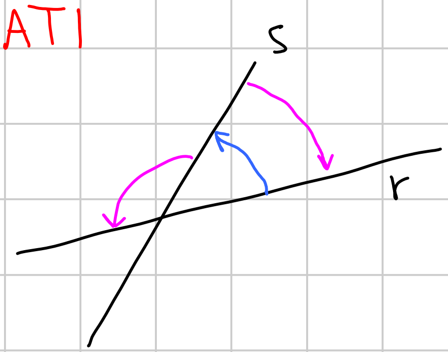
G3 MEDIUM 2023 (Pierrat)

Note Title 05/02/2023

ANGOLI ORIENTATI

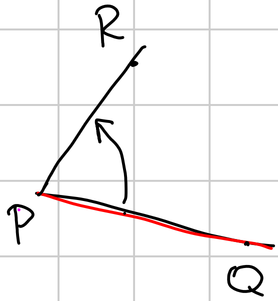
Presi modulo π.



$\measuredangle(r,s)$ •

$\measuredangle(s,r)$ •

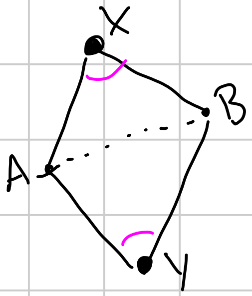
$$\bullet + \bullet = 0 \pmod{\pi}$$



$\measuredangle QPR$

Perché li usiamo?

- Problemi di configurazione



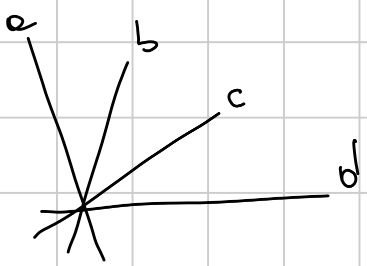
$\measuredangle AXB = \measuredangle BYA \longrightarrow$ No ciclicità

Servirebbe
$$\measuredangle AXB = \measuredangle AYB$$

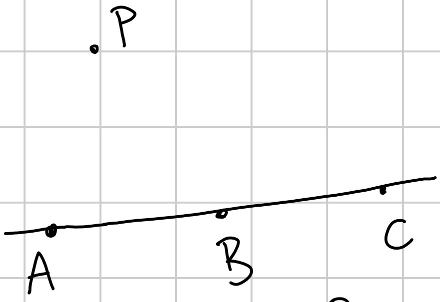
[ABCD cyc sse $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$]

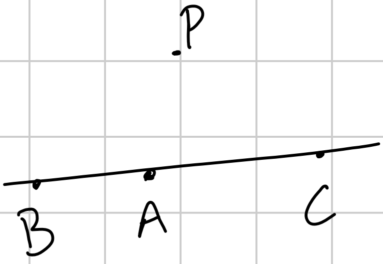
- Comodità

Fare angle chasing è meno faticoso.



$$\measuredangle(a,c) = \measuredangle(a,d) + \measuredangle(d,b) + \measuredangle(b,c)$$





Devo mostrare A, B, C allineati.

$$\Updownarrow$$

$$\measuredangle(AB, AP) = \measuredangle(AC, AP)$$

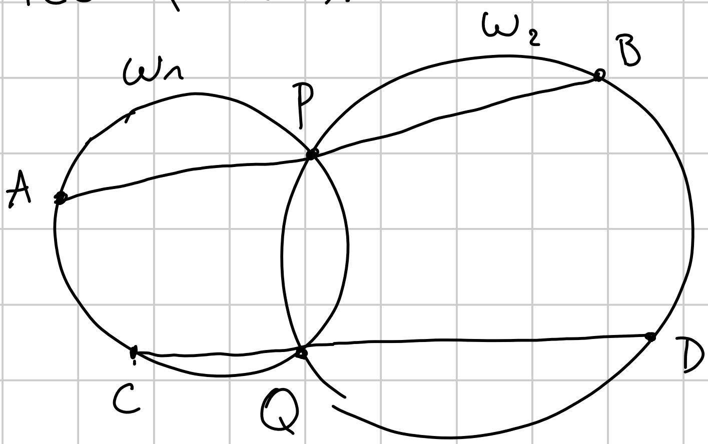
(1)

Voglio r, s parallele → t terza retta t.c. $\measuredangle(r,t) = \measuredangle(s,t)$

(2)

(3) Conciclicità (vedi sopra).

