ALGEBRA 3 - BASIC

Titolo nota 26/09/2024

- SUCCESSIONI
- EQ. FUNZIONALI

RIPASSO

- $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ [se $x \neq 1$]

$$(x^{n+1} - 1) = (x-1)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$$

- BONUS $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = S$
  - $x \geq 1$ $+\infty$
  - $x \in (0,1)$ $x = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} S &= 1 + x(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 1 + Sx \end{aligned}\right\} \quad S = \frac{1}{1-x}$$

- $\begin{cases} X_{n+1} = 3X_n + 2 \\ X_0 = 1 \end{cases}$ Trovare X_n.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 3X_n + 2 \\ &= 3(3X_{n-1} + 2) + 2 \\ &= 3^2 \cdot X_{n-1} + 3 \cdot 2 + 2 \\ &= 3^2 (3X_{n-2} + 2) + 2 + 3 \cdot 2 \\ &= 3^3 \cdot X_{n-2} + 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \\ &\dots \\ &= 3^{n+1} \cdot X_0 + 3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2 + \dots + 2 \\ &= 3^{n+1} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Fatto}: \begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b \\ x_0 \text{ fissato} \end{cases} \implies x_n = a^{n+1} \cdot x_0 + b \cdot \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad [a \neq 1] \qquad \text{se } a = 1 \quad x_n = x_0 + b \cdot n}$$

Come complicarla?

$$x_{n+1} = a x_n + f(n)$$ 1 grado di libertà

$$\boxed{\text{Fatto} \qquad x_n = a^n \cdot c + g(n) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}}$$

- nel caso $f(n) \equiv b$, $g(n) = b \cdot \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
- $\cancel{a^{n+1}} \cdot c + g(n+1) = \cancel{a^{n+1}} \cdot c + a \cdot g(n) + f(n)$

$$g(n+1) - a g(n) = f(n)$$

- $f \equiv b$ $\qquad g(n+1) - a g(n) = b$
- $f(n) = n$, $\qquad a = 2$

$$g(n+1) - 2 g(n) = n$$

- SPERANZA: se f è polinomio, g è polinomio
- $g(n) = \alpha n + \beta$

$$\alpha(n+1)+\beta-2\alpha n-2\beta=n$$

$$n(\alpha-2\alpha-1)+\alpha+\beta-2\beta=0$$

vale per ogni n

$$\alpha-2\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

$$\Rightarrow \beta=-1$$

- $\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \underbrace{n^k} \\ X_0 = 0 \end{cases}$ $\quad (n, n^2, n^3 \dots)$

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} i^k = \underbrace{\text{polinomio in } n}_{P_k(n)}$$

INDUZIONE SU k.

$k=0 \rightarrow P_0(n)=n$

$k=1 \rightarrow P_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$

GUESS grado $k+1$

somma telescopica

$$(n+1)^{k+1} - \cancel{n^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} n^i$$

$$\cancel{n^{k+1}} - \cancel{(n-1)^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} (n-1)^i$$

$$\dots$$

$$\cancel{2^{k+1}} - 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} 1^i$$

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} p_i(n)$$

$\Rightarrow P_k$ é polinomio

- $\begin{cases} X_{n+1} = aX_n + bX_{n-1} \\ X_0, X_1 \text{ fissati} \end{cases}$

LINEARE

$$\begin{cases} \boxed{F_{n+1} = F_n + F_{n-1}} \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$ (Fibonacci)

- cosa ci aspettiamo? polinomio, esponenziale...

se è crescente, $F_{n+1} \geq 2F_{n-1}$
$\Rightarrow F_n \geq 2^{n/2}$

- proviamo $F_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1}$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\Delta = 5$$
$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Conosciamo 2 soluzioni $A_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$B_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$$

LINEARITÀ
$c \cdot A_{n+1} = c \cdot A_n + c \cdot A_{n-1} \Rightarrow$ anche $\underline{c \cdot A_n}$
$(A_{n+1} + B_{n+1}) = (A_n + B_n) + (A_{n-1} + B_{n-1})$
$\Rightarrow$ anche $\underline{A_n + B_n}$

$\underline{\alpha} A_n + \underline{\beta} B_n$ tutte soluzioni
$\rightarrow$ 2 gradi di libertà
$\Rightarrow$ sono tutte fatte così

$$F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} 1 = F_0 = \alpha + \beta \\ 1 = F_1 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$1 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \alpha \left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5} - \cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \sqrt{5}\,\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\beta = 1-\alpha = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Fatto generale

$$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$$

$$\lambda^{n+1} = a \lambda^n + b \lambda^{n-1} \qquad x_n = \lambda^n$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

$p(x) = x^2 - ax - b$

"associato alla ricorsione"

POLINOMIO CARATTERISTICO

λ_1, λ_2 radici

$$\boxed{\begin{cases} x_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n \\ \alpha, \beta \text{ si trovano da } x_0, x_1 \end{cases}}$$

cosa succede se $\lambda_1 = \lambda_2$?

