

Algebra 3 Advanced - Max Focchi

Titolo nota

Le disuguaglianze funzionali e altri animali

Una dis. funzionale è un problema che chiede di trovare tutte le funzioni $f: S_1 \rightarrow S_2$ (dove tipicamente $S_1, S_2 = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$) che soddisfano $\forall x_1, \dots, x_n \in S_1$ una relazione del tipo
$$f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

Come affrontare disuguaglianze funzionali?

- Valgono tutte le cose che valgono per le normali equazioni funzionali
- Vi aspettate che la disuguaglianza sia sharp
e.g. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
- Nei casi particolarmente fortunati, scopro che la disuguaglianza del testo è in realtà uguaglianza $\forall x_1, \dots, x_n \in S_1$, anche se sharp può avere un significato diverso.
- Beanca standard: cercare di dimostrare che una certa quantità è sia ≥ 0 sia ≤ 0 .
- Come per le funzionali in $\mathbb{R}^+$, posso sperare di dimostrare proprietà più "analitiche" della funzione (e.g. crescita/decrescita) e quindi applicare tecniche di analisi, come limiti e stime asintotiche.

-
1. Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \leq 3f(x+2y+3z)$$
 2. Trovare tutte le $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x^5+x) \leq x \leq f(x)^5+f(x)$$

3. Sia, per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la diseq. $f(xy) + f(x-y) \geq f(x+y)$

(a) $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(b) Ha soluzioni non costanti

(c) Ha soluzioni illimitate

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(xy) \leq y f(x) + f(y)$

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(xy) \leq x f(y)$

6. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

(a) $f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)}{2}$

(b) $\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y}$

7. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$

8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\exists a > 0$ con $f(a) \geq 0$ e

$$f(x) - f(y) \geq (x-y)f(x-y)$$

9. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con $f(n+1) > f^{(n)}(n)$ dove

$$f^{(n)}(n) = \underbrace{f(f(\dots(f(n) \dots)))}_{n \text{ volte}}$$

1. $f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \leq 3 f(x+2y+3z)$

Guess: sarà un'uguaglianza $\Rightarrow f$ costante.

$(t, 0, 0)$: $2f(t) + f(0) \leq 3f(t) \Rightarrow f(t) \geq f(0)$

$(t, t, -t)$: $f(2t) + 2f(0) \leq 3f(0) \Rightarrow f(2t) \leq f(0) \Rightarrow f$ cost.

2. $f(x^5+x) \leq x \leq f(x)^5+f(x)$. $\varphi(t) = t^5+t$

$$f(\varphi(x)) \leq x \leq \varphi(f(x))$$

Esiste $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente inversa di φ

$$x \leq \varphi(f(x)) \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(\varphi(f(x))) = f(x)$$

$$f(\varphi(x)) \leq x \Rightarrow f(\varphi(\psi(x))) \leq \psi(x) \Rightarrow f(x) \leq \psi(x) \Rightarrow f = \psi$$

3. $f(xy) + f(x-y) \geq f(x+y)$

(*) Se mettiamo $xy = x+y$ ho $x \neq 1$ e $y = \frac{x}{x-1}$

~~$$f(xy) + f(x-y) \geq f(x+y)$$~~

$$f\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Si verifica facilmente che $\frac{x^2-2x}{x-1} = k$ ha soluzioni per ogni $k \in \mathbb{R} \Rightarrow f \geq 0$

(b) Dato $a > 0$ si vede facilmente che tutte le funzioni con $a \leq f(x) \leq 2a$ sono soluzioni.

(c) Tentativo: $f(t) = t^2 + a$

$$x^2y^2 + a + x^2 - 2xy + y^2 + a \geq x^2 + 2xy + y^2 + a$$

$$x^2y^2 - 4xy + a \geq 0 \quad \text{vero per } a \geq 4$$

4. $f(xy) \leq yf(x) + f(y)$

(x, -y): $f(-xy) \leq -yf(x) + f(-y)$

$$f(xy) + f(-xy) \leq f(y) + f(-y) \quad Q(x, y)$$

Se $x \neq 0$ otteniamo, usando $Q(\frac{1}{x}, xy)$:

$$f(y) + f(-y) \leq f(xy) + f(-xy)$$

Questo mi permette di concludere che $f(t) + f(-t) = C$
cost. fissata $\forall t \neq 0$