Teo (Reim).

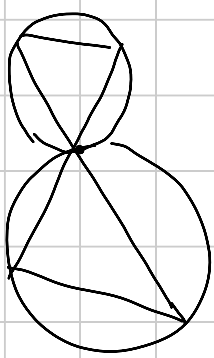


Tesi: $AC \parallel BD$

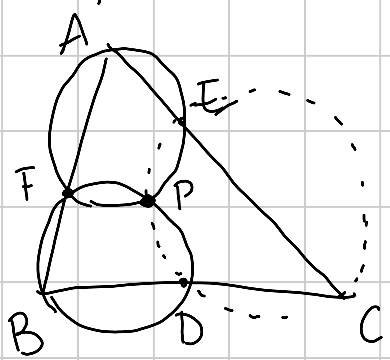
Th $\Leftrightarrow$ $\measuredangle BDC = \measuredangle ACD$

$= \measuredangle BDQ = \measuredangle BPQ = \measuredangle APQ =$

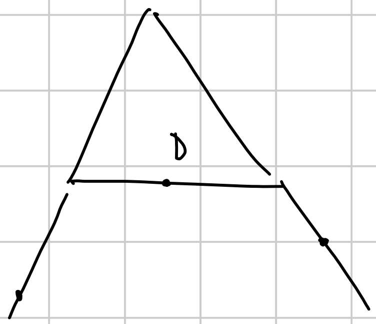
$= \measuredangle ACQ = \measuredangle ACD$



Miquel Tesi: DCEP concyc

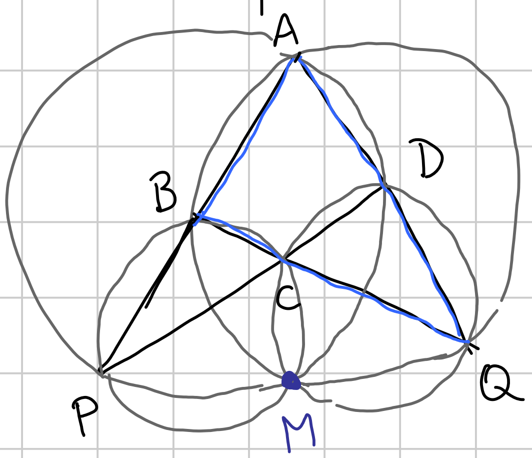


$$\underline{\underline{\measuredangle DPE}}$$
$$= \measuredangle DPF + \measuredangle FPE$$
$$= \measuredangle DBF + \measuredangle FAE = -\gamma = -\measuredangle ECD$$
$$= \underline{\underline{\measuredangle DCE}}$$



Questo per quanto riguarda i triangoli.

Per i quadrilateri



4 rette a 3 a 3 non concorrenti.

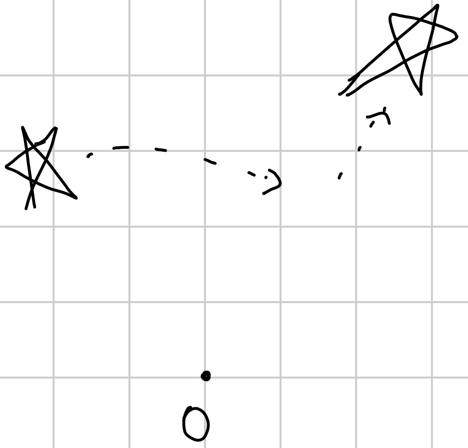
ΔABQ, ΔAPD, ΔPBC, ΔQCD.

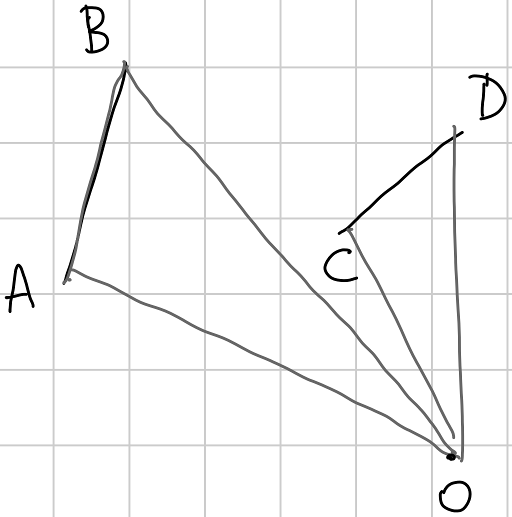
Tesi $\rightarrow$ le quattro circoscritte hanno un punto in comune.

