G2 - Advanced

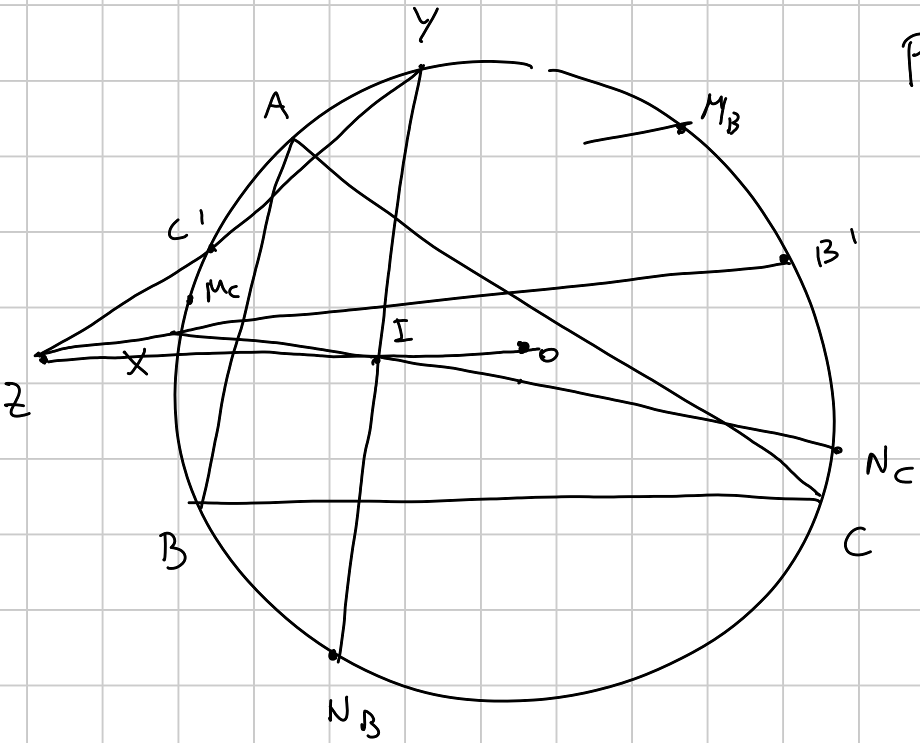
Titolo nota

1. ABC triangolo, ω circoscritta, I incentro
ω_B, ω_C le B, C-mistilinee interne.
$\omega_B \cap \omega = Y$, $\omega_C \cap \omega = X$, B', C' diametralmente opposti di B, C rispett. su ω.
$Z = B'X \cap C'Y$.
Dimostrare che $ZA = ZI$.

2 $ABCD$ ciclico (centro O) ℓ_A bisettrice interna di $\angle A$, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D definiti analogamente.
$\ell_A \cap \ell_B = X$, $\ell_B \cap \ell_C = Y$, $\ell_C \cap \ell_D = Z$, $\ell_D \cap \ell_A = W$
$AC \cap BD = P$.
a) $XYZW$ ciclico
b) $O \in (XYZW) \iff P \in (XYZW)$

3 Sia $ABCD$ quadrilatero ciclico
$AB \cap DC = P$. ℓ polare di P rispetto a $(ABCD)$
(Asse di AD) $\cap\, \ell = X$, (Asse di BC) $\cap\, \ell = Y$
Dimostrare $\angle XAO = \angle YBO$

SOL Problema 1



Passaggi chiave:

