

A2 - BASIC

DISUGUAGLIANZE

(LEZIONE SVOLTA ALLA LAVAGNA PER PROBLEMI TECNICI)

NOTAZIONE : somme cicliche e simmetriche

conosciamo $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$

Fissiamo come variabili a, b, c

(def.) **somma ciclica** : $\sum_{cyc} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$

Stiamo sommando continuando a "shiftare" gli addendi

↳ "shift" = $a \rightarrow b \quad b \rightarrow c \quad c \rightarrow a$

(def.) **somma simmetrica** : $\sum_{sym} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b) + f(b, a, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b) + f(c, b, a)$

Stiamo sommando su tutte le permutazioni di a, b, c

$\sum_{cyc}$ su n variabili $\rightarrow n$ termini ; $\sum_{sym}$ su n variabili $\rightarrow n!$ termini

Vedremo una corollata di "disuguaglianze note", da usare nei problemi, e qualche idea standard

QUADRATI

- La disuguaglianza più standard è $\square \geq 0$, spesso nella versione $\square + \blacksquare + \boxtimes \geq 0$.

esempio 1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ con $= \text{sse}$ $a = b$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow & \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \geq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- esempio 2.** $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ con $= \text{sse}$ $a = b = c$

↳ tentativo 1 (fallimentare) : $(a + b + c)^2$ NO perché (segni e) non si toglie il fattore 2 nei doppi prodotti

funziona vederlo come somma di quadrati / sommando le equazioni

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc \\ a^2 + c^2 &\geq 2ac \end{aligned} \right\} \quad \cancel{2}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \cancel{2}(ab + bc + ac)$$

La disu esplicita usata è : $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geq 0$

- A volte c'è una disuguaglianza "nascosta" dietro un'equazione. Soprattutto con $\square + \blacksquare \geq 0$.

- TdA 2024.** risolvere $(2 + 3a)(1 + 2b)(3a + 4b) = 3ab$ con $a, b > 0$

↳ "A sentimento" proviamo a usare la nostra $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ sui tre fattori

$$\underbrace{(2 + 3a)}_{\geq 2\sqrt{6a}} \underbrace{(1 + 2b)}_{\geq 2\sqrt{2b}} \underbrace{(3a + 4b)}_{\geq 2\sqrt{12ab}} \geq 8 \cdot \sqrt{12^2 \cdot a^2 b^2} = 96ab \quad \text{Quando vale } = ?$$

$$\begin{cases} 2 = 3a \\ 1 = 2b \\ 3a = 4b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}$$

CAUCHY - SCHWARZ

- ENUNCIATO: Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$

dim Consideriamo $p(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2$. Somma di $\square \Rightarrow p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Espandendo: $p(x) = x^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2$

$p(x) \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$.

Scriviamo questa disu: $0 \geq \frac{\Delta}{4} = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$ fine.

- Quando vale = ? Se $\Delta = 0$ ovvero $p(x)$ è quadrato, unico caso in cui esiste λ indice reale.
 $\Rightarrow 0 = p(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i \lambda - b_i)^2$

$\Rightarrow a_i \lambda - b_i = 0$ per $i=1, \dots, n$; ovvero c'è = se e solo se $\frac{a_i}{b_i} = \text{costante}$.

- Nesbitt. $a, b, c > 0 \quad \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$

dim Vogliamo applicare Cauchy - Schwarz, dobbiamo scegliere su cosa

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^3 y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i\right)^2 \rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^3 y_i^2}$$

È naturale $x_1 = \sqrt{\frac{a}{b+c}}$ e cicliche.

Dobbiamo scegliere gli y_i .

X 1° tentativo: vogliamo togliere i denominatori dagli $x_i \Rightarrow y_1 = \sqrt{b+c}$ e cicliche

$\hookrightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{(b+c) + (a+c) + (a+b)}$ NON ci piacciono le $\sqrt$ al numeratore

✓ 2° tentativo: $y_1 = \sqrt{a \cdot (b+c)}$

$\hookrightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$ vogliamo dimostrarla

Nuova tesi: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$
 $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$
 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ca \quad \checkmark$

- Un immediato corollario di Cauchy - Schwarz è la disuguaglianza di Titu.
 Prendiamo C-S con $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$, $b_i = \sqrt{y_i}$:

Siano $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$. $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n y_i}$

Di fatto la nostra sol. della Nesbitt è Titu con $x_1 = a$, $y_1 = a(b+c)$ e cicliche.

