Algebra 1 Advanced - Max F

Titolo nota

POLINOMI

(I) Studiare polinomi fissati da certe funzioni

(II) Interpolazione

(III) Stimare il valore dei coefficienti di un polinomio

(I) Trovare $P \in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(x) = P(-x)$?

$\exists\, Q \in \mathbb{R}[x]$ tale che $P(x) = Q(x^2)$

Il problema generico è il seguente: voglio trovare, dato $n \in \mathbb{N}$ e $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, i polinomi $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $\forall i$ valga

$F(\phi_i(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n) \;\forall x_1, \dots, x_n$

(1) $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dove la ϕ_i manda $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)$.

Siccome ogni permutazione si ottiene da una serie di trasposizioni di consecutivi, F è simmetrico.

$\Rightarrow \exists\, G \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ t.c. dette $e_1, \dots, e_n$ le funzioni simmetriche elementari, valga

$F(x_1, \dots, x_n) = G(e_1, \dots, e_n)$

Se G non fosse unico, esisterebbe $\tilde{G}$ tale che $\tilde{G}(e_1, \dots, e_n) = F(x_1, \dots, x_n)$, $H = G - \tilde{G} \Rightarrow$

$H(e_1, \dots, e_n) = 0$

Metodo 1: dimostrare che $(e_1, \dots, e_n)$ prende un ipercubo. (Es. per casa)

Metodo 2: $H(e_1, \dots, e_n) \equiv 0$ come polinomio $\Rightarrow H(e_1, \dots, e_n) \equiv 0$ anche in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Ma $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e_1, \dots, e_n)$ è surgettiva in $\mathbb{C}$ (radici di $t^n - e_1 t^{n-1} + e_2 t^{n-2} - \dots$)

---

(1) Trovare tutti i polinomi $P \in \mathbb{C}[x]$ tali che $P(x) = P(ax+b)$ $\forall x \in \mathbb{C}$, dove $a, b \in \mathbb{C}$ sono fissati.

(2) Se $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ soddisfa $F(x, y, z) = F(y, z, x)$ esiste un'unica scelta di polinomi $P, Q \in \mathbb{R}[x, y, z]$ tali che
$$F(x, y, z) = P(e_1, e_2, e_3) + (x-y)(y-z)(z-x)\,Q(e_1, e_2, e_3)$$

(3) Se $F \in \mathbb{R}[x, y]$ soddisfa $F(x, y) = F(y, -x)$ allora $\exists P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ con
$$F(x, y) = P(x^2+y^2, x^2y^2) + xy(x^2-y^2)\,Q(x^2+y^2, x^2y^2)$$

(4) Trovare i $F \in \mathbb{R}[x]$ tali che $\forall x \in [0, 1]$ valga
$$F(2x) = F(x + \sqrt{3-3x^2})$$

(5) Se $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ soddisfa
$$F(x, y, z) = F(x, y, xy-z) = F(x, xz-y, z) = F(yz-x, y, z)$$
esiste $P \in \mathbb{R}[t]$ con $F(x, y, z) = P(x^2+y^2+z^2-xyz)$

---

(1) Se a non è radice dell'unità P costante

Approccio 1: itero $x \mapsto ax+b$, che a un certo punto stabilizza $\Rightarrow$ problemi se a non è radice.

Approccio 2: prendo $P(ax+b) - P(x)$ e guardo il primo coefficiente.

$a=1$ ho $P(x) = P(x+b)$. Se $b \neq 0$ costante.

Se $b=0 \Rightarrow$ tutti i polinomi

Se $b=0$ abbiamo $P(x)=P(ax)$. Se n è ordine della radice dell'unità, $P(x)=Q(x^n)$

$P(x)=P(-x) \Rightarrow P(x)=Q(x^2)$

$P(x)=P(b-x) \Rightarrow P(x)=Q(x(b-x))$

$P(x)=P(ax) \Rightarrow P(x)=Q(x^n)$

$P(x)=P(ax+b)$. Cambio di variabile lineare $y=x+k$ in modo che $P(y)=P(ay)$.

---

(5) IMOSL 2019/A6

(2) $f(x,y,z)=F(x,y,z)+F(x,z,y) \Rightarrow f$ simm

$\Rightarrow f(x,y,z)=\tilde{f}(e_1,e_2,e_3)$

$g(x,y,z)=F(x,y,z)-F(x,z,y) \Rightarrow g$ antisimmetrico $\Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x) \mid g(x,y,z)$ e il quoziente è simmetrico

$\Rightarrow g(x,y,z)=\tilde{g}(e_1,e_2,e_3)(x-y)(y-z)(z-x)$

$\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{1}{2}\tilde{f}(e_1,e_2,e_3)+\frac{1}{2}(x-y)(y-z)(z-x)\tilde{g}(e_1,e_2,e_3)$

(3) Intanto $F(x,y)=F(-x,-y) \Rightarrow$ se compare $x^a y^b$ devo avere $a+b$ pari.