→ $Z \in M_B M_C \iff$ tesi

→ Capire che $Z\,O\,I$ allineati

Per convincersene ~~Bopp~~ Pascal su

$$\begin{matrix} N_B & X & C' \\ N_C & Y & B' \end{matrix}$$

I, Z

Basta dimostrare IO, $M_B M_C$, $B'X$ concorrono

poi analogamente con l'altra e fine

Facciamo Pascal su

$$\begin{matrix} M_C & X & B \\ B' & M_B & N_C \end{matrix}$$

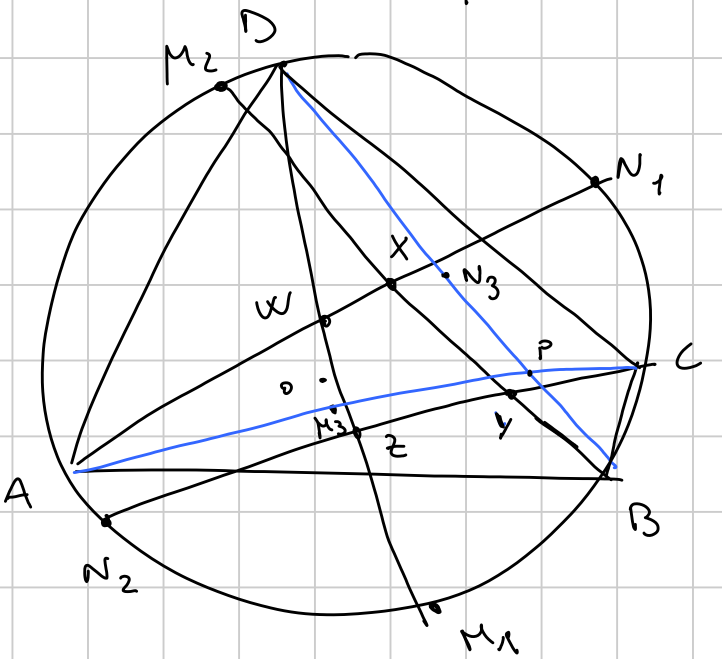
$M_B M_C \cap B'X = Z'$

$M_C N_C \cap BB' = O$

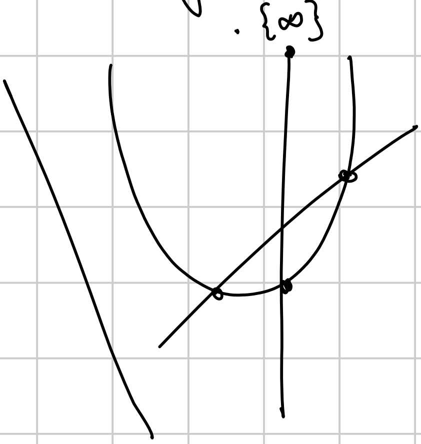
$XN_C \cap BM_B = I$

$\boxed{\text{MM}}$

Problema 2 EGMO 6 / 2022



Digressione sul teorema di Bezout



Se lavoriamo nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ allora le intersezioni (con molteplicità) di una retta con una conica sono sempre 2.

$(x:y:z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ e hanno non tutti nulli

$$x^2+y^2=1 \xrightarrow{\text{proiettivo}} x^2+y^2-z^2=0$$

$(\ : \ : 1)$

CONICA PROIETTIVA

$$\lambda x + \mu y + \xi z = 0$$

Posso definire una curva a partire da $P(x,y,z)$ poly OMOGENEO ($P(x,y,z)=0$ sono i punti della curva)

Teorema di Bezout

C curva di grado m, D curva di grado n.

Si intersecano in esattamente mn punti.

A meno che non abbiano fattori in comune.

Morale: se le 2 curve ~~cubiche~~ si intersecano in più di mn punti, allora c'è una componente comune.

Teorema di Cayley-Bacharach

C, D cubiche che si intersecano in 9 punti $P_1 \dots P_9$.

Allora se E cubica che passa per $P_1 \dots P_8$
$\Rightarrow$ passa anche per P_9

~~proof~~ Digressione: Se ho 2 curve A, B date da $P(x,y,z)=0$ e $Q(x,y,z)=0$ e stesso grado

posso definire $\mu A + \lambda B$

le soluzioni di $\mu P + \lambda Q = 0$

se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in A \cap B$ allora $\in \mu A + \lambda B \quad \forall \mu, \lambda$

Tornando a noi, dimostriamo il teorema.

