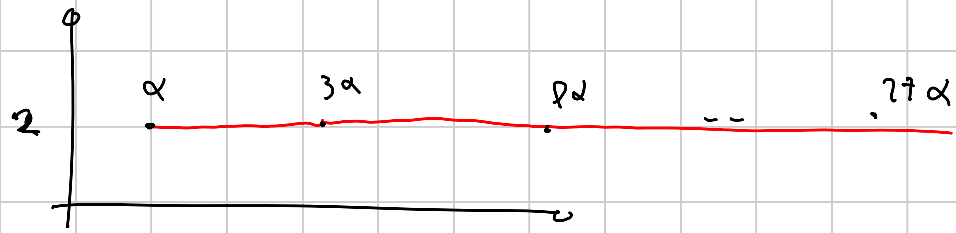
$f(\alpha) = 2$

$P(\alpha, \alpha)$ $\qquad f(\alpha)f(\alpha) = 2f(\alpha + \alpha 2)$

$$4 = 2f(3\alpha)$$

$$\Rightarrow f(3\alpha) = 2$$

$$2 = f(\alpha) = f(3\alpha) = f(9\alpha) = f(27\alpha) = \dots$$



SL 01 $\quad f(xy)\big(f(x) - f(y)\big) = (x-y)f(x)f(y) \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = f(y)$ per $x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y) = 0$,

quindi tutti i valori tranne 0 sono raggiunti una volta sola,

Se prendo x t.c. $f(x) = 0$ (se esiste), allora

$$f(xy) \cdot (-f(y)) = 0 \qquad \forall y$$

Se prendo $P(x,1)$, ottengo

$$\cancel{f(x)}\big(f(x) - f(1)\big) = (x-1)\cancel{f(x)}\, f(1) \qquad ⚠ \text{ se } f(x) \neq 0!$$

$$f(x) - \cancel{f(1)} = (x - \cancel{1})f(1) \Rightarrow f(x) = x f(1)$$

Quindi,
- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x \cdot f(1)$
  - se $c := f(1) = 0$, $f \equiv 0$.
  - $f(0) = 0$

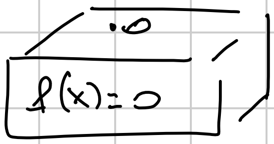
Problema: mistone!

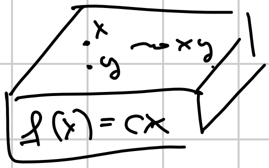
Prendiamo x, y t.c. $f(x) \neq 0$, $f(y) \neq 0$ $\quad x \neq y \quad x \neq 0, y \neq 0$

Allora $f(x)=cx$, $\quad f(y)=cy$

$P(x,y)$: $\quad f(xy)\cdot c(x-y) = \underbrace{(x-y)\,cx\,cy}_{} \neq 0$

$\Rightarrow f(xy)\neq 0 \quad f(xy)=cxy$





→ Per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso per prodotto (sottogruppo di $\mathbb{R}$), si riesce a costruire la soluzione brutta $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin G\\ cx & x\in G\end{cases}$

Siano $a,b>0$.

Trovare le $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tali che

$P(x)\quad f(f(x))+af(x)=b(a+b)x \qquad \forall x$

$S_0=x$
$S_1=f(x)$
$S_2=f(f(x))$
$S_3=f(f(f(x)))$
$\vdots$

$$S_2+aS_1=b(a+b)S_0$$

$$P(f(x)):\quad S_3+aS_2=b(a+b)S_1$$

In generale,

$$P(S_n):\quad S_{n+2}+aS_{n+1}=b(a+b)S_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Quindi la successione S_n è della forma

$$S_n = c\cdot\lambda_1^n+d\cdot\lambda_2^n$$

A_1, A_2 soluzioni di $z^2 + az - b(a+b) = 0$

$\{A_1, A_2\} = \{-(a+b), b\}$

$$S_n = c \cdot \underbrace{(-a-b)}_{<0}{}^n + d \cdot \underbrace{b}_{>0}{}^n \quad \text{per qualche } c, d$$

S_n assumerà valori negativi per n grande $\rightarrow$ assurdo a meno che $c=0$!

Quindi $S_n = C \cdot b^n$

$$\begin{aligned} S_0 &= x \\ S_1 &= f(x) \\ S_2 &= f(f(x)) \\ &\vdots \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C &= x \\ f(x) &= b \cdot x \end{aligned}$$

(+ verifica)