- **QM-AM** Nel caso $b_i = 1$ otteniamo $n \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$

ovvero : $\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}}_{\text{media quadratica (QM)}} \geq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i}_{\text{media aritmetica (AM)}}$

vedremo meglio dopo.

MEDIE

- Ci sono varie nozioni di medie. La disuguaglianza più importante che le riguarda è:

AM-GM
 media aritmetica media geometrica

$$\text{se } a_1, \dots, a_n > 0 \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

NON la dimostriamo (lunga) ma è un bell'esercizio. La dimostrazione più classica procede per "induzione alla Cauchy" (farlo a casa).

- **esempio 1** : nel caso $n=2$ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (riscrittura di $a^2+b^2 \geq 2ab$)
- **esempio 2** : $a, b, c > 0$ mostrare che $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

dim IDEA: assomiglia a $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$. Adattiamo la dimostrazione.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^6 b^3} = a^2 b \\ \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} \geq b^2 c \\ \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} \geq c^2 a \end{array} \right\} \text{sommando : } a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

- La potenza di AM-GM sta nello scegliere i termini su cui applicarlo.
- **problema** : Trovare il massimo di $x^5 y^2 z$ tra gli $x, y, z > 0$ con $x+y+z = 1$.

dim IDEA: vogliamo $x^5 y^2 z$ come GM, usando però il vincolo.

Un modo per avere esponenti diversi è ripetere lo stesso termine più volte, come visto già con $a^2 b$.

$$\frac{1}{8} = \frac{\frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + z}{8} \geq \sqrt[8]{\frac{x^5 y^2 z}{5^5 \cdot 2^2}} \quad \text{Seguano conti per "trovare il numerello"}$$

- Questa tecnica si chiama **AM-GM pesata**. Nei nostri esempi, i pesi erano interi. Un fatto sorprendente è che vale anche con pesi reali (positivi).

si veda
IMO 2/2021

$$\text{se } a_1, \dots, a_n > 0 \text{ e } p_1, \dots, p_n > 0, \text{ detto } S := \sum_{i=1}^n p_i, \quad \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n a_i^{p_i} \geq \sqrt[S]{\prod_{i=1}^n a_i^{p_i}}$$

- Possiamo estendere questa disuguaglianza:

QM - AM - GM - HM
 ↓ ↓
 media media
 quadratica armonica

$$\text{se } a_1, \dots, a_n > 0 \quad \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Ma possiamo definire una media tra n numeri in molti altri modi.

(def.) media p -esima Siano $a_1, \dots, a_n > 0$ e sia $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$

$$M_p(a_1, \dots, a_n) := \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}$$

- Nel caso $p=0$ poniamo $M_0(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, ovvero GM.

• alcuni esempi

$$p=1 : M_1 \text{ é } AM$$

$$p=2 : M_2 \text{ é } QM$$

$$p=-1 : M_{-1} \text{ é } HM$$

- Vale la seguente:

$$\text{se } a_1, \dots, a_n > 0 \quad p > q \Rightarrow M_p(a_1, \dots, a_n) \geq M_q(a_1, \dots, a_n)$$

- É interessante cosa succede per $p \rightarrow \pm \infty$. Supponiamo che p sia grande e $a_1 > a_2, \dots, a_n$ (ad esempio $a_1 = 3$, $a_2 = \dots = a_n = 2$). Allora nella somma $a_1^p + \dots + a_n^p$ il termine che domina é a_1^p . Più p é grande, più il contributo di $a_2, \dots, a_n$ diventa insignificante a confronto.