Prendo $F_{\lambda,\mu} = \lambda C + \mu D$

$C \cap E$ per Bezout si intersecano in $P_1 \dots P_8, Q$

possiamo fine-tunare λ, μ in modo che

$$Q \in \lambda C + \mu D = F$$

questo mi implicherà che $F \cap C$ ha almeno 10 punti

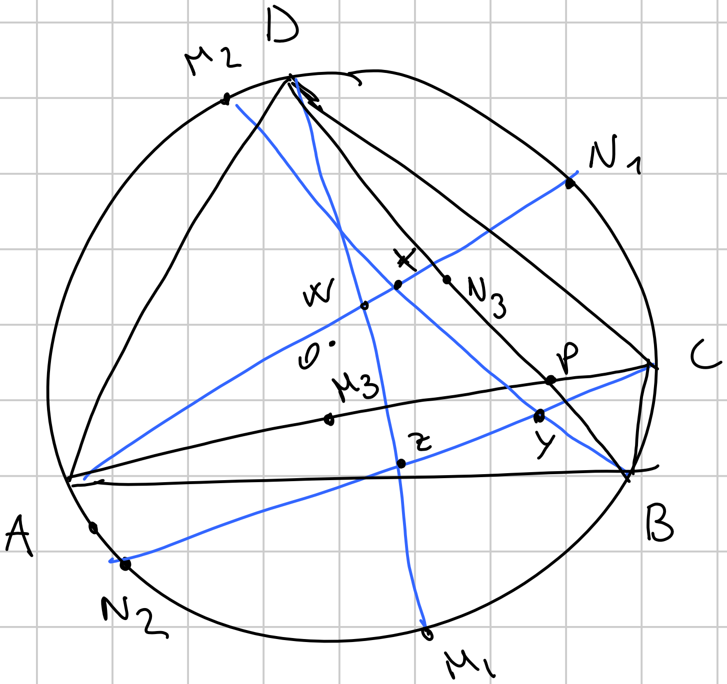
ASSURDO

ALTRA VERSIONE K rette ROSSE e K rette BW che si intersecano in K^2 punti

~~Alt~~ Allora se una curva di grado d passa per ~~...~~ Kd punti dei K^2

Allora i restanti punti stanno su una curva di grado $K-d$

Tornando al problema



N_1, N_2 punti medi archi BD

$M_1 M_2$ punti medi archi AC

N_3 pto medio di BD

M_3 pto medio AC

ABCD $N_1 N_2 N_3$ $M_1 M_2 M_3$
P O XYZW

l_A	l_C	BD	Asse di AC
A	C	B	M_1
W	Y	D	M_2
X	Z	P	M_3
N_1	N_2	N_3	O

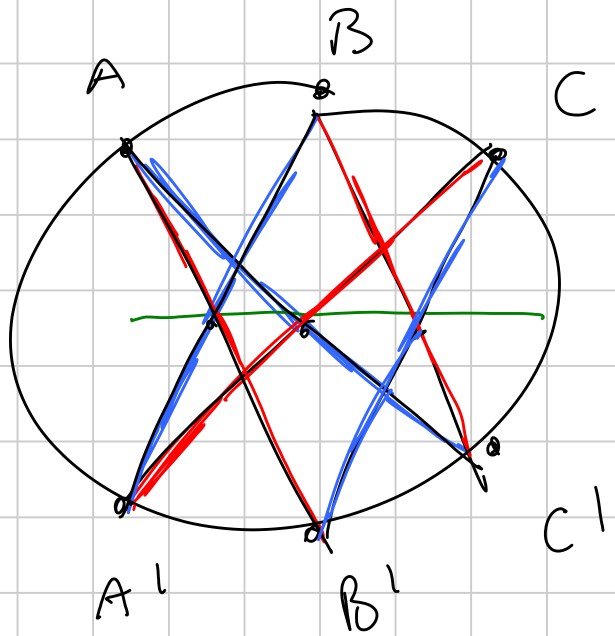
l_B	l_D	AC	Asse di BD
B	D	A	O
X	Z	C	N_1
Y	W	P	N_2
M_2	M_1	M_3	N_3

Ho 2 quadruple di rette che si intersecano in 16 punti e ho una circonferenza (grado 2) che ~~interse~~ passa per 8 punti
quindi per teorema su $k=4$ $d=2$ ho che

gli altri 8 punti stanno su curve di grado 2.

$\Rightarrow$ D P X Y Z W M_3 N_3 stanno sulla stessa conica!

ma ho 2 condizioni allora sono $\Leftrightarrow$ circonferenza

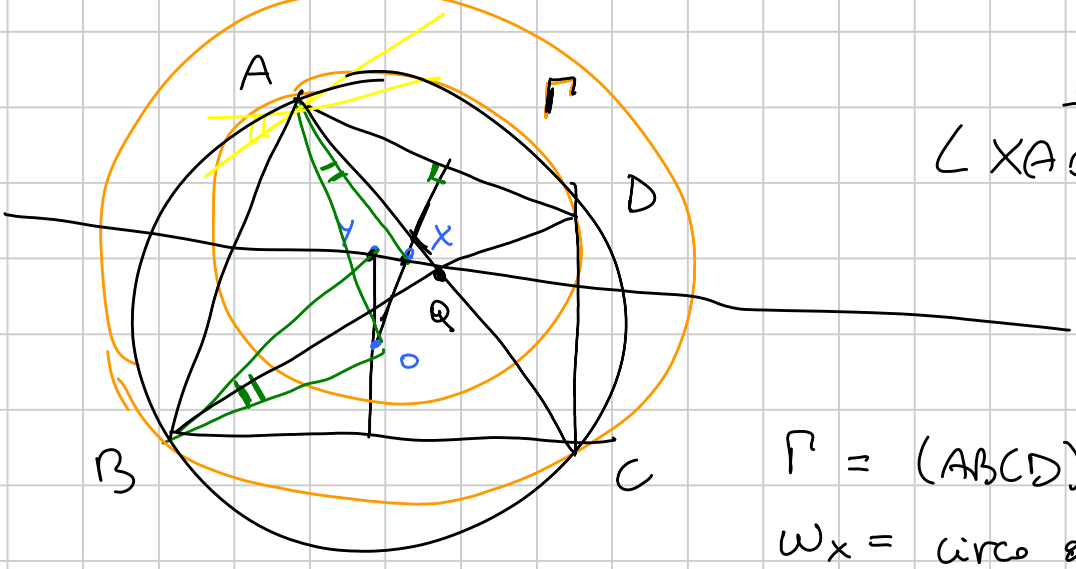


$K = 3$

$d = 2$

$3 - 2$

PROBLEMA 3



pol (P)

tesi:

$\angle XAO = \angle YBO$

$\Gamma = (ABCD)$

ω_X = circo di centro X che passa per A, D

ω_Y = —

$\angle XAO$ = angolo tra Γ, ω_X

Angolo tra $\Gamma, \omega_Y = \angle YBO$

+ simmetria centrale

Se facciamo inversione in R che scambia A, C
B, D

$\omega_x \longleftrightarrow \omega_y$ per inversione quindi l'angolo è lo stesso. $\blacksquare$