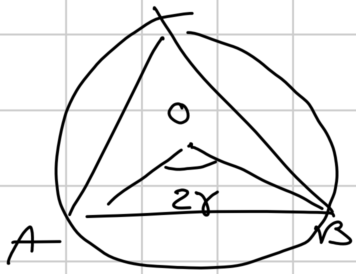
G1M - Metodi Analitici

Note Title 03/02/2023

0 Ripasso

- **Vettori**: Ortocentro $= \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ se l'origine è in $\vec{O}$.

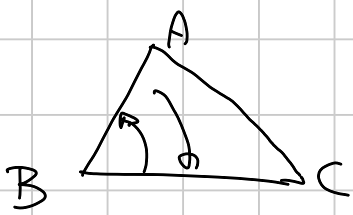
$$\vec{OH} = \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$$



Origine in O: $\vec{A}\cdot\vec{B} = R^2 \cdot \cos 2\gamma$

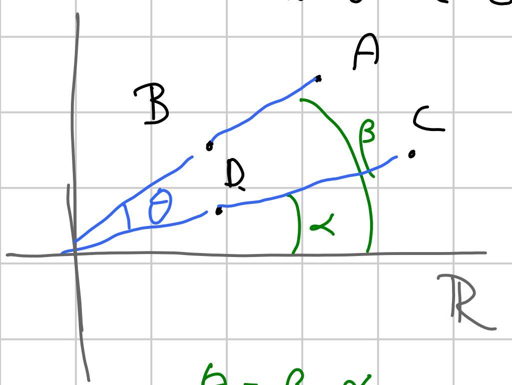
$$\|A-B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\,\vec{A}\cdot\vec{B}$$
$$c^2 = R^2 + R^2 - 2\,\vec{A}\cdot\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

- **Complessi**: $A, B, C \longrightarrow a, b, c$



$$A\hat{B}C \longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \frac{AB}{BC}\cdot e^{i A\hat{B}C}$$

$$e^{i2A\hat{B}C} = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}\cdot\frac{\bar{c}-\bar{b}}{c-b}$$



$$\angle(AB, CD) = \theta$$

$$e^{2i\theta} = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} \Big/ \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

$\theta = \beta - \alpha$ $\quad a-b = AB\cdot e^{i\beta}$ $\quad c-d = CD\, e^{i\alpha}$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{AB}{CD}\, e^{i(\beta-\alpha)} \qquad |z|^2 = z\cdot\bar{z}$$

$$e^{2i(\beta-\alpha)} = \frac{(a-b)^2}{AB^2} \Big/ \frac{(c-d)^2}{CD^2} = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} \Big/ \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Es: parallelismo: $AB \parallel CD$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}} \longrightarrow$$

allineamento di 3 punti

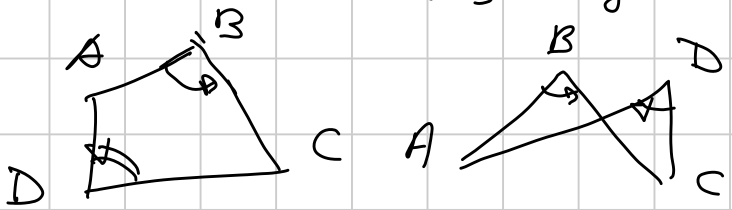
$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}}$$

perpendicolarità $AB \perp CD$

$$\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$$

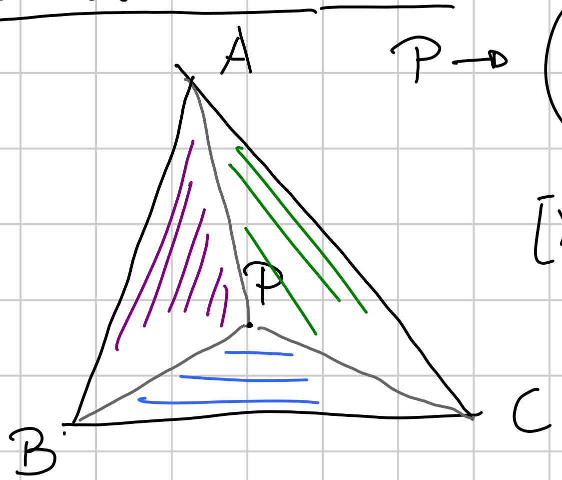
similitudine $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{XYZ}$: $\frac{a-b}{c-b} = \frac{x-y}{z-y}$

ciclicità :



$$\frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{a-d}{c-d} \in \mathbb{R}$$