In realtà, se $x \neq 0$, $Q(x, y)$ è un'uguaglianza.
Ne segue che $P(x, y)$ (almeno per $x \neq 0$) è un'uguaglianza.

$$f(xy) = yf(x) + f(y) \quad \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}$$

$$(1, 1): f(1) = 0$$

$$(-1, t): f(-t) = t f(-1) + f(t)$$

$$C - f(t) = Ct + f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{C}{2}(1-t).$$

$$5. f(xy) \leq x f(y)$$

Se $x \neq 0$, sostituisco

$$(\frac{1}{x}, xy): f(y) \leq \frac{1}{x} f(xy)$$

$$\text{Se } x > 0 \text{ ottengo } f(xy) \geq x f(y) \Rightarrow f(xy) = x f(y)$$

$$\text{Se } x < 0 \quad x f(y) \geq f(xy), \text{ che è esattamente il test.}$$

Se fissiamo $A = f(1)$, $B = f(-1)$ abbiamo, per $t > 0$,
 $f(t) = At$, $f(-t) = Bt$.

$$(x, 0): f(0) \leq x f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Se $y = 0$ il test è verificato, come se $x = 0$

$$\text{Se } x, y > 0 \quad Axy \leq Axy \quad \checkmark$$

$$\text{Se } x > 0, y < 0 \quad -Bxy \leq -Bxy \quad \checkmark$$

$$\text{Se } x < 0, y > 0 \quad -Bxy \leq Axy \Rightarrow A + B \leq 0$$

$$\text{Se } x, y < 0 \quad Axy \leq -Bxy \Rightarrow A + B \leq 0$$

Tutte le soluzioni sono $f(t) = \begin{cases} At & \text{se } t \geq 0 \\ -Bt & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$ con

$$A+B \leq 0,$$

6. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$(a) \quad f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)^2}{2} \quad (b) \quad \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y}$$

$$(t, t): (a) \quad 2f(t) \leq \frac{f(2t)^2}{2} \quad (b) \quad \frac{2f(t)}{t} \geq \frac{f(2t)}{2t}$$

$$\Rightarrow f(2t) = 4f(t)$$

$$\text{Tentativo: } f(t) = \alpha t^2$$

Per la (a), $\alpha x^2 + \alpha y^2 \leq \frac{\alpha(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha(x-y)^2}{2} \leq 0$
 vero se $\alpha \leq 0$

Suppongo per assurdo $\exists k$ con $f(k) > 0$.

$$\text{Avremo } f(x+y) \geq 2f(x) + 2f(y) \\ \Rightarrow f(x+k) > 2f(x)$$

$$f\left(\frac{k}{2}\right) > 0 \Rightarrow f\left(x + \frac{k}{2}\right) > 2f\left(x + \frac{k}{2}\right) > 4f(x)$$

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) > 0 \Rightarrow f\left(x + \frac{k}{2^n}\right) > 2f\left(x + \frac{k}{2^n}\right) > \dots > 2^{2^n} f(x)$$

Se mettiamo $f(x) > 0$ ho un assurdo.

$$\text{Def: } g(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

$$\text{La (b) mi dice che } g(x+y) \geq g(x) + g(y)$$

$$g(2x) = 2g(x), \quad g(4x) = 4g(x)$$

$$g(3x) \geq g(2x) + g(x) = 3g(x)$$

$$g(3x) \leq g(4x) - g(x) = 3g(x)$$

$$\Rightarrow g(3x) = 3g(x)$$

Claim - $g(nx) = ng(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Induttivamente, per ogni k , se $n \in \mathbb{N}$ con $2^{k-1} < n \leq 2^k$,
 voglio $g(nx) = ng(x)$

$$g(nx) \geq g(2^{k-1}x) + g((n-2^{k-1})x) = ng(x)$$

$$g(nx) \leq g(2^k x) - g((2^k - n)x) = ng(x) \checkmark$$

$\Rightarrow g$ lineare su $\mathbb{Q}$ e crescente $\Rightarrow$ fine.

7. $f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 Nota che $f(x) < f(x)+y \Rightarrow f(x) > f(x+y)$
 $\Rightarrow f$ decrescente.

