COMBINATORIA 2 – MEDIUM

Note Title 05/02/2023

METATEOREMA: Ogni problema di combinatoria è il seguente:

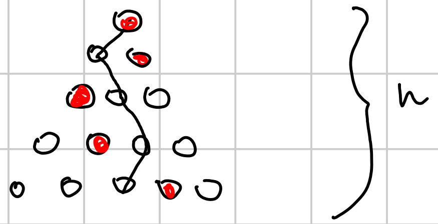
"Alberto e Barbara giocano a un gioco. Alberto inizia e fa una mossa, Barbara fa una mossa, poi il gioco finisce e Alberto paga una certa quantità di soldi a Barbara. Quanto paga Alberto?"

Cioè, dati dei parametri,

$$\min_{x\in X}\left\{\max_{y\in Y}\left\{f(x,y)\right\}\right\}$$

IMO5-2023.

Un triangolo giapponese è



Coloriamo di rosso una pallina per riga.

Un percorso ninja è un percorso che parte dall'alto e scende verso il basso lungo palline adiacenti (oss. facile sono 2^{n-1})

Determinare il minimo k per cui ogni triangolo giapponese ha almeno un percorso ninja che tocca k palline rosse.

$$\min_{\substack{T \text{ triangolo} \\ \text{giappo di} \\ \text{altezza } n}} \; \max_{\substack{P \text{ percorso} \\ \text{ninja in } T}} \; \#\text{palline rosse in } T$$

Come si fa a trovare il minimax?

Se $k = \min\max$, dobbiamo dimostrare due cose

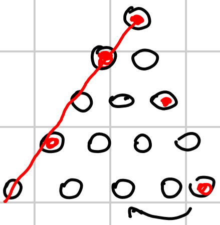
- $\forall x\in X \;\; \exists y\in Y : \;\; f(x,y)\geq k$ $\longrightarrow$ parte di non esistenza
- $\exists x\in X \;\; \forall y\in Y : \;\; f(x,y)\leq k$ $\longrightarrow$ parte di esistenza

costruttiva / non costruttiva

Sol IMO5 2023.

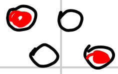
Parte costruttiva:

Idea 1

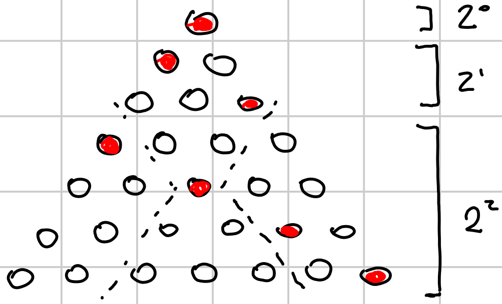


Così si riesce a fare $\sim \frac{n}{2}$

Idea 2:



Usare questo pattern.



In ogni blocco, posso prendere al più una casella rossa

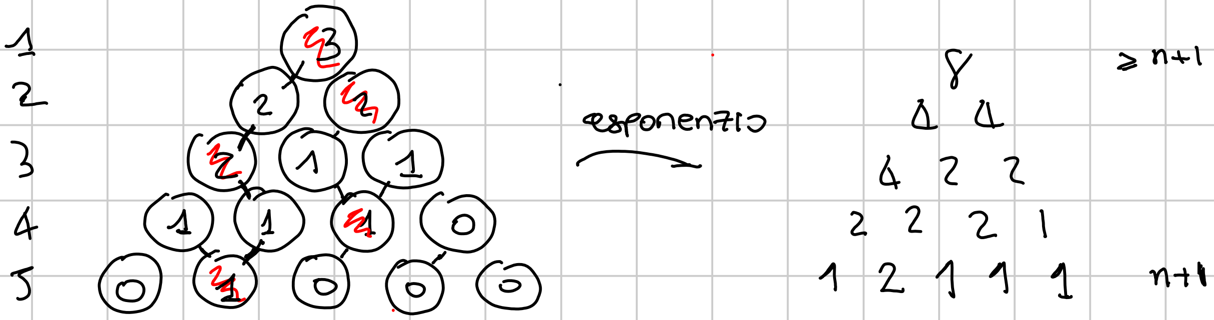
Quindi, abbiamo trovato T tale che per ogni P $\quad r(P) \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

↑ dopo controllo

Parte di non esistenza: $\forall T$ giapponese, $\exists P$ che tocca almeno $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ palline rosse.