$\boxed{1}$ Coordinate baricentriche - Intro

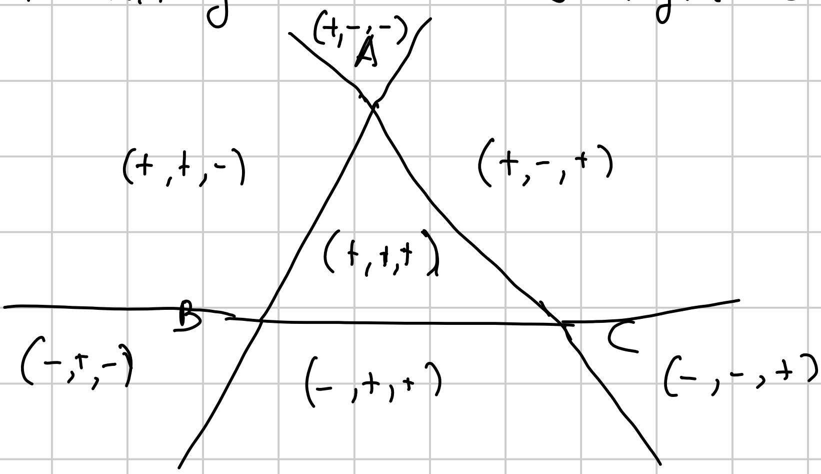


$$P \to \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[BCA]}, \frac{[PAB]}{[CAB]} \right)$$

$[XYZ]$ = area con segno

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \begin{cases} >0 & \text{stesso verso} \\ <0 & \text{verso opposto} \end{cases}$$

$\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ con $x+y+z=1$

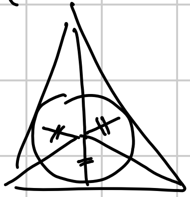


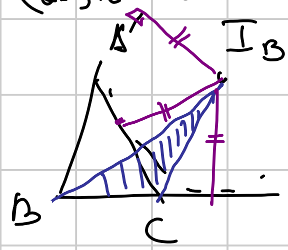
← segno coord. baricentriche

pt. medio di AB ↓

Punti: $A\ (1,0,0)$, $B\ (0,1,0)$, $C\ (0,0,1)$, $G\ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $M_c\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$$I \quad \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right) \qquad I_B \quad \left(\frac{a}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{c}{a-b+c}\right)$$

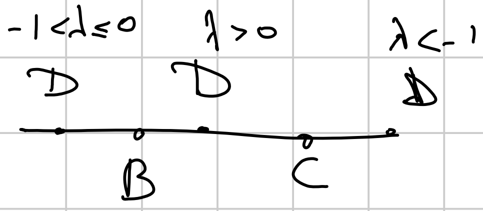


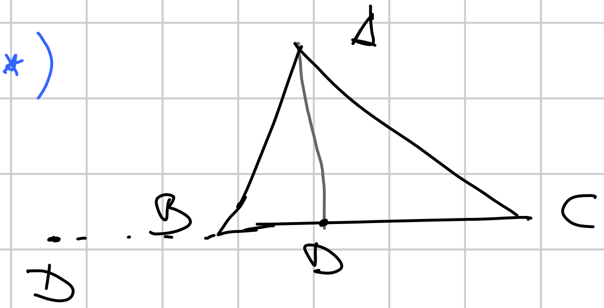


D su BC t.c. $\frac{BD}{DC} = \lambda$ con segno

$\downarrow$

$(0, *, *)$





$$\frac{[DAB]}{[DCA]} = \frac{BD}{DC} = \lambda$$

$$\frac{x}{y} = \lambda \qquad x+y=1 \qquad \frac{1-y}{y} = \lambda \qquad y(\lambda+1)=1 \qquad \frac{1}{\lambda+1}$$

$$\left(0, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$$

Rette $ux+vy+wz=0$ è l'equazione di una retta in baricentriche.

u,v,w determinati a meno di multiplo e $\neq (0,0,0)$

lato AB	lato BC	lato AC	retta per A
$z=0$	$x=0$	$y=0$	$vy+wz=0$

mediana da A	bisettrice da C	retta AD con D su BC t.c. $\frac{BD}{DC}=\lambda$
$y=z$	$-bx+ay=0$	$-\lambda y+z=0$