Aggiustando questo ragionamento si dimostra che:

$$\text{se } p \rightarrow +\infty \quad M_p(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=1, \dots, n} a_i$$

e analogamente:

$$\text{se } p \rightarrow -\infty \quad M_p(a_1, \dots, a_n) = \min_{i=1, \dots, n} a_i$$

(usiamo che per α costante $\alpha^{1/p} \rightarrow 1$ se $p \rightarrow +\infty$)

É inoltre chiaro che $\max_{i=1, \dots, n} a_i \geq M_p(a_1, \dots, a_n) \geq \min_{i=1, \dots, n} a_i$.

⚠ In tutte le disuguaglianze di questa sezione, vale = se e solo se $a_1 = \dots = a_n$.

- problema (TAIWAN TST 2014) $a, b, c > 0$. Mostrare $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} + 8\sqrt[3]{abc} \leq 3(a+b+c)$

Dim Vogliamo usare le medie. In quali compare il 3? $M_3, M_0, M_{1/3}$

LHS si può vedere facilmente come $M_{1/3}$. Con cosa la confrontiamo? Serve $p \geq \frac{1}{3}$.
 Proviamo $p=1$.

$$\text{LHS} = 9 \left(M_{1/3} \left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}, \underbrace{abc, \dots, abc}_{8 \text{ volte}} \right) \right)^{1/3} \leq 9 \left(M_1 \left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}, \underbrace{abc, \dots, abc}_{8 \text{ volte}} \right) \right)^{1/3} = 3(a^3+b^3+c^3+24abc)^{1/3}$$

É sufficiente mostrare: $a^3+b^3+c^3+24abc \leq (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3 \sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc$
 Che si conclude con AM-GM pesata come visto finora.

BUNCHING / RAGGRUPPAMENTO / MUIRHEAD

- Le disuguaglianze (polinomiali) viste finora avevano a che fare con termini tutti dello stesso grado, come $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ (grado 2).
- Rivedendole, il principio generale è che "termini più concentrati" sono più grandi di "termini più mescolati". Ad esempio:
 - $a^2 + b^2 \geq 2ab$
 - $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$
 - $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$
- La disuguaglianza di Muirhead formalizza questa intuizione.

$$\text{siano } a_1, \dots, a_n > 0 \text{ e } x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n \\ x_1 + \dots + x_k \geq y_1 + \dots + y_k \quad \forall k = 1, \dots, n \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{\text{sym}} a_1^{x_1} \dots a_n^{x_n} \geq \sum_{\text{sym}} a_1^{y_1} \dots a_n^{y_n}$$

- Tutte le disuguaglianze di bunching si possono dimostrare con AM-GM pesata, come ad esempio $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + ab^2 + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c$ (si dimostra in modo identico a $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$)
- Commentiamo l'enunciato:
 - $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow$ i termini hanno stesso grado
 - $\sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i \quad \forall k = 1, \dots, n \rightarrow$ "concentrazione"
 - $\sum_{\text{sym}} \rightarrow$ pensandola come AM-GM pesata, serve a far "vedere tutti i pesi"

⚠ $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ NON è conseguenza di bunching; la somma è ciclica e non simmetrica. Siamo obbligati a usare AM-GM.

RIARRANGIAMENTO

- domanda al lettore**: Siano a, b, c, x, y, z con $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ e $\{x, y, z\} = \{10, 20, 30\}$. Come massimizzare / minimizzare $ax + by + cz$?
 $\max \rightarrow 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30$ $\min \rightarrow 1 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30$
- L'idea è che per massimizzare / minimizzare vogliamo accoppiare termini grandi con termini grandi / piccoli.
La disuguaglianza di riarrangiamento formalizza questa idea.

Siano $a_1 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq \dots \leq b_n$ e $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ permutazione.
 $\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$ è massima se $\sigma(i) = i$, minima se $\sigma(i) = n+1-i$.

dim. Se $n=2$ diventa $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$
 $\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\leq 0} \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\leq 0} \geq 0$

PER CASA : ottenere il caso generale da quello $n=2$, procedendo per assurdo.