A meno di stare attenti, basta farlo vedere per ogni terna.

ROTOMOTETIE ("Spiral similarities")

(= Rotazioni + omotetie).





$\exists$ O e rotomotetia in O che manda $AB \to CD$? E' unico?

[Accade chiaramente sse $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ sono simili (nell'ordine)]

Con i complessi vediamo esistenza e unicità di O.

$$\frac{b-o}{a-o} = \frac{d-o}{c-o} \longrightarrow o = \frac{\dots}{a+d-b-c}$$

Quindi è unica, ed esiste sse $\vec{AB} \neq \vec{CD}$, ossia sse ABDC <u>non</u> è un parallelogramma.

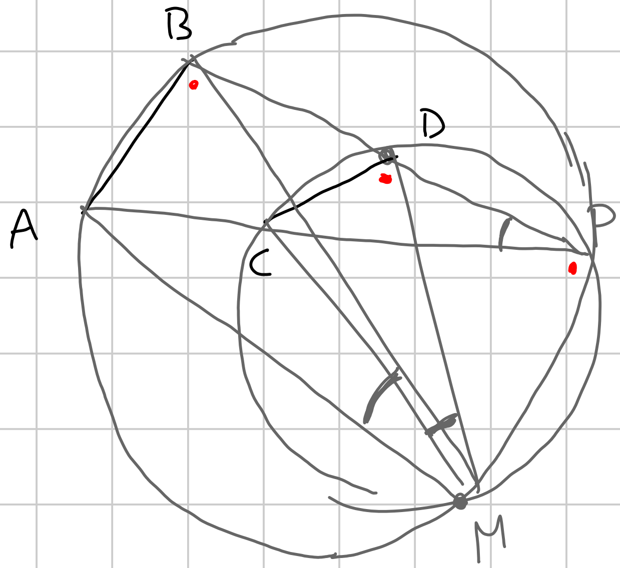
<u>Oss 1</u>:

$$\frac{CO}{AO} = \frac{DO}{BO} \quad + \quad \measuredangle COA = \measuredangle DOB$$

(Perché $\measuredangle COB + \measuredangle BOA = \measuredangle COB + \measuredangle DOC$)

$\Longrightarrow$ Seconda coppia di tr simili ($\Delta COA \sim \Delta DOB$)
(e quindi seconda rotomotetia in O).

Oss 2: Costruzione di O.



$AB \to CD$

AC

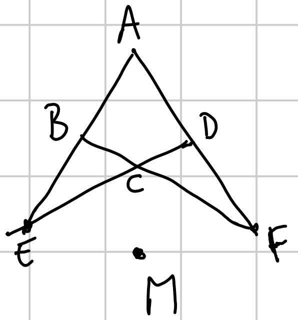
BD

Tracciamo AC, BD e intersechiamo in P

Intersechiamo (PAB) (PCD)

Proviamo ad usare l'oss 2 con AC e BD!

$\to$ Viene proprio la configurazione di Miquel.



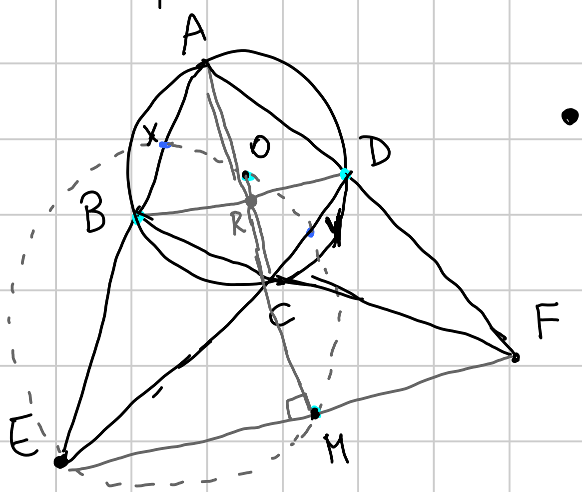
Un sacco di rotomotetie in M:

$AB \to DC$
$AD \to BC$
$ED \to BF$

$BE \to FD$
$AE \to FC$
$AF \to EC$

2° MODO di "pensare" alla configurazione di Miquel.

Miquel nel caso ABCD ciclico.