Es (CEVA): D su BC, E su CA, F su AB

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1 \iff AD, BE, CF \text{ concorrono}$$

dim: $D:\left(0, \frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$ $\quad E:\left(\frac{\mu}{1+\mu}, 0, \frac{1}{1+\mu}\right)$ $\quad F:\left(\frac{1}{1+\nu}, \frac{\nu}{1+\nu}, 0\right)$

$\lambda = \frac{BD}{DC}$ $\quad \mu = \frac{CE}{EA}$ $\quad \nu = \frac{AF}{FB}$

AD: $z=\lambda y$ $\quad$ BE: $x=\mu z$ $\quad$ CF: $y=\nu x$

$$AD \cap BE \longrightarrow \begin{cases} z = \lambda y \\ x = \mu z \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Big\| \to (\mu\lambda k, k, \lambda k)$$

$$\left(\frac{\mu\lambda}{1+\lambda+\mu\lambda}, \frac{1}{1+\lambda+\mu\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu\lambda} \right)$$

$$AD \cap CF \longrightarrow \begin{cases} z = \lambda y \\ y = \nu x \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Big\| \to (h, \nu h, \lambda\nu h)$$

$$\left(\frac{1}{1+\nu+\lambda\nu}, \frac{\nu}{1+\nu+\lambda\nu}, \frac{\lambda\nu}{1+\nu+\lambda\nu} \right)$$

$$\begin{cases} \mu\lambda(1+\nu+\lambda\nu) = (1+\lambda+\mu\lambda) \to \cancel{\mu\lambda} + \mu\lambda\nu + \mu\lambda^2\nu = 1+\lambda+\cancel{\mu\lambda} \\ 1+\nu+\lambda\nu = \nu(1+\lambda+\mu\lambda) \to 1 = \mu\lambda\nu \\ \lambda(1+\nu+\lambda\nu) = \lambda\nu(1+\lambda+\mu\lambda) \to \lambda = \mu\lambda^2\nu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mu\lambda\nu = 1 . \quad \square$$

<u>Omogeneizzazione</u>: si può lavorare con le cosiddette <u>terne omogenee</u>

$[x:y:z] \to$ questo è l'insieme di tutte le terne $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$[1:1:1]$ baricentro $\quad [a:b:c]$ incentro $\quad [0:1:1]$ M_A

[2] Coordinate baricentriche - Rette

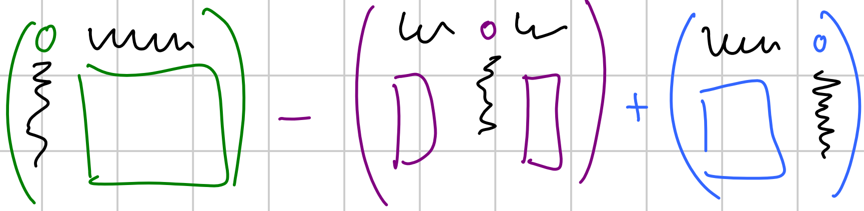
<u>Determinante</u>:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix} = aez + xbf + cdy - cex - ayf - zbd$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & \boxed{e} & \boxed{f} \\ x & \boxed{y} & \boxed{z} \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ y & z \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ x & z \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$



<u>Es</u>: $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

Se scambio due righe o due colonne det cambia segno.

Se due righe sono uguali, $\det = 0$

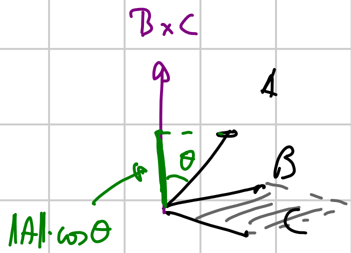
Se una riga o una colonna è nulla, $\det = 0$

$\det = 0 \iff$ una riga / una colonna è combinazione lineare delle altre due

$$A = \lambda B + \mu C$$

Se A, B, C sono vettori di $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$



$$\det(A|B|C) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

Lo volume del parallelepipedo definito da A, B, C.