$f(x) = \frac{1}{x}$? $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{1}{x} + y\right)$ problemi perché
 RHS $\rightarrow 1$

Guess per l'insieme delle soluzioni: $\emptyset$

Risolviamo il testo come

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} \leq \frac{f(x)}{f(x)+y}$$

f decrescente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Per esempio, $\frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \frac{f(x)}{f(x)+1}$ (funzione crescente in $f(x)$)

Sia α t.c. $f(\alpha) < 1$

$$\frac{f(\alpha+1)}{f(\alpha)} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\alpha)+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha+1) < \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(\alpha+2)}{f(\alpha+1)} \leq \frac{f(\alpha+1)}{f(\alpha+1)+1} < \frac{1}{3} \Rightarrow f(\alpha+2) < \frac{1}{6}$$

Posso continuare e ottenere stime molto forti su

$f(x+n)$ per $n \in \mathbb{N}$, ma da qui è dovera ottenere un assurdo.

Idea: studio $f(x+1)$ in due colpi

$$\frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x)} \leq \frac{f(x)}{f(x)+\frac{1}{2}} < \frac{2}{3} \Rightarrow f(x+\frac{1}{2}) < \frac{2}{3}f(x)$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x+\frac{1}{2})} \leq \frac{f(x+\frac{1}{2})}{f(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} < \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

$$f(x+1) < \frac{8}{21}f(x)$$

Qual è il problema di questo tipo di ragionamento? È troppo ostinato a fissare il dominio e guardare quello che succede al codominio.

Idea: se $y \geq f(x)$, $f(x+y) \leq \frac{f(x)}{2}$.

Sia x_0 valore qualsiasi, def. successione con $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$; $f(x_{n+1}) \leq \frac{f(x_n)}{2}$.

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) \leq 2^{-n} f(x_0) \Rightarrow (x_n) \text{ converge a } L.$$

Ma $f(L) < f(x_n) \leq 2^{-n} f(x_0)$, che contraddice il fatto che $f(L) > 0$. $\Rightarrow$

$$8. f(x) - f(y) \geq (x-y)f(x-y) \quad \text{e } \exists a > 0 \text{ con } f(a) \geq 0$$

$$(x, 0): f(x) - f(0) \geq x f(x)$$

$$(0, x): f(0) - f(x) \geq -x f(-x)$$

$$0 \geq x f(x) - x f(-x)$$

$$\text{Se } x > 0 \text{ ottengo } f(x) \leq f(-x)$$

$$(x, -x): 0 \geq f(x) - f(-x) \geq 2x f(x) \Rightarrow f(2x) \leq 0$$

$$\text{Se } x > 0$$

In particolare $f(a) = 0$

$(x+a, x)$: $f(x+a) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(na) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$

Adesso fisso $k \in \mathbb{R}$. Se esistono x, y con $f(x) \geq f(y)$ e $x - y = k$ allora ho $0 \geq f(x) - f(y) \geq k f(k)$

$k f(k) \leq 0$ (se $k < 0$ ho $f(k) \geq 0$).

Ma li trovo prendendo $x = na$ per opportuno n e $y > 0$, concludo notando che $f(t) \leq 0$ per $t > 0$, $f(t) \geq 0$ per $t < 0$.
Insieme a $f(t+a) \geq f(t)$ mi permette di dire $f \equiv 0$.

9. $f(n+1) > f^{(2025)}(n)$. Ovviamente l'identità risolve.
Sia $k = \min\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ovviamente $f(n+1) \geq k \forall n$
 $\Rightarrow k$ valore preso soltanto da 0.

Allora $f(n) > 0$ per $n > 0$, quindi $f|_{\mathbb{Z}^+}: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ soddisferà esattamente la stessa ipotesi.

Inoltravamente, f strettamente crescente $\Rightarrow f(n) \geq n$.

Se avessi $f(n) \geq n+1 \Rightarrow f(f(n)) \geq f(n+1) \Rightarrow$
 $f^{(2025)}(n) \geq \dots \geq f(f(n)) \geq f(n+1) > f^{(2025)}(n)$
assurdo $\Rightarrow f(n) = n \forall n \in \mathbb{N}$.