Senior 2024 - Combinatoria 1 Basic

Titolo nota 03/09/2024

Cenni di probabilità

Ω insieme finito (degli esiti)

$\omega \in \Omega$ sono gli esiti

$p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

- $p(\Omega) = 1$
- $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $A \cap B = \emptyset$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\rightarrow$ Se gli esiti sono equiprobabili allora $p(\{\omega\}) = p(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$

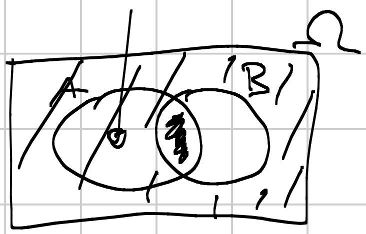
Per $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad p(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

In generale $\quad p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$

Proprietà

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \subseteq B$ $\quad P(A) \leq P(B)$

Definiamo $\quad p(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{|A \cap B|}{\cancel{|\Omega|}} \cdot \dfrac{\cancel{|\Omega|}}{|B|} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|}$



Diciamo che A e B sono indip. (sotto p) se

$$p(A|B) = p(A) \quad e \quad p(B|A) = p(A)$$

Se A e B sono indip. allora $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ed è un se e solo se

$$\Rightarrow \underbrace{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)} \overset{\text{indip}}{=} P(A) \cdot P(B)$$

Esempio Qual è la prob. che il prodotto di due dadi sia un multiplo di 5?

modo 1: enumerazione (con attenzione a non contare cose 2 volte)

modo 2: "esce 5 sul primo" o "non 5 sul 1° e 5 sul 2°"

$$P(D_1 = 5) + P(D_2 = 5 \mid D_1 \neq 5)\, P(D_1 \neq 5)$$

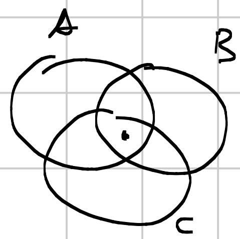
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

modo 3: via complementare

$$1 - P(D_1 \neq 5 \cap D_2 \neq 5) = 1 - P(D_1 \neq 5)\, P(D_2 \neq 5)$$
$$= 1 - \frac{25}{36}$$

Principio di inclusione - esclusione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) +$$
$$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A)$$
$$+ P(A \cap B \cap C)$$

Possiamo anche ricavarne delle stime dall'alto e dal basso a seconda di dove ci fermiamo.

Esempio 2 giocatori $\overset{A,B}{\vee}$ lanciano a turno una p-moneta

$$P(A) = p + (1-p)(1-p)P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(B) \qquad P(A) = p + (1-p)P(B)$$
$$= p + (1-p)(1 - P(A))$$

$P(\text{vince } 1^\circ \text{ giocatore}) = \underset{\overset{\shortparallel}{p}}{P(1^\circ \text{ vince subito})} + P(1^\circ \text{ non vince})\, P(2^\circ \text{ ... vince} \mid 1^\circ \text{ non vince})$

Es: Si scelgono 7 interi distinti in $\{1 \ldots 20\}$.

$P(\text{il secondo più piccolo sia } 5)$

$$\frac{\text{7-ple con 5 al } 2^\circ \text{ posto}}{\text{tutte le 7-ple}} = \frac{1 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{20-5}{5}}{\binom{20}{7}}$$

Double counting

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

non ci interessa!

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Esempio: A un party partecipano $12k$ persone. Ciascuno stringe la mano a esattamente $3k+6$ persone.

Si sa che esiste N t.c. per ogni coppia (A, B) il numero di invitati che stringe la mano sia ad A sia a B è esattamente N.

Per quali k (interi) è possibile questa situazione?