<u>Fatto</u>: Date le coord. baricentriche esatte di P, Q, R

$$P = (x_1, y_1, z_1) \quad Q = (x_2, y_2, z_2) \quad R = (x_3, y_3, z_3)$$

$$\Rightarrow \quad [PQR] = [ABC] \cdot \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

<u>Idea</u>: $(P-Q) \times (R-Q) = \big((x_1-x_2)A + (y_1-y_2)B + (z_1-z_2)C\big) \times \big((x_3-x_2)A + (y_3-y_2)B + (z_3-z_2)C\big)$

$$\big((x_1-x_2)(y_3-y_2) - (y_1-y_2)(x_3-x_2)\big)\, A \times B + \_\_\_\, B \times C + \_\_\_\, C \times A$$

e faccio il conto cercando di raccogliere

qualcosa tipo $(A-B) \times (C-B) = A \times C + C \times B + B \times A$

<u>Prop. di det</u>: $\det\begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \\ \mu x_2 & \mu y_2 & \mu z_2 \\ \nu x_3 & \nu y_3 & \nu z_3 \end{pmatrix} = \lambda\mu\nu \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

<u>Allineamento</u>: P, Q, R con coord bari. $P=[x_1:y_1:z_1]$
$Q=[x_2:y_2:z_2]$
$R=[x_3:y_3:z_3]$

sono allineati se e solo se $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$

<u>Retta per due punti</u> $M=[m_1:m_2:m_3]$
$N=[n_1:n_2:n_3]$

$\det\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$ eq. della retta per M, N.

<u>Retta all'∞</u>

$x+y+z=0$ ← non ci sono punti del piano le cui coord. baricentriche rispettino questa equazione

I "punti" di questa "retta" sono detti punti all'∞, cioè sono i centri dei fasci di rette parallele.

<u>ES</u>: lato BC, $x=0$ → pt all'∞ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$ → $[0:1:-1]$

La parallela a BC per A passa per $[1:0:0]$ e per $[0:1:-1]$
$\downarrow$ $u=0$ $\downarrow$ $v-w=0$

$\Rightarrow$ è $y+z=0$

<u>ES</u>: quando due rette sono parallele?

$ux+vy+wz=0$
$mx+ny+lz=0$ sono parallele se concorrono in $x+y+z=0$

$$\begin{cases} ux+vy+wz=0 \\ mx+ny+lz=0. \end{cases}$$

$$[vl-nw : mw-ul : un-mv] \leftarrow \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ m & n & l \end{pmatrix}$$

parallele se e solo se $vl-nw+mw-ul+un-mv=0$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ m & n & l \end{pmatrix}=0$$

Concorrenza: tre rette concorrono $\Longleftrightarrow$ il det dei coeff è 0.

Es: parallela a $mx+ny+lz=0$ per $[p:q:r]$

$$\begin{cases} mx+ny+lz=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \rightarrow [n-l : l-m : m-n]$$

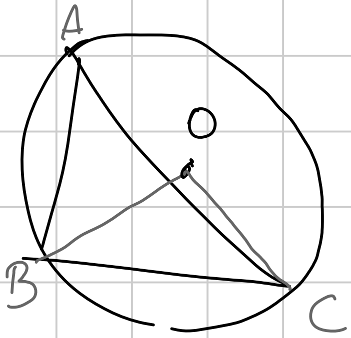
$$\det\begin{pmatrix} n-l & l-m & m-n \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix}=0 \leftarrow \text{eq della parallela.}$$

Perché usare le coord esatte? Se voglio parlare di aree o di rapporti di segmenti, mi "servono" le coord esatte.

Es: Trovare le baricentriche del centro della cf di Feuerbach.

Step 1 Trovare le bari di O e H

O

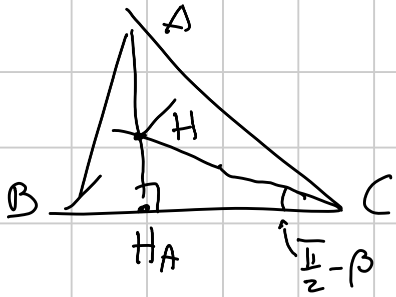


$[OBC]=R^2 \cdot \sin(2\alpha)$

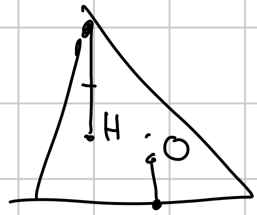
$[\sin(2\alpha) : \sin(2\beta) : \sin(2\gamma)] =$