(i) La parte pari sarà anche simmetrica $\Rightarrow$ se m,n pari il coeff. di $x^m y^n$ e $x^n y^m$ è lo stesso $\Rightarrow P(x^2+y^2, x^2y^2)$

(ii) La parte dispari è antisimm. $\Rightarrow x^m y^n$ e $x^n y^m$ hanno coeff. opposti se m,n dispari

Wlog $m>n$.

$$x^m y^n - x^n y^m = (xy)^n (x^{m-n} - y^{m-n}) =$$
$$= \underbrace{(xy(x^2-y^2))}\ \underbrace{(xy)^{n-1}(x^{m-n-2} + x^{m-n-4}y^2 + \ldots + y^{m-n+2})}$$

simm. e solo di grado pari $\Rightarrow$ polinomio in x^2+y^2, x^2y^2

---

(4) $F(2x) = F(x+\sqrt{3-3x^2})$ per $x\in[0,1]$

Se $x=\cos\theta$ e $0\leq\theta\leq\pi/2$

$$\underbrace{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}_{\substack{\| \\ x+\sqrt{3-3x^2}}} = 2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$F(2\cos\theta) = F\left(2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right) \text{ per } \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Esercizio: dimostrare il principio d'identità per i polinomi trigonometrici

Se ho $f(\cos\theta) = f\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ dimostro che $f(x) = P\left(\underbrace{(x-\cos\theta)(x-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\ldots(x-\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{3}\right))}_{5}\right)$

Dimostro che $\prod_{k=0}^{5}\left(x-\cos\left(\theta+\frac{k\pi}{3}\right)\right)$ è il polinomio più piccolo fissato dal mandare

$$\cos\varphi \mapsto \cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$$

PARTE II–III. Coefficienti e interpolazione

(1) Trovare tutte le coppie intere (a,b) t.c. esistano $n\in\mathbb{N}$ e $c_n,\ldots,c_0\in\{+1,-1\}$ con

$x^2+ax+b \mid c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$

(2) Al variare tra i reali $c>0$ trovare (se esiste) il minimo n t.c. $\exists f, g \in \mathbb{R}[x]$ con coefficienti ≥ 0, $\deg f = n$ e

$$x^2 - cx + 1 = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(3) Dimostrare il combinatorial Nullstellensatz seguendo questi passaggi:

(a) Siano $S_1, \dots, S_n$ insiemi finiti di reali e $t_i \in \mathbb{N}$ con $|S_i| = t_i + 1$ $\forall i$. Se $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ soddisfa $\deg_{x_i} f \leq t_i$ $\forall i$ e $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ per ogni scelta di $a_i \in S_i \Rightarrow f \equiv 0$

(b) Dati insiemi come sopra e $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, siano $g_i \in \mathbb{R}[t]$ dati da $g_i(t) = \prod_{a \in S_i} (t-a)$. Se $d = \deg f$ e $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ ogniqualvolta $a_1 \in S_1, \dots, a_n \in S_n$, esistono polinomi $h_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ con $\deg h_i \leq d - t_i - 1$ e

$$f = h_1 g_1 + \dots + h_n g_n.$$

(c) Dati insiemi come sopra e $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ di grado $t_1 + \dots + t_n$ in cui il coefficiente di $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ è $\neq 0$, esistono $a_i \in S_i$ con $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

(4) Siano $m, n \geq 2$ interi. Sia $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ con $f(x_1, \dots, x_n) = \left\lfloor \frac{x_1 + \dots + x_n}{m} \right\rfloor$ $\forall x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Tesi: $\deg f \geq n$

(1) Idea: data α radice di $c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ ho $|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} + \dots + |\alpha| + 1 \Rightarrow |\alpha| < 2$
$\Rightarrow x^2 + ax + b$ ha radici di norma < 2.
Per divisibilità $|b| = 1$. Inoltre se α_1, α_2 hanno $|\alpha_1|, |\alpha_2| < 2$ ho $|\alpha_1 + \alpha_2| < 4 \Rightarrow |a| \leq 3$.
Di queste 14 possibilità alcune funzionano, mentre altre hanno radici di norma ≥ 2.

---

(4) $f(x_1, \dots, x_n) = \left\lfloor \frac{x_1 + \dots + x_n}{m} \right\rfloor$ per $x_i \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 2$, $0 \leq x_i < m$
$\Rightarrow \deg f \geq n$.