Prima idea euristica: mandare Alberto in bancarotta, cioè invece di pagare $r(P)$, paga $2^{r(P)}$. Così il k che dobbiamo trovare è $\sim n$

Dobbiamo mostrare che Alberto paga almeno $\sim n$.



$a_{i,j}$ = # palline rosse che posso toccare partendo da riga i, posto j

Il punto è che noi sappiamo come è fatta la riga sotto.

Idea: magari la somma di ogni riga (dei valori esponenziati) non diminuisce

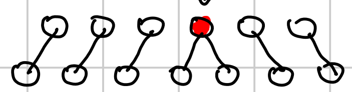
Dim: Sappiamo che $a_{ij} = \max\{a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}\} + 1_{\text{se } a_{ij} \text{ è rosso}}$

Vogliamo dimostrare che $S_i = \sum_j 2^{a_{ij}}$ è non crescente, (dall'alto)

$$S_{i+1} \le S_i$$

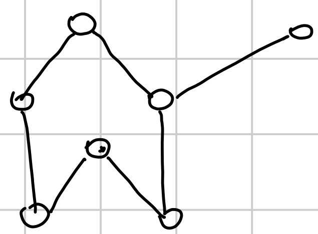
Idea: visto che compare un fattore due extra, sopra e sotto sommo $i+1$ elementi:

lui vale doppio!



Questo conclude (modulo sistemare dettagli degli arrotondamenti)

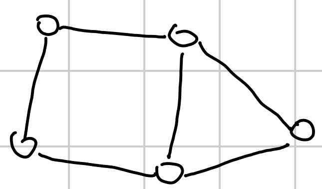
Algoritmi greedy.



Parto da un vertice, e mi muovo sempre su vicini più grandi. A volte finisco nel massimo.

Problema di Turan.

Qual è il massimo numero di archi in un grafo senza triangoli?



Idea: grafo bipartito massimale: ha $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ archi.

Come mostriamo che non si può fare meglio?

numero scritto su x_v.

Scrivo 1 su ogni vertice. E poi calcolo $\sum_{v-w} x_v x_w = \#\text{archi} =: S$

Sposto pesi in giro in modo da far salire la somma

Siano v, w <u>non</u> collegati da un arco, con pesi $x_v, x_w > 0$.

Qual è il loro contributo? $x_v \underbrace{\sum_{z-v} x_z}$ e $x_w \underbrace{\sum_{z-w} x_z}$

Suppongo wlog che $\sum_{z-v} x_z \ge \sum_{z-w} x_z$.

Allora sposto tutto il peso da w a v e la somma non decresce.

L'algoritmo termina perchè $\#0$ aumenta sempre di 1

Quindi a un certo punto non posso fare mosse. I vertici con peso positivo formano un sottografo completo. Ma non ci sono triangoli: sono al massimo 2.

Sono esattamente 2 perchè altrimenti $S=0$

Per AM-GM, $x_v x_w \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow \#\text{archi} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

A volte c'è solo "un giocatore": corrisponde al caso $|Y|=1$

IMO 2017 SL 2

Un camaleonte è una stringa lunga $3n$ con n "A" n "B" e n "C"

Uno swap consiste nello scambiare due lettere adiacenti

Mostrare che dato un camaleonte T esiste un camaleonte S tale che S non può essere ottenuto da T con meno di $\frac{3n^2}{2}$ swap.

Idea naturale: grafo Γ cui camaleonti sono i vertici e gli swap sono archi.