- Miquel sta su EF $\Longleftrightarrow$ ABCD è cyc

$\measuredangle FME = \measuredangle FMC + \measuredangle CME =$

$= \measuredangle FDC + \measuredangle CBE$

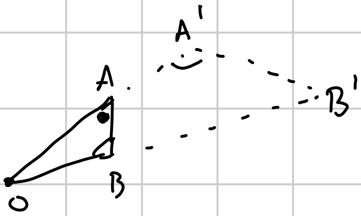
$= \measuredangle ADC - \measuredangle ABC = 0$ sse ABCD cyc

- M è la proiezione di O su EF.
  Infatti M manda $AB \to DC$, e $X \to Y$
  Quindi M è centro della roto $BX \to CY$
  o $\underline{BC \to XY}$

$\to$ M sta sulla circ di diam OE

- $R := AC \cap BD$
  $\to$ R e M sono inversi wrt $(ABCD)$.

  Infatti $R' :=$ inverso di R
  Vediamo che $R' \in (ABF)$



$$\measuredangle AR'B = \measuredangle AR'O + \measuredangle OR'B$$
$$= \measuredangle RAO + \measuredangle OBR$$
$$= 90° - \measuredangle ADC + 90° - \measuredangle DAB = -(\measuredangle ADC + \measuredangle DCB)$$
$$= -\measuredangle AFB$$
??

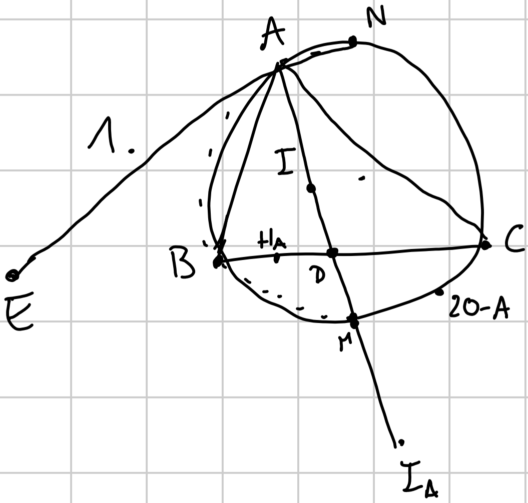
- Corollario del punto precedente:
  $BODM$ cyc (e analog. $AOCM$ cyc).

  Infatti $\measuredangle ORB = \measuredangle ORD$
  e invertendo (B e D rimangono fissi, $R \leftrightarrow M$)
  diventa $\measuredangle OBM = \measuredangle ODM$ che è la tesi.

- MO biseca $\measuredangle DMB$ e $\measuredangle CMA$.
  ($OD = OB$ nel quad cyc).

Inversioni "tipiche"

1. $\sqrt{AB\cdot AC}$ di centro A (+ simmetria)
2. Rispetto all'inscritta
3. Nell'ortocentro di raggio $\sqrt{AH\cdot HD}$
4. Che fissa una circonferenza



potenza $AB\cdot AC$

$B \leftrightarrow C$

$BC \leftrightarrow (ABC)$

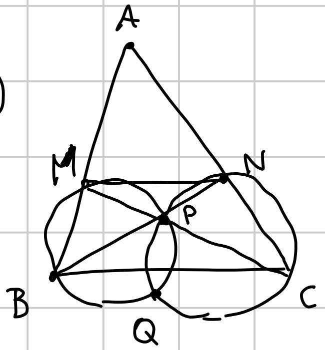
$I \leftrightarrow I_A$ (e anzi (BI_ACI) è fissata)

$D \leftrightarrow M$ $\quad (E \leftrightarrow N)$

$I_B \leftrightarrow I_C$

$H_A \leftrightarrow 20\text{-}A$

BMO (noto)



Potenza $AB\cdot AN$ + simm.

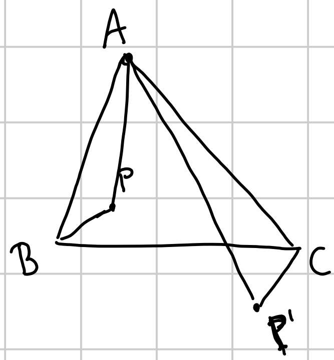
$B \leftrightarrow N$

$C \leftrightarrow M$

ABQN e AMQC cyc per Miquel.