$= [\sin\alpha\cos\alpha : \sin\beta\cos\beta : \sin\gamma\cos\gamma] =$

H



$$[HBC] = \frac{1}{2} BC \cdot HH_A =$$
$$= aR\cos\gamma\cos\beta$$



$$HH_A = HC \cdot \cos\beta =$$
$$= 2R \cdot \cos\gamma\cos\beta$$

$$\left[\frac{a}{\cos\alpha} : \frac{b}{\cos\beta} : \frac{c}{\cos\gamma}\right] = [\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma]$$

$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot bc = bc \cdot \cos\alpha$$
$$S_B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$
$$S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

$$S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = 4S^2$$
$$a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C = 8S^2$$

$$O = [a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C]$$
$$H = [S_B S_C : S_A S_C : S_B S_A]$$

Step 2: $N = \left(\left(\frac{a^2 S_A}{8S^2} + \frac{S_B S_C}{4S^2}\right)\frac{1}{2} : \text{cyc} \right) =$

$$= \left(\frac{a^2 S_A + 2 S_B S_C}{16 S^2} : \text{cyc} : \right) =$$

In generale il punto che divide PQ in un certo rapporto si trova usando le coord esatte di P e Q proprio come si fa con i vettori.

Rette perpendicolari

P, Q, M, N

$P = (p_1, p_2, p_3)$ e similmente coord esatte

$$PQ = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) = (x_1, y_1, z_1)$$
$$MN = (m_1 - n_1, m_2 - n_2, m_3 - n_3) = (x_2, y_2, z_2)$$

allora $RQ \perp MN$ se e solo se $\underbrace{a^2(z_1y_2+y_1z_2)+b^2(x_1z_2+z_1x_2)+c^2(y_1x_2+x_1y_2)}_{\sum_{cyc}(x_1y_2+x_2y_1)c^2}=0$

dim: trasliamo l'origine in O

mi basta che $(x_1A+y_1B+z_1C)\cdot(x_2A+y_2B+z_2C)=0$

$$\sum_{cyc} x_1x_2 A\cdot A + \sum_{cyc}(x_1y_2+x_2y_1)A\cdot B =$$

$$= R^2\sum_{cyc}x_1x_2 + \sum_{cyc}(x_1y_2+y_1x_2)\left(R^2-\frac{c^2}{2}\right) =$$

$$= R^2\left(\sum_{cyc}(x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2)\right) - \sum_{cyc}(x_1y_2+y_1x_2)\frac{c^2}{2} =$$

$$= R^2\cancel{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)} - \frac{1}{2}\sum_{cyc}(x_1y_2+x_2y_1)c^2 \qquad \square$$

$\sum p_i - \sum q_i = 0 \qquad \sum m_i - \sum n_i = 0$

Es: $PQ \perp BC \iff 0 = a^2(z_2-y_2) - b^2x_2 + c^2x_1$

Oss: Il vettore "spostamento" da P a Q corrisponde al pt all'∞ della retta PQ

Es2: Asse di BC ha equazione $a^2(z-y)+x(c^2-b^2)=0$

Cerchi

$$-a^2yz-b^2xz-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

è l'eq. di una circonf. in baricentriche.

Circoscritta: $a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$

Inscritta: tg a $x=0$
$$\begin{cases} -(a^2yz+b^2xz+c^2xy)+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$-a^2yz+(vy+wz)(y+z)=0$$

$t=\frac{y}{z}$

$$-a^2t+(vt+w)(t+1)=0 \qquad vt^2+t(v+w-a^2)+w=0$$

$$\Delta=(v+w-a^2)^2-4vw=$$
$$=v^2+w^2-2vw+a^4-2va^2-2wa^2$$

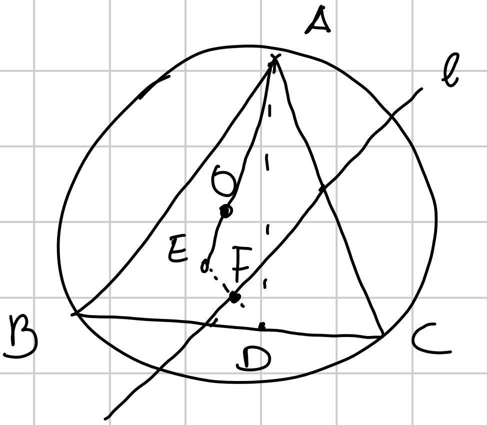
e cicliche.