$((A, B),\ \text{terza persona})$ $\qquad a_{ij}$ è 1 se terza non è nella coppia e stringe la mano a entrambi A, B; 0 altrimenti

1. Fisso la coppia $\quad N \cdot \binom{12k}{2} = N \cdot \frac{12k \cdot (12k-1)}{2}$ = # strette di mano

2. Fisso il "terzo" $\quad \binom{3k+6}{2} \leftarrow$ numero di coppie cui stringe la mano $\quad 12k \cdot \binom{3k+6}{2}$ " # strette di mano

A questo punto uguagliamo le due scritture e vediamo che vincoli ci sono su k.
Per concludere devo comunque mostrare una configurazione valida per quei k.

IMO 2022 - 1

monete n : A $\quad n$: B

Milena le allinea in qualche modo. catena := seq. monete consecutive stesso tipo

Fissato $k \le 2n$ Milena fa quanto segue ripetutamente

guarda la k-sima moneta e prende la catena massima con essa e sposta tutta la catena all'inizio della fila. Per esempio: se $n=4$ e $k=4$ da

$$AA\overbrace{BBB}ABA \to BBB\overbrace{AAA}BA \to AAA\overbrace{BBBB}A \to BBBBAAAA$$

Determinare (n,k) con $1 \le k \le 2n$ t.c. <u>per ogni disp. iniziale</u> a un certo punto le n monete a sx sono dello stesso tipo.

- Se $k < n$ $\quad \overbrace{A \ldots A}^{n-1} BAB \overbrace{\_\_\_ B}^{n-1}$ non posso vincere
- se $k > \left\lceil \frac{3}{2} n \right\rceil$ $\quad$ idea: 4 catene di lunghezza "$\frac{n}{2}$"

$$AABBAA \overset{3/2 n}{/} BB$$

se pari no problem

se dispari $\quad 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ e due $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

se i blocchi sono 2 o 3 ✓

consideriamo almeno 4 blocchi

- non possiamo toglierli all'inizio
- se togliamo dal centro il # blocchi diminuisce
- per toglierlo dal fondo deve essere lungo > $n/2$

per ensuring cclo ⇒ 4 blocchi > $n/2$ ⇒ lunghezza > 2n 4

$p \in (0,1)$

Esempio: Lancio $n^{7/2}$ p-monete. Vinco se ottengo 2 teste cons.

Con che prob. non vinco? ←

- 1° due lanci Teste p^2
- $n=3$ $\underline{1-(p^2+(1-p)p^2)}$ ← non vero: non sto contando i casi con alternanza T.C

$$(1-p)^0 p^2 + (1-p)p^2 + (1-p)^2 p^2 \dots + (1-p)^{n-2} p^2 = p^2 \left(1 + (1-p) + (1-p)^2 \dots\right)$$

guardo se non ho 2 Teste cons. in n lanci

$p_n = P(1°$ testa $2°$ croce e poi mai 2 teste$) + P(1°$ croce e poi mai 2 teste$)$

$= \underbrace{(1-p)\, p_{n-1}} + \underbrace{p(1-p)\, p_{n-2}}$

$p(1-p)p^2 \dots$

Problemi: 108, 110, 111, 112
121, 122, 123, 124

108 Catalan (ne possiamo scrivere in tanti modi)

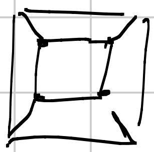
111 stars & bars

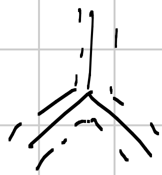
112 $$p(n,k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n \\ 1 & k = n \\ p(n-1,k-1) + p(n-k,k) \end{cases}$$

121 $$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} \qquad (n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

122 $F + V = S + 2$

$\underline{1} + 2 = 1 + 2$





per ogni spigolo ho 2 facce

$$2S = nF$$
$$2S = mV$$

$$\frac{2S}{n} + \frac{2S}{m} - S = 2$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} n \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

$n = 3 \quad m = 3$

$n = 3 \quad m = 4 \qquad n = 4 \quad m = 3$

$n = 3 \quad m = 5 \qquad n = 5 \quad m = 3$