Def: il raggio di un grafo è $\min\limits_{v\in V} \max\limits_{w\in V} d(v,w)$

Il problema chiede di dimostrare che $r(\Gamma) \geq \frac{3n^2}{2}$

Oss. $r(\Gamma) \geq \dfrac{\operatorname{diam}(\Gamma)}{2}$, dove $\operatorname{diam}(\Gamma) := \max\limits_{v,w\in V} d(v,w)$

Dimostrazione: disuguaglianza triangolare. Prendo x, y con $d(x,y) = \operatorname{diam}\Gamma$

$\forall v \in V \qquad d(v,x) + d(v,y) \geq \operatorname{diam}\Gamma$

Almeno uno dei termini è $\geq \operatorname{diam}\Gamma/2$

Mostriamo che $\operatorname{diam}\Gamma \geq 3n^2$. Ci basta trovare due camaleonti che distano più di $3n^2$.

Come si mostra che $d(T,S) \geq 3n^2$? Monovariante!

Voglio una quantità che varia al più 1 ad ogni swap, sia 0 su T, e $3n^2$ su S. Idea: conto le inversioni.

$$f(S) = \#B<A + \#C<B + \#C<A$$

f aumenta/diminuisce di 1 a ogni swap.

$$f(AAABBBCCC) = 0 \quad e \quad f(CCCBBBAAA) = 3n^2$$

IMOSL 2017-4 e anche IMO5 2017

Sia $N \geq 2$ intero. Abbiamo $N(N+1)$ giocatori di calcio di altezze diverse messi a caso in fila. L'allenatore ne rimuove $N(N-1)$ in modo tale che tra i rimanenti $2N$, non ci sia nessuno tra i due più alti, nessuno tra terzo e quarto, ... nessuno tra i due più bassi. Mostrare che si può fare.

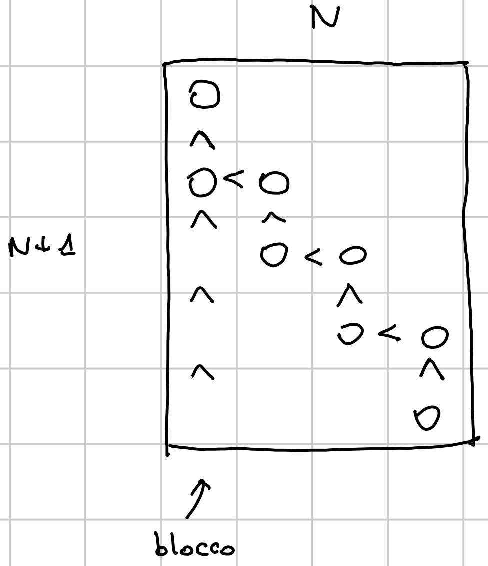
43 12 56

Divido in N blocchi grossi $N+1$. Voglio rimuovere $N-1$ da ogni blocco.

Oss.: Posso riordinare i blocchi: sia prendere le persone in un blocco e riordinarle, ma posso anche scambiare interi blocchi

Assumiamo che le persone in un blocco siano in ordine di altezza

Oss.2. riordinando possiamo chiedere che alla fine i giocatori siano in ordine.



Le colonne sono i blocchi e sono ordinati. Scelgo il primo blocco in modo che il secondo giocatore più piccolo sia più piccolo di tutti i secondi più piccoli giocatori di ogni blocco. Il secondo blocco lo scelgo in modo che il terzo sia il più piccolo dei terzi (nei blocchi rimanenti)

Giochi ad informazione perfetta

In realtà, anche i giochi a somma zero (punti di Alberto + punti di Barbara = costante) e ad informazione perfetta (ognuno sa cosa ha fatto l'altro) sono della forma sopra, perchè Alberto sceglie una strategia, Barbara sceglie una strategia ⇒ determina una partita.

Teorema. Se chiamo S_A le strategie di Alberto e S_B quelle di Barbara

$$\min_{s_1 \in S_A} \max_{s_2 \in S_B} f(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_B} \min_{s_1 \in S_A} f(s_1, s_2)$$

IMO 2018 SL 2 — IMO 2018 - 4

Scacchiera 20×20. Horst mette un cavallo nero in una casella vuota non attaccata da un altro cavallo, Queenie mette una regina bianca su una casella libera. Quanti cavalli è sicuro di riuscire a piazzare Horst?

