Senior 25 A2 advanced

Titolo nota

Problema: Gioco:

Filippo e Barbara fanno un gioco, sulla lavagna inizialmente c'è

$$x^{2n} + \square x^{2n-1} + \square x^{2n-2} + \dots + \square x + 1$$

e si alternano riempiendo con un numero reale un quadrato vuoto, Inizia Barbara. Se il polinomio non ha radici reali vince Barbara, senno vince Filippo. Chi vince?

$$x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + 1$$

Try,

Esiste una strategia che condanna Barbara al primo turno: se Barbara non gioca su x^2, ci può giocar Filippo, mettendo un numero molto negativo:

Genera una zona di valori x_i

con $x_i \leq 0$ e $p(x_i) \leq 0$

e $x_j \geq 0$ con $p(x_j) < 0$

Ma basterà ne può gestire uno solo

perché x^{2n+1} cambia segno tra ≤ 0, > 0

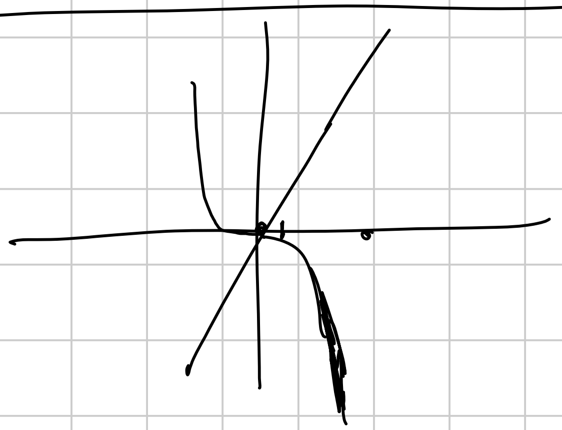
$\to x^2$ se rimangono

due potenze dispari chi vince?

Oss.: praticamente tutti i termini precedenti sono quasi irrilevanti.

se un polinomio tipo

$$\boxed{x^{2m+1} - a x^{2k+1} > 0}$$



$+\varepsilon$

Si può per esempio considerare valori simmetrici sull'origine: $p(x) = -p(-x)$, basta quindi stimare

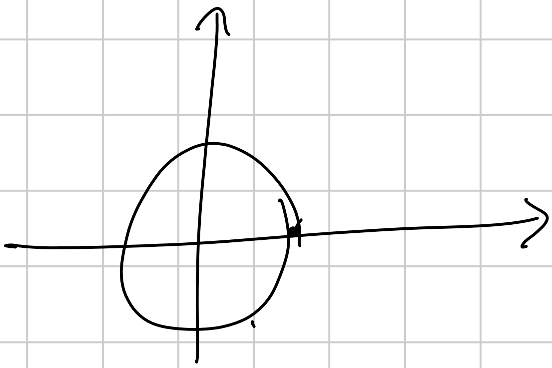
~~$\varepsilon + p(x)$~~ $\min|p(x)| > \varepsilon$

2° problema: Sia $P(x)$ polinomio monico a coefficienti interi con tutte le radici di modulo 1. Dimostra che sono radici dell'unità

$$\left(P(\omega)=0 \quad , \exists n \mid \omega^n = 1\right)$$

Oss: Tutte le componenti irriducibili hanno le proprietà dell'ipotesi e la tesi si può ridurre su queste.

Casi piccoli deg = 2



~~Se abbi~~

Abbiamo che le radici sono coniugate $\omega, \bar{\omega}$, ma sappiamo quindi

$$\underset{\substack{\| \\ 2\,Re(\omega)}}{\omega + \bar{\omega}} = \text{intero} \qquad |\omega+\bar{\omega}| \leq |\omega| + |\bar{\omega}| \leq 2$$

Stime sui coefficienti

Ora sappiamo che $\sum_{\substack{sym \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \ldots}} \omega_{i_1}\omega_{i_2} \ldots$ che sono i coefficienti $\Rightarrow \in \mathbb{Z}$

Fatto noto: con i coefficienti del polinomi simmetrici possiamo trovare le potenze simmetriche

$$P_n = \sum_{i=1}^{deg} \omega_i^n \in \mathbb{Z}$$

Oss le disuguaglianze sono strette nell'ipotesi

Oss $-deg \leq \sum_{i=1}^{deg} \omega_i^n \leq deg$ $\rightarrow$ DISU TRIANGOLARE

Vorremmo provare ad usare il fatto che un valore è preso infinite volte.