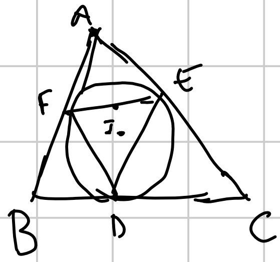
$\updownarrow$ BN $\qquad \updownarrow$ CM

$\Rightarrow P \leftrightarrow Q \rightarrow$ tesi.



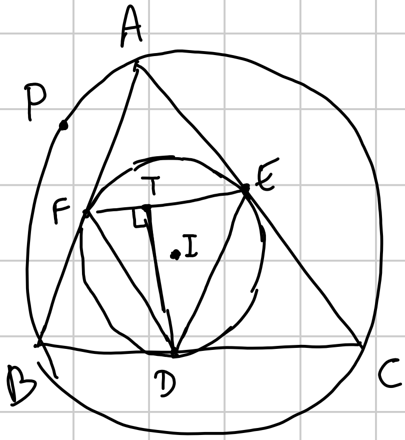
inversi danno luogo a similitudini /roto.

2.



A $\longleftrightarrow$ pt medio EF $\Rightarrow$ (ABC) $\longleftrightarrow$ Feuerb. di DEF

EF $\longleftrightarrow$ (AFIE)



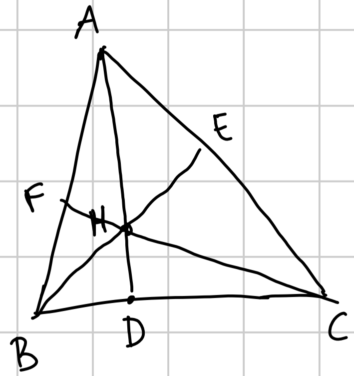
Tesi: P, T, I allineati

$\left(\begin{array}{l} P := (AI) \cap (ABC) \\ T \text{ piede di } D \text{ su } EF \end{array} \right)$

PI $\cap$ EF sta su EF, sulla Feuerbach di DEF, non il punto medio

$\rightarrow$ è il piede di D.

3.



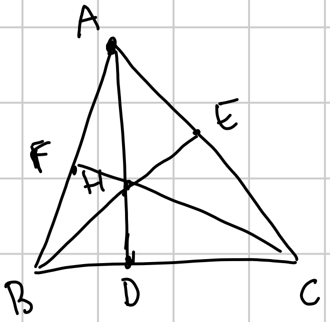
Potenza $-AH \cdot HD$

A $\longleftrightarrow$ D

Circoscritta $\longleftrightarrow$ Feuerbach

BCEF fissata

(IMO 2015/3)

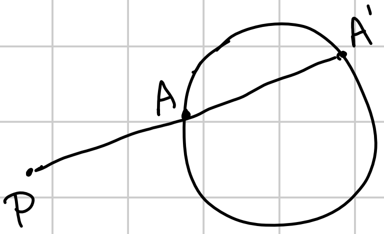


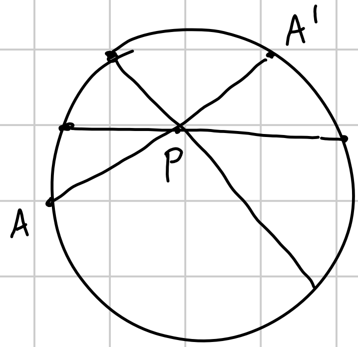
Se penso ad A come l'ortocentro nella quaterna ABCH

B$\leftrightarrow$F, D$\leftrightarrow$H, C$\leftrightarrow$E

fissiamo (BDHF), (BCEF)...

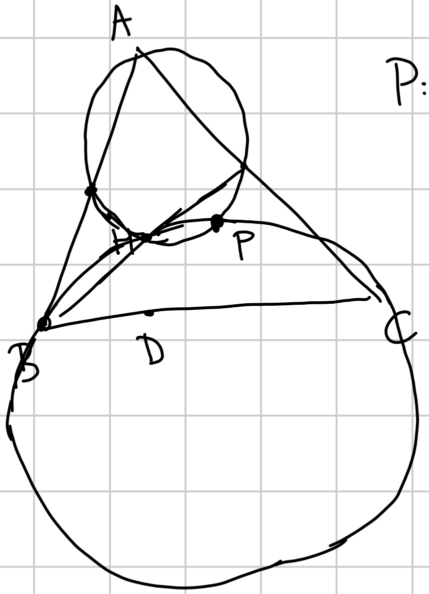
4.





Potenza di inversione: proprio la potenza (con segno).

Esempio di inversione di "tipo 3".