Oss. Queenie non vuole mettere regine attaccate da un cavallo

Dobbiamo trovare

- Una strategia di Horst che piazzi sempre almeno K cavalli
- Una strategia di Queenie che impedisca il piazzamento di più di K

Idea. Scegliere un insieme di caselle tutte non a salto di cavallo, e cercare di occuparle. Mal che vada, almeno la metà saranno sue

- cornici

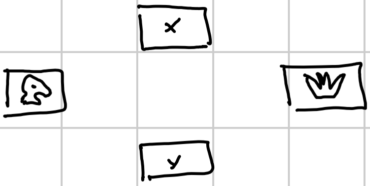
circa $1/3$.

- colorazioni: ogni volta che c'è un cavallo dovete pensare a colorare a scacchiera

Tutte le caselle nere sono a due a due non a salto di cavallo, quindi Horst occupa almeno $1/4$ delle caselle (100)

Tecnica dell'accoppiamento delle mosse.

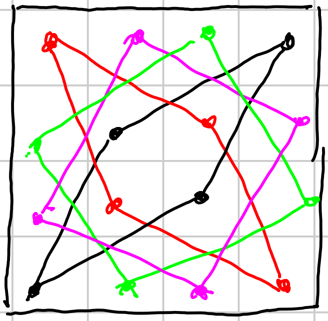
Idea.



Se ho un ciclo lungo 4, possiamo piazzare la regina nella casella opposta

Quindi in ogni ciclo, c'è al più un cavallo.

Ci manca da partizionare la scacchiera in cicli lunghi 4



IMO 2015 SL 4

Sia $n \geq 1$. Alberto e Barbara scelgono a turno un numero tra 1 e n.

- Nessuno può scegliere numeri già scelti.
- Un giocatore non può scegliere numeri adiacenti a numeri che ha già scelto.

- Chi non può muovere perde
- Se finiscono i numeri pareggio.

A inizia. Come finisce il gioco?

Lemma. Ad Alberto conviene scegliere 1.

Prendiamo il segmento $[1,k]$ e lo ribaltiamo.

Cambiano due cose:

- k e $k+1$ ora non sono più adiacenti: questo non fa fare mosse aggiuntive a Barbara, perché k è già stato scelto.
- 1 e $k+1$ ora sono adiacenti: questo non restringe le possibilità di Alberto, perché non poteva scegliere sia 1 sia $k+1$ neanche prima ($k+1$ era

bloccato)

che inizia per

Detto meglio: supponi che $\exists$ strategia di Barbara $\forall$ strategia di Alberto risultato $\leq Q$. Allora $\exists$ strategia di Barbara $\forall$ strategia di A ris $\leq Q$.

Quindi Alberto sceglie 1, e per lo stesso motivo Barbara sceglie n.

Oss 1 Se n è pari, giocare simmetrico fa pareggiare.

Oss 2 Se Alberto gioca k, Barbara gioca $k-1$. Infatti $k-2$ non è di Barbara perché altrimenti Alberto avrebbe giocato $k-1$.

$n=1$ pareggio.

n dispari ≥ 3. L'unico modo che pareggia è Alberto sceglie dispari e Barbara sempre pari. Ma Barbara ha scelto n.

Caso n pari

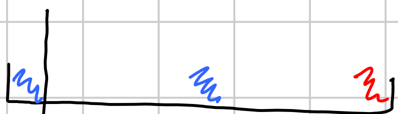
$n=2$ pareggio

$n=4$ pareggio 

$n=6$ pareggio 

$n=8$ Barbara può forzare. 

Oss. Qualsiasi strategia che inizia con n non fa perdere Barbara.



A ogni mossa il segmento è diviso in un pezzo in più. Alla mossa k ho k segmenti Barbara ha giocato $k-1$ volte, quindi per pigeonhole c'è un segmento in cui non ha giocato.

Quindi per n pari ≥ 8 Barbara vince.