Suppongo per assurdo che $\deg f < n \Rightarrow$ applicando n volte differenze finite ottengo:

$$\Rightarrow \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} f(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_n + \varepsilon_n) = 0$$

Se scelgo $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, m-2\}$ ottengo

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} \left\lfloor \frac{x_1 + \dots + x_n + (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)}{m} \right\rfloor = 0.$$

Per ogni N che può essere scritto come somma di $x_1 + \dots + x_n$ con $0 \leq x_i \leq m-2$ (ossia $0 \leq N \leq n(m-2)$) vale la relazione

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left\lfloor \frac{N+k}{m} \right\rfloor = 0.$$

Vale per tutti i valori di N? Sicuramente se vale per N vale per $N+tm$ con $t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Se $n(m-2) \geq m-1$ vale effettivamente per tutti gli $N \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$ è un polinomio di grado $\leq n-1$, assurdo.

Se $m \geq 3$ riusciamo a concludere. Se $m=2$ lo lascio per esercizio (dividete esplicitamente pari e dispari)

$$\left\lfloor \frac{N+k}{m} \right\rfloor = \left(\frac{N+k}{m} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}(-1)^{N+k}.$$

$$\sum = 0 \qquad \sum = (-1)^N \cdot (\neq 0)$$

---

(3) (a) $S_1, \dots, S_n$ con $|S_i| = t_i + 1$. Se $\deg_{x_i} f \leq t_i$ e f si annulla in tutti i punti di $S_1 \times \dots \times S_n$, allora $f \equiv 0$.

Dim. Induzione:

Scrivo $f(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_2, \dots, x_n) x_1^{t_1} + f_{t_1 - 1}(x_2, \dots, x_n) x_1^{t_1 - 1} + \dots$

Per ogni scelta di $(x_2, \dots, x_n) \in S_2 \times \dots \times S_n$, $f(x_1, a_2, \dots, a_n)$ è polinomio di grado $\leq t_1$ che si annulla in $t_1 + 1$ punti $\Rightarrow$ coefficienti sono 0 $\Rightarrow$ finisco per ipotesi induttiva

(b) Se f si annulla in $S_1 \times \dots \times S_n$ allora

$f = h_1 g_1 + \dots + h_n g_n$ dove $g_i(t) = \prod_{a \in S_i} (t-a)$

e $\deg h_i \leq \deg f - t_i - 1$

Faccio iterativamente divisione euclidea.
Divido f per g_1, ottengo un resto $f_1 = f - h_1 g_1$ con $\deg_{x_1} f_1 \leq t_1$ e poi $\deg h_1 \leq \deg f - \deg g_1$.
Itero e ottengo $f_n = f - h_1 g_1 - \dots - h_n g_n$ con $\deg_{x_i} f_n \leq t_i \Rightarrow f_n \equiv 0$ per il punto (a).
(c) Se f ha grado $t_1 + \dots + t_n$, il coeff. di $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ è $\neq 0$ allora $\exists (a_1, \dots, a_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ t.c. $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.
Per assurdo $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ per ogni $a_i \in S_i$.
$f = h_1 g_1 + \dots + h_n g_n$. Ma nessuno di questi prodotti può partorire il monomio $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$.

---

(2) $x^2 - cx + 1 = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Avrò $x^2 - cx + 1 > 0 \ \forall x \Rightarrow c < 2$.
Con $n = 3$ cosa riesco a fare?
$(x^2 - cx + 1)(x+1) = x^3 + (1-c)x^2 + (1-c)x + 1$
$\Rightarrow c \leq 1$ funziona
Per $n = 4$ posso notare che
$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$
$c \leq \sqrt{2}$ funziona.
Euristica 1: riconosco i coseni
Euristica 2: nel caso limite ho $f(x) = x^n + 1$.
Euristica 3: guardo le disuguaglianze esplicit.

$g(x) = a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ e impongo che i coefficienti di $(x^2 - cx + 1)g(x)$ siano ≥ 0.

$a_{n-2} \geq 0$ ✓

$a_{n-3} \geq c a_{n-2}$

$a_{n-2} + a_{n-4} \geq c a_{n-3}$

$\vdots$

$a_2 + a_0 \geq c a_1$

$a_1 \geq c a_0$

Per risolvere il sist. di disequazioni, l'idea è di studiare la soluzione al sistema di equazioni corrispondente ⇒ capire i coefficienti per cui moltiplicare.

(i) Costruisco l'esempio dato da, detto $c = 2\cos\theta$, $a_k = \sin((k+1)\theta)$

(ii) Moltiplico ciascuna disuguaglianza per $\sin(k\theta)$, sommo tutto e concludo.