$P := (AH) \cap (BCH)$

Tesi: $P \in$ mediana

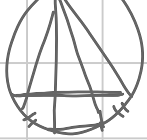
Inversione di tipo 3 in A.

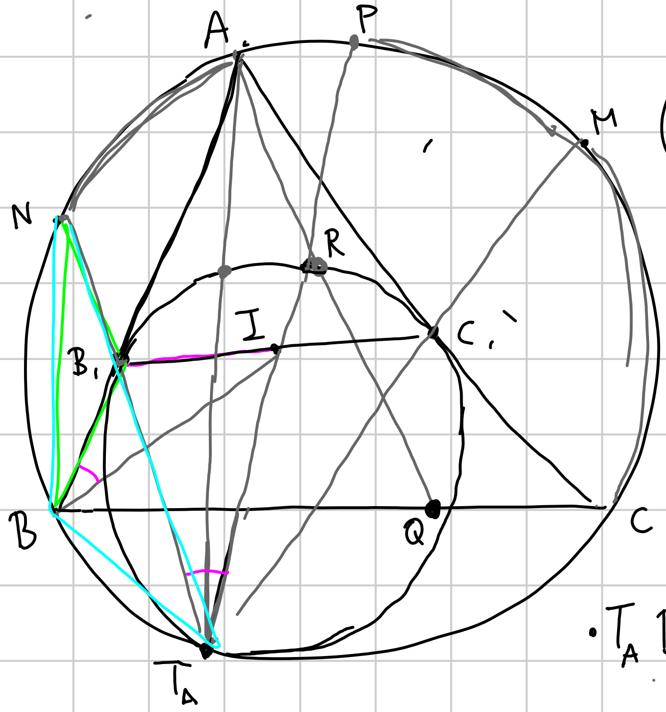
$(AH) \longleftrightarrow BC$

$(BHC) \longleftrightarrow$ Feuerbach

$\Rightarrow P \longleftrightarrow$ pt medio di BC.

Circonferenze mistilinee

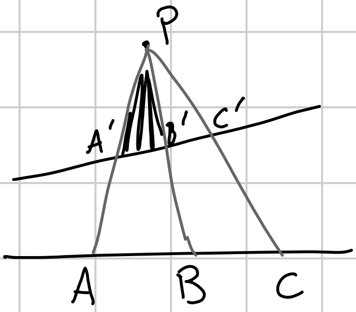


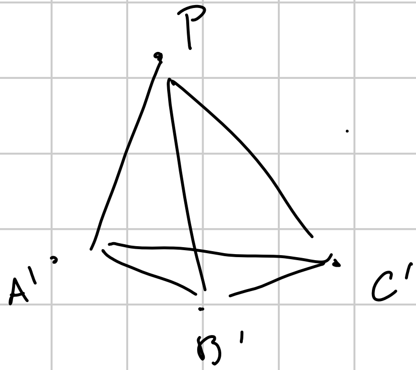


- AT_A e cieliche concorrono. (T_A e il punto di tangenza dell'exscritta a BC si corrispondono. $\Rightarrow$ Conj. isog. di Nagel e AT_A)
- Topmost point della mistilinea allineato con A e col pt di tg dell'exscr. (omot. in A).
- $T_A B_1 N$ allineati (omotetia in T_A)

- $B_1C_1 \ni I$, che è anzi il punto medio. (Pascal su $ABMT_ANC$)

  [Googlate "transversal lemma Yufei Zhao"]





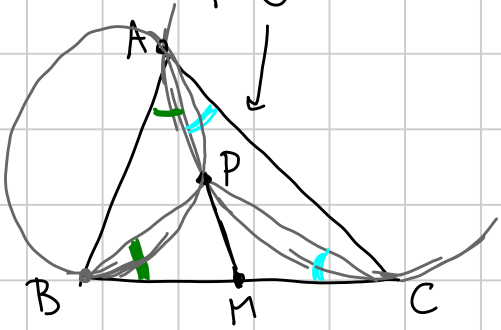
- Top most di mistilinea e circoscritta allineati con T_A.
  (e con I)
  (T_AI mediana, T_AA simmediana in $T_AB_1C_1$ ....)