$p(x) = \square$

$\lambda^n, \quad n \cdot \lambda^n \quad (\longrightarrow \alpha \lambda^n + \beta n \cdot \lambda^n)$

$$x_{n+1} = 2\lambda x_n - \lambda^2 x_{n-1}$$

$$(x^2 = 2\lambda x - \lambda^2)$$

$x_n = n\lambda^n$ funziona? sí!

$$(n+1) \cancel{\lambda^{n+1}} = 2n \cancel{\lambda^{n+1}} - (n-1) \cancel{\lambda^{n+1}}$$

$$n+1 = 2n - n + 1$$

Fatto ancora più generale

$$x_{n+1} = a_k x_n + a_{k-1} x_{n-1} + \dots + a_0 x_{n-k}$$

$\hookrightarrow$ troviamo il POLINOMIO CARATTERISTICO

$\hookrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ radici

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \dots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1}^n$$

$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad \lambda_2 \longrightarrow n \cdot \lambda_1$

$\lambda_1 = \lambda_2 \simeq \lambda_3$ $\lambda_2 \to n\lambda_1$

$\lambda_3 \to n^2 \lambda_1$

---

es. $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \\ a_0 = -2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ $a_2 = 0$

Tesi: per ogni primo p, esistono ∞ indici n t.c. $p \mid a_n$

- $a_n \in \mathbb{Z}$ ✓
- guardiamola modulo p

↳ a_n varia tra p valori finiti

PIGEONHOLE: 2 termini sono =

Sarebbe bello fosse periodica MA 2 termini = non bastano

↳ guardiamo le coppie $\underbrace{(a_n, a_{n+1})}_{p^2 \text{ possibili}}$

$\Rightarrow$ ci sono 2 coppie (a_n, a_{n+1}) =

$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_h, a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots$

$\Rightarrow$ la succ. è periodica modulo p

se troviamo un termine $\equiv 0 \pmod p$
fine

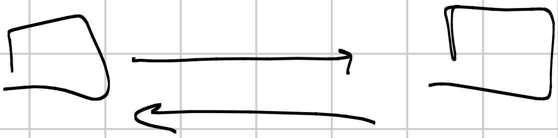
- PROBLEMA: e se 0 è nell'antiperiodo?

- $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$

$$\boxed{a_{n-1} = a_{n+1} - 2a_n}$$

"$b_n = a_{-n}$"

estendiamo la succ da $n \in \mathbb{N}$
a $n \in \mathbb{Z}$



FUNZIONALI

equazione in cui l'incognita è una funzione

- $f(f(x)) = x$ $\qquad f(x) = x$
- $f(n+1) - 2f(n) = n \qquad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

....

es. Trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R})$$

SOLUZIONE

1. dimostrare che SOLO $f(x) = \dots$ funziona (es. $ax+b$)
2. VERIFICARE (sostituendo nell'eq. iniziale) che sia soluzione

1. è interessante. Come farlo?

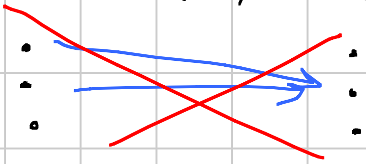
- sostituire a x, y valori comodi (es. 0)
- dimostrare che f è iniettiva / surgettiva

es. <u>f iniettiva</u> $\qquad f(x^2+y) = f(f(x)^2+f(y))$

$\qquad x^2 + y = f(x)^2 + f(y)$

es. <u>f surgettiva</u> $\qquad \exists\, x_0 \quad f(x_0) = 0$

iniettiva $\quad f(x) = f(y) \iff x = y$



surgettiva $\quad f: \mathbb{R} \to X$

$\forall x \in X \quad \exists y \quad f(y) = x$

- f monotona
  - → crescente (debole o stretta)
  - → decrescente (")