Ridurre il grado usando il polinomio e esprimere in funzione delle precedenti

$$\sum \omega_i^{deg} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{deg} a_i \omega_j^i$$

Idea: Potremmo sperare di scegliere n t.c. che $\omega_i^n \sim 1$ per ogni radice, questo concluderebbe:

$\forall i$ $|\omega_i^n - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum(\omega_i^n) \geq deg - deg\,\varepsilon$

$\theta_i = \arg(w_i)$ Allora essere vicino a 1

si traduce in $\frac{n\theta_i}{2\pi} \sim \mathbb{Z}$

Dato un numero reale $r \in \mathbb{R}$,

se consideriamo i numeri

$A = \{r \quad 2r \quad 3r \quad \dots \quad nr\}$

$\exists m, \exists a \in A$ t.c. $|a - m| < \frac{1}{n}$

To do Dimostrare Dirichlet.

Dati sei reali $r_1, \dots, r_n$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \, \exists m_i \in \mathbb{Z}$ t.c. se ~~...~~

$$|n r_i - m_i| < \varepsilon$$

Induzione! Assumiamo per n di saperlo e dimostriamo $n+1$

$k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\frac{1}{k} < \varepsilon$

allora preso nella tesi per n

$$\varepsilon = \frac{1}{K^2}$$

abbiamo un n t.c.

$$|h r_i - m_i| < \frac{1}{K^2} \qquad i \leq n$$

Allora presi i multipli di

n a n a nK

sappiamo vale an cora $|l r_i - m_i l| < \frac{1}{K}$

però possiamo applicare Dirichlet su il rimanente

Metodo polinomiale

Problema: abbiamo i punti

$(i, 2^i)$ $i = 1, \dots, 1\,000\,000$ "trovare" un polinomio di basso grado $P(x,y)$ che si annulla su tutti questi punti

Perché in tanto con grado n riesco a annullarmi in n punti con 1 variabile.

$ax^m + bx^n$ posso annullare qualsiasi punto con una opportuna combinazione di questi

$x^{\alpha_1}y^{\beta_1} + x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$ posso farlo anche con monomi di due variabili e segue semplicemente dalla linearità nel punto.

$$\alpha P_1(x_0, y_0) + \beta P_2(x, y) = (\alpha P_1 + \beta P_2)(x, y)$$

Se ho k monomi posso far annullare $k-1$ punti

Considero di aver fatto il caso base

$n+1$ punti da dover annullare

$n+2$ monomi

posso con $k+1$ monomi annullare i primi n

$\exists\, x^{\alpha} y^{\beta}$ CON COEFFICIENTE NON ZERO

ALLORA PRENDIAMO I RIMANENTI $n+1$ MONOMI E LI FACCIO ANNULLARE TUTTI I PUNTI TRANNE ~~IL PRIMO~~ L'ULTIMO

ALLORA UN'OPPORTUNA COMBINAZIONE ANNULLA ANCHE L'ULTIMO E NON È ZERO NEL COEFFICIENTE ESCLUSO.

GRADO $\leq D$ QUANTI POLINOMI:

$$\binom{D+2}{2} \geq D^2/2$$

$D \leq 2000$ POSSIAMO ANNULLARE 2^{06} PUNTI

$$\binom{D+n}{n} \geq \boxed{D^n/n!}$$

Nyco dim set: un insieme S di $\mathbb{Z}_p^n$ è un insieme Nycodim se se qualsiasi punto x $\exists\, L(x)$

t.c. $L(x) / \{x\} \subseteq S$

stime su quanto grande al minimo questo insieme

$C_n = (\partial n)^{-n}$ t.c. $|S| \geq C_n p^n$

Kakeya set S: $\mathbb{Z}_p^n$ per ogni direzione esiste una retta L con questa direzione con $L \subseteq S$

Una retta in questi spazi viene definita così

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + t\,(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

Se avete una iper-scatola di lati $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$

qual è il minimo grado di un polinomio che annulla $l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4 \ldots \times l_n$?

Nikodym: dalle stime di $\frac{D^n}{h^i}$ si può determinare che esiste p di grado $p-2$ che si annulli su tutto $|S|$

Ma allora preso x e $L(x)$ se sostituisco $a+bt$ dentro p ottengo un polinomio di grado $<p-1$ che si annulla per $p-1$ punti

questo vuol dire che è identicamente nullo. e si annulla in x.

Ma allora copre l'intero $\mathbb{Z}_p^n$ ma allora deve avere grado $\geq p$ per il combinatorial nullstellensatz su $\mathbb{Z}_p$

$$\vec{a} + t_1 \hat{x} + t_2 \hat{y}$$

Nurcy a: l'idea: bisogna guardare ai termini che dipendono solo da b nella sostituzione di $a t + b t$ in p, (definito come primo che si annulla nell'insieme)