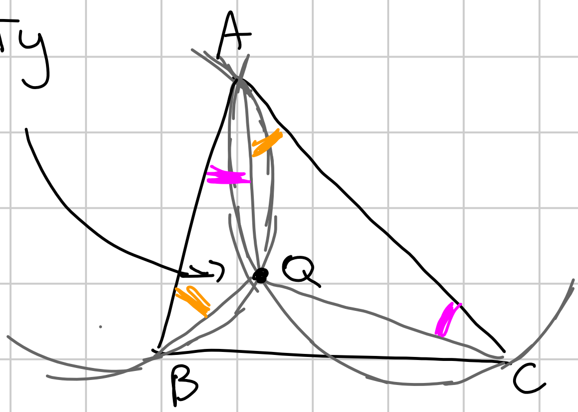
- BB_1IT_A cyc (con gli angoli del punto prima).

- $NB^2 = NB_1 \cdot NT_A$ (per inversione in N, ad esempio)
  $\Rightarrow NI^2 = \dots$, CI tange (BB_1IT_A)

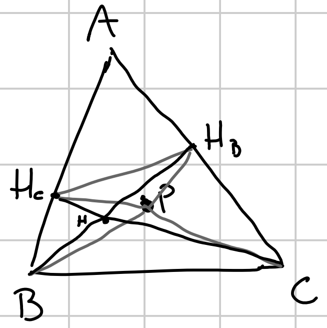
  (Recuperare IMO 2019/6).

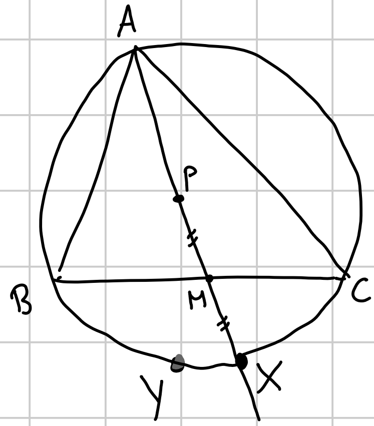
Humpty - Dumpty





- $P \in (BHC)$ (ha l'angolo suppl. a $\bullet + \bullet$)
- $P \in$ mediana (potenza da P).
- Per quanto già visto, (a meno di stare dalla parte giusta di BC), $P \in (AH)$.
- P è il pt di Miquel di BCH_cH_B

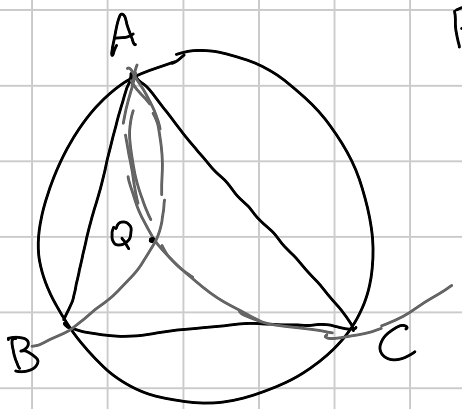




- (Se prendo il simm di P wrt M sta sulla circoscritta per angolo).

$Y :=$ rifl. di P su BC. $\longrightarrow$ $Y \in$ simmediana.

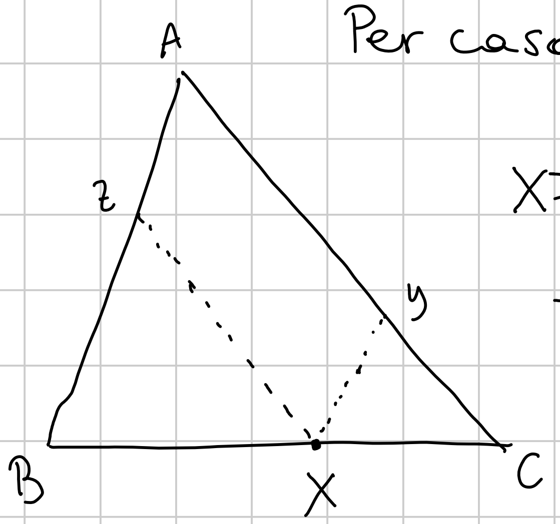
- $P \in$ Apollonio $\left(= \text{luogo dei punti } Z \text{ con } \dfrac{ZB}{ZC} = \dfrac{AB}{AC}\right)$



Per casa:

- $Q \in$ simmediana
- $OQ \perp$ simmediana
- P, Q sono coniugati isogonali.

Per casa:



$XZ \parallel AC$, $XY \parallel AB$.

Tesi: al variare di X, (AYZ) passa per un punto fisso $(\neq A)$.