IDEA INTERESSANTE: a intuito potrebbe convincerci riarrangiamento per a_i, b_i positivi, e non troppo coi negativi. Un modo di convincersi è il seguente:

- VERSIONE 1: la dimostrazione usa solo le differenze: $a_i - a_j$ e $b_i - b_j$; traslando tutti gli a_i (o b_i) di una stessa costante le differenze non cambiano $\Rightarrow$ la dimostrazione funziona ancora

VERSIONE 2: cambiando a_i con $a_i + t$ e b_j con $b_j + s$ si ha:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + t)(b_{\sigma(i)} + s) = \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} + \underbrace{s \sum_{i=1}^n a_i + t \sum_{i=1}^n b_i + stn}_{\text{costante al variare di } s}$$

$\Rightarrow$ problema originale e traslato hanno stessa soluzione

CONCLUSIONE: se gli a_i, b_i sono negativi, trasliamo in avanti e sono positivi.

OMOGENEITÀ

- (def.) funzione omogenea: $f(a, b, c)$ si dice omogenea se $\forall \lambda \neq 0$ si ha $f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = f(a, b, c)$
- Diciamo che una disuguaglianza è omogenea se è equivalente a $f \geq 0$, per qualche f funzione omogenea delle variabili del problema.
- esempi:
 - $f(a, b, c) = a + b + c$ NO
 - $f(a, b, c) = a/b + b/c + c/a$ SÍ
 - $f(a, b, c) = a/b$ SÍ
 - $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ NO
 - $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ SÍ
- se una funzione è razionale $\left(= \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} \right)$ allora è omogenea se
 - ↗ i polinomi hanno tutti monomi dello stesso grado
 - ↘ i gradi dei polinomi sono uguali
- esempio 1: se $a, b, c > 0$ con $abc = 1$ $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$

IDEA: 1) vogliamo **OMOGENIZZARE** l'espressione
2) $abc = 1 \Rightarrow$ possiamo "moltiplicare gratis" per abc

$\Rightarrow$ risolviamo l'eq. come $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt[3]{abc} (a + b + c)$ (omogenea, grado 2)
È vera per bunching con esponenti $(\frac{2}{2}, 0, 0)$ e $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- **esempio 2.** di nuovo Cauchy-Schwarz $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$

La disuguaglianza è omogenea, sia negli a_i che nei b_i .

IDEA: la **DE-OMOGENIZZIAMO**. Poiché per omogeneità gli a_i possono essere riscalati a piacimento, possiamo imporre senza perdita di generalità (WLOG = Without Loss Of Generality) un **VINCOLO**, come

$$\text{WLOG} : \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \quad \text{e analogamente} \quad \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$$

La disuguaglianza diventa $1 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$ ovvero $1 \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

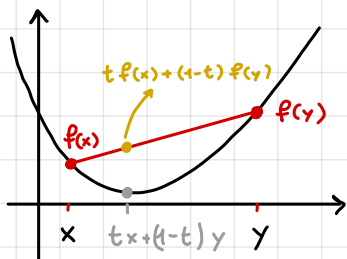
Ma questa si risolve facilmente: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$.

- ⚠ il vincolo che imponiamo deve corrispondere al riscalamento per una costante
es. $a+b+c=1$ ok, $a+2b+4c=1$ ok, $a^2+b^2+c^2=1$ ok, $a+b^2+c^4=1$ NO.

CONVESSITÀ

(def.) **funzione convessa**: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale:
oppure intervallo
 $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall t \in (0, 1)$

(convessità: ● sopra ●)



- f si dice **concava** se $\forall x, y$ e $t \in (0, 1)$ $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

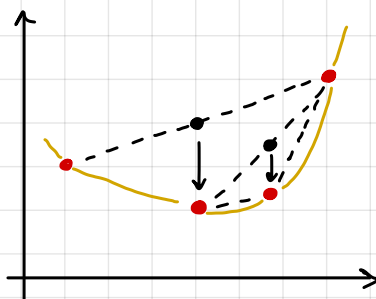
- f convessa $\rightarrow$ "funzione felice" ☺