TECNICHE

- $P(x,y)$ e' equazione del testo
  ↳ es. $P(x,0)$, $P(x, f(x))$ .....
- cercare di far sparire termini
- simmetrie (confronto $P(x,y)$ $P(y,x)$)

---

es. Trovare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

- $P(0,0)$ $\quad f(f(0)) = f(0)^2$
- $P(0,y)$ $\quad \underbrace{f(f(y))}_{LHS} = \underbrace{f(0)^2 + y}_{RHS}$

↳ f é bigettiva

$f \circ f$ é bigettiva

RHS bigettivo => anche LHS

Left / Right Hand Side

Fatto

$f(g(x))$ ← $f \circ g$ iniettiva $\Rightarrow$ g iniettiva

$f \circ g$ surgettiva $\Rightarrow$ f surgettiva

- sia x_0 con $f(x_0) = 0$

$P(x_0, y) \Rightarrow f(f(y)) = y$

$\Rightarrow f(0)^2 = 0 \quad (x_0 = 0)$

- $P(f(z), y) \Rightarrow f(z f(z) + f(y)) = z^2 + y$

$(z \in \mathbb{R})$ $\quad \overset{P(z,y)}{\|}$

$f(z)^2 + y$

$\Rightarrow f(z)^2 = z^2 \Rightarrow f(z) = \pm z$ dipende da z

⚠ $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = -x \ \forall x \in \mathbb{R}$ sono le uniche sol

Bisogna controllare che il "MISCHIONE" non funziona

$\rightarrow f(a) = a, \quad f(b) = -b \quad (a, b \neq 0)$

$P(a, b): \quad f(a^2 - b) = a^2 + b$

---

es. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$

- RHS é simmetrico in a, b

LHS NO (ma é = a RHS quindi sí)

$\Rightarrow f(2a) + 2f(b) = f(2b) + 2f(a)$

$f(2a) - 2f(a) = f(2b) - 2f(b)$

$$\boxed{f(2a) - 2f(a) = k}$$ costante $\forall a \in \mathbb{Z}$

eq: $2f(a) + k + 2f(b) = f(f(a+b))$

- $P(a, 0)$: $2f(a) + k + 2f(0) = f(f(a))$

  $2f(a) - k = f(f(a))$

[$\boxed{}$ $\to$ $a = 0$: $-f(0) = k$]

eq: $f(a) + f(b) = f(a+b) - k$

EQ. FUNZ. DI CAUCHY

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\qquad f(x) + f(y) = f(x+y)$

$[\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}]$

Tesi : $f(x) = c \cdot x$, $\forall c$ costante

- VERIFICHIAMO che $\forall c$ $f(x) = c \cdot x$ é sol

  $c \cdot x + c \cdot y = c(x+y)$ ✓

- $y = 0$: $f(x) + f(0) = f(x) \Rightarrow f(0) = 0$
- $y = 1$: $f(x) + f(1) = f(x+1)$

  $f(2) = 2f(1)$

  $f(3) = 3f(1)$ ....

  per induzione $f(n) = n \cdot f(1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

- $\left[x = \frac{m}{n}\right]$, $y = \frac{1}{n}$: $f(x) + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$

  per induzione $f\left(\frac{m}{n}\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$

  $m = n$: $f(1) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(1)$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\, f(1)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? COMPLICATO

↳ servono ipotesi extra: continuità, monotonia ...

① $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$

② $f(x) + f(y) = f(xy)$

③ $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$

$$g(x) = \log f(x)$$

③ $g(x) + g(y) = \log(f(x) \cdot f(y))$
$= \log(f(x+y))$
$= g(x+y)$

$\Rightarrow g(x) = c \cdot x \Rightarrow f(x) = e^{cx}$

$f(a) + f(b) = f(a+b) - k$
$(f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$

$+2k$ $+2k$

$$g(x) = f(x) + k$$

$$\underbrace{f(a)+k}_{g(a)} + \underbrace{f(b)+k}_{g(b)} = \underbrace{f(a+b)+k}_{g(a+b)}$$

$$g(a) = c \cdot a$$

$$f(a) = c \cdot a - k$$

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

SOSTITUIAMO

$$2ca - k + 2cb - 2k = c^2(a+b) - ck - k$$

$$2c(\underline{a+b}) - 3k = c^2(\underline{a+b}) - (c+1)k$$

$$c = 2 \;,\; \underbrace{c = 0}_{\downarrow} \qquad (c^2 - 2c = 0)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \qquad k = 0$$

---

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

---

(2) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

- $f(f(n)) = n+1$?
- $f(f(n)) = n+2$?
- $f(f(n)) = n+3$?