Es: ABC triangolo, D piede dell'altezza da A. Sia ℓ la retta per i pt. medi di BC e AC. E è il simmetrico di D rispetto a ℓ. Dimostrare che il circocentro di ABC sta su AE.

Es: ABC acutangolo con AB<AC, ω circonf. circoscritta. t_B, t_C tangenti a ω in B, C. $L = t_B \cap t_C$. La parallela ad AC per B interseca t_C in D, la parallela ad AB per C interseca t_B in E. La circoscritta di BDC interseca AC in T, con T tra A e C, la circoscritta di BEC interseca AB in S con B tra S e A. Dimostrare che ST, AL, BC concorrono
[BMO 2017 - P2]

— o —

ABC triangolo, D piede dell'altezza da A. Sia ℓ la retta per i pt. medi di BC e AC. E è il simmetrico di D rispetto a ℓ. Dimostrare che il circocentro di ABC sta su AE.



$$H = [S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B]$$

$$HA: \cancel{S_A} S_B y - \cancel{S_A} S_C z = 0$$

$$\begin{cases} HA \\ BC \end{cases} \to [0 : S_C : S_B]$$

la retta ℓ passa per $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\ell: x + y - z = 0 \to$ ha pt. all'∞ $[1 : -1 : 0]$

$x_2 = 1 \quad y_2 = -1 \quad z_2 = 0$

$$a^2(z_1 y_2 + y_1 z_2) + b^2(x_1 z_2 + z_1 x_2) + c^2(y_1 x_2 + x_1 y_2) = 0$$

$$a^2(-z) + b^2(z) + c^2(y - x) = 0 \qquad c^2(y - x) + z(\underbrace{b^2 - a^2}_{= -c^2}) = 0$$

$b^2 - a^2 = -c^2$

$$S_A - S_B = \frac{(b^2+c^2-a^2)-(a^2+c^2-b^2)}{2} =$$

$$= b^2 - a^2 \qquad\qquad v_\infty = [S_B : S_A : -c^2]$$

$$S_A + S_B = \frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)}{2} = c^2$$

$$r: D + t v_\infty = [t S_B : S_C + t S_A : S_B - t c^2]$$

$$\begin{cases} r \\ \ell \end{cases} \to \qquad t S_B + S_C + t S_A - S_B + t c^2 = 0$$

$$t = \frac{S_B - S_C}{S_B + S_A + c^2} = \frac{c^2 - b^2}{2c^2}$$

$$F = \left[\frac{c^2-b^2}{2c^2} S_B : S_C + \frac{c^2-b^2}{2c^2} S_A : S_B - \frac{c^2-b^2}{2} \right]$$

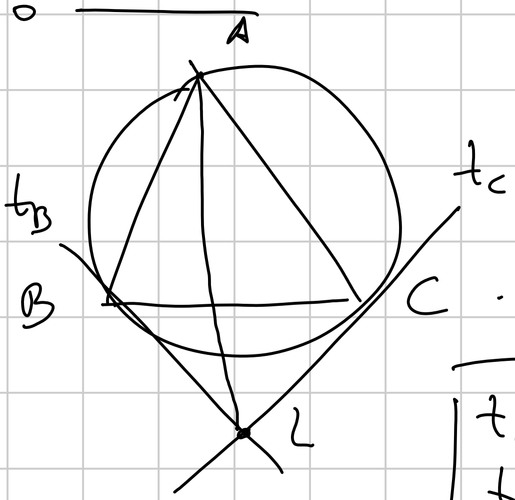
$$E = 2F - D = \left[\frac{c^2-b^2}{c^2} S_B : S_C + \frac{c^2-b^2}{c^2} S_A : S_B - (c^2-b^2) \right] = [(c^2-b^2) S_B : \underbrace{b^2 S_B : c^2 S_C}]$$

$$A = [1:0:0] \qquad O = [a^2 S_A : \underbrace{b^2 S_B : c^2 S_C}] .$$

$$c^2 S_C y - b^2 S_B z = 0$$

---

tg a ω_{ABC} in C



$$[x:y:z] \longrightarrow \left[\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right]$$

<u>coniug. isogonale</u>

$$\boxed{\begin{aligned} t_C &: a^2 y + b^2 x = 0 \\ t_B &: a^2 z + c^2 x = 0 \end{aligned}}$$