- f concava $\rightarrow$ "funzione triste" ☹



- COME VERIFICARE che una data f è convessa? Bastano i **punti medi** ($t = 1/2$ nell'equazione della def.) Per dare un'idea, disegniamo il grafico "un punto medio alla volta":



- ⚠ non funziona per tutte le funzioni, ma funziona per le **continue**

- esempi: x^2 è convessa  dim. grafico oppure continua + $(\frac{x+y}{2})^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$
- $\frac{1}{x}$ è convessa 
- $\sqrt{x}$ è concava 

in generale su $\mathbb{R}^+$: x^α è: convessa se $x \geq 1$
 concava se $x \in [0, 1)$
 convessa se $x \leq 0$

- una funzione sia convessa che concava è lineare: $f(x) = ax + b$
- La disuguaglianza più utile che ha a che fare con convessità è la **disuguaglianza di Jensen**

siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$, $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ t.c. $t_1 + \dots + t_n = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i \cdot x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

• Si dimostra per induzione a partire dalla definizione (che copre il caso $n=2$)

• esempio 1: se $f(x) = \frac{1}{x}$, $t_i = \frac{1}{n} \quad \forall i=1, \dots, n$ Jensen ci dice che

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^{-1} \leq \sum_{i=1}^n t_i \frac{1}{x_i}$$

Chiamando $y_i = \frac{1}{x_i}$ otteniamo AM-HM.

• Nesbitt (ancora): $a, b, c > 0 \quad \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$

IDEA: per usare Jensen, vogliamo $\sum_{cyc} f(a)$

Per ricondurci a ciò, usiamo l'omogeneità imponendo wlog $a+b+c=1$
 $\Rightarrow$ ci serve ora mostrare $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2}$ con $a+b+c=1$.

Modo 1: poiché $a+b+c=1$ li possiamo usare come pesi. Così usiamo $f(x) = \frac{1}{1-x}$, convessa in $(0, 1)$:



$$\sum_{cyc} a \cdot f(a) \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\sum_{cyc} a \cdot a\right) = f(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{1-a^2-b^2-c^2} \stackrel{(\text{visto prima})}{=} \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac} \stackrel{(\text{stiamo omogenizzando})}{\geq} \frac{3}{2}$$

Modo 2. scegliamo i pesi "classici" $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; invece di studiare la convessità di $\frac{x}{1-x}$ possiamo notare $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \Rightarrow$ riscriviamo la disuguaglianza

come $\sum_{cyc} \frac{1}{1-a} \geq \frac{9}{2}$. Jensen: $\sum_{cyc} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-a} \geq \frac{1}{1-\frac{(a+b+c)}{3}} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$

PROBLEMI

- ① $a, b, c > 0$ con $abc = 1$. Calcolare $\min(a^4 + b^2 + c)$ al variare di a, b, c .
- ② $a, b, c > 0$. Mostrare in almeno 2 modi $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.
- ③ trovare le migliori costanti k_1, k_2 t.c. $k_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq k_2$
- ④ Siano $a, b, c > 1$. Mostriamo $\frac{a+b+c}{4} \geq \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}$.
- ⑤ IHO 4/2023 Siano $x_1, \dots, x_{2023} > 0$ a 2 a 2 distinti. Definiamo
$$a_n := \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)}$$
 e supponiamo $a_n \in \mathbb{Z} \quad \forall n=1, \dots, 2023$.
Dimostrare che $a_{2023} \geq 3034$
- ⑥ IHO 2/2012 Siano $n \geq 3$, $a_2, \dots, a_n > 0$ t.c. $a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$
Mostrare $(1+a_2)^2 \cdot (1+a_3)^3 \cdot \dots \cdot (1+a_n)^n > n^n$

ALTRI PROBLEMI (PER CASA): EGMO 2/2010, EGMO 2016/1, IHO 2/2001

Soluzioni nella pagina
successiva

SOLUZIONI

- ① $a, b, c > 0$ con $abc = 1$. Calcolare $\min(a^4 + b^2 + c)$ al variare di a, b, c .
Per AM-GM pesata, con pesi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$:

$$\frac{(4a^4) \cdot \frac{1}{4} + (2b^2) \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 1}{\frac{7}{4}} \leq \left((4a^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (2b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot c \right)^{\frac{4}{7}} = 4^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{2}{7}}$$

$$\Rightarrow a^4 + b^2 + c \leq \frac{2^{18/7}}{7}$$

(anche pesi $(1, 2, 4)$ funzionano)

- ② $a, b, c > 0$. Mostrare in almeno 2 modi $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

MODO 1: AM-GM $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1$

MODO 2: Titu: $\sum_{cyc} \frac{a}{b} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab} \geq \frac{(\sum_{cyc} a)^2}{\sum_{cyc} ab} = \frac{\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} ab} \geq 3$

MODO 3: riarrangiamento: wlog a è il massimo

• se $a \geq b \geq c$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 3$

• se $a \geq c \geq b$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 3$

- ③ trovare le migliori costanti k_1, k_2 t.c. $k_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq k_2$

Notiamo che sostituendo $(a, b, c) = (a, c, b)$ otteniamo $\frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{a+b}$

e che $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{a+b} = 3 \Rightarrow k_1 + k_2 = 3$.

Mostriamo $k_1 = 1$ ($\Rightarrow k_2 = 2$).

Titu: $\sum_{cyc} \frac{a}{a+b} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2+ab} \geq \frac{(\sum_{cyc} a)^2}{\sum_{cyc} a^2+ab} = \frac{\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab} > 1 \quad \checkmark$

Per dire che è la costante ottimale, siano $(a, b, c) = (1, \varepsilon^2, \varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

⚠ è un ESTREMO INFERIORE, non un minimo.

- ④ Siano $a, b, c > 1$. Mostriamo $\frac{a+b+c}{4} \geq \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}$.

$$\sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sqrt{\frac{1}{c} \left(a - \frac{1}{b} \right)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b}}{2} = \frac{a+b+c}{4}$$

⑤ IMO 4/2023 Siano $x_1, \dots, x_{2023} > 0$ e 2 a 2 distinti. Definiamo

$$a_n := \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)} \quad \text{e supponiamo} \quad a_n \in \mathbb{Z} \quad \forall n=1, \dots, 2023.$$

Dimostrare che $a_{2023} \geq 3034$

$$a_{n+2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i + (x_{n+1} + x_{n+2})\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)\right)} \quad (\geq) \quad \text{Cauchy-Schwarz.}$$

$$\geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)} + \sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)}$$

$$= a_n + \sqrt{2 + \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} + \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}} \quad (>) \quad a_{n+2}$$

$\geq$ per AM-GM; vale = se e solo se $x_{n+1} = x_{n+2}$, escluso dall'ipotesi che siano distinti

a_n interi $\Rightarrow$ allora $a_{n+2} \geq a_n + 3$. Allora $a_n \geq a_0 + 3n$
 $a_{2n+1} \geq a_1 + 3n$
 $(a_0 = 0, a_1 = 1)$
 $\Rightarrow a_{2023} \geq 3034$

⑥ IMO 2/2012 Siano $n \geq 3$, $a_2, \dots, a_n > 0$ t.c. $a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$

$$\text{Mostare} \quad (1+a_2)^2 \cdot (1+a_3)^3 \cdot \dots \cdot (1+a_n)^n > n^n$$

$$\text{Per ogni } k, \quad \frac{\frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-1} + a_k}{k} \geq (k-1)^{-(k-1)/k} \cdot a_k^{1/k} \quad \text{per AM-GM.}$$

$$\Rightarrow (1+a_k)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k \quad \text{con} = \text{ se } a_k = \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow (1+a_2)^2 \cdot (1+a_3)^3 \cdot \dots \cdot (1+a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n = n^n$$

Quando vale = ? Se $a_k = \frac{1}{k-1} \quad \forall k = 2, \dots, n$.

$$\text{Ma } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-1} \neq 1 \Rightarrow \text{non una scelta accettabile}$$