---

(3) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

---

(4) $X_0 = 1 \;, \qquad X_{n+1} = 6X_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$

TROVARE X_{2025}

① $\mathbb{R}$ $\qquad f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$

- $x = y = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = f(0) \lfloor f(0) \rfloor$

  $\hookrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \sigma \quad \lfloor f(0) \rfloor = 1$
- $x = y = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = f(1) \lfloor f(1) \rfloor$

  $\hookrightarrow \quad f(1) = 0 \quad \sigma \quad \lfloor f(1) \rfloor = 1$

1) $f(0) = 0 \;, \quad f(1) = 0$

   $x = 1 \qquad \boxed{f(y) = 0}$

2) $\lfloor f(0) \rfloor = 1 \;, \; f(1) = 0 \quad \longrightarrow \quad f(y) = 0$

   (caso non esistente)

   $[(1,0) \longrightarrow \quad f(0) = f(1) \lfloor f(0) \rfloor = 0]$

3) $f(0) = 0 \;, \quad \lfloor f(1) \rfloor = 1$

   $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$

   $\underline{y = 1} \qquad f(\lfloor x \rfloor) = f(x) \quad (*)$

- $x = 2 \;, \quad y = 1/2$

  $f(1) = f(2) \cdot \lfloor f(0) \rfloor$

  $\hookrightarrow$ caso 1 (non esiste)

④ $\lfloor f(0) \rfloor = 1 \;, \qquad \lfloor f(1) \rfloor = 1$

- $x = n,\ y = \frac{1}{n} \rightarrow \underbrace{f\left(\lfloor n \rfloor \cdot \frac{1}{n}\right)}_{\overset{\parallel}{f(1)}} = f(n)\left\lfloor f\left(\frac{1}{n}\right)\right\rfloor$

- $y = 1 \qquad f(\lfloor x \rfloor) = f(x) \qquad (*)$

- $x = n \quad y = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow f\left(\lfloor n \rfloor \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) =$

n intero

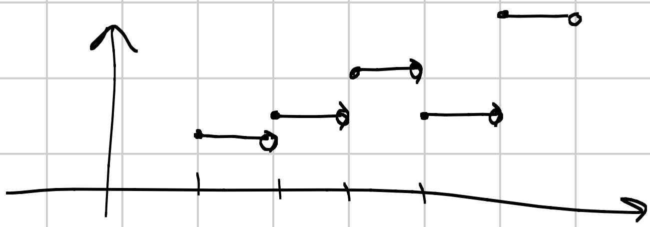
$|n| \geq 2$

$= f(n)\left\lfloor f\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\rfloor$

$\boxed{n = 2 \quad y = \frac{1}{2}}$

$\overset{(*)}{=} f(n)\lfloor f(1) \rfloor$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n+1) = f(n) \\ (*) \quad f(x) = f(\lfloor x \rfloor) \end{array}\right\}$$



$(*)$

- f costante
- $\lfloor f(0) \rfloor = \lfloor f(1) \rfloor = 1$

$\Rightarrow f \equiv c \qquad c \in [1, 2)$

funzionano tutte? Sí

$c = c \cdot \lfloor c \rfloor$

② $f(f(\overset{f(n)}{n})) = \overset{f(n)}{n+k}$ $\quad k=1,2,3$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

- $f(f(f(n))) = f(n+k)$

$$\|$$

$$f(n)+k$$

$\boxed{k=1}$ $\boxed{\begin{aligned} f(n+1) &= f(n)+1 \\ \Rightarrow f(n) &= f(0)+n \end{aligned}}$

$n+1 = f(f(n)) = 2f(0)+n$

$\boxed{k=2}$ $f(n+2) = f(n)+2$

$$\begin{cases} f(2n) = f(0)+2n \\ f(2n+1) = f(1)+2n \end{cases}$$

---

③ $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

- $f(x) = x \to \cancel{2x} = \cancel{2x} + 2y$ NO

- f sol $\Rightarrow \alpha \cdot f$ sol.

- $(0,0) \Rightarrow 2f(0) = 4f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

• $(x,-y)$ / RHS é simm in x,y

$$f(x-y) = f(y-x)$$

$f(x)=x^2 \longleftarrow$ $f(x) = f(-x)$

• $x=y$: $f(2x) = 4f(x)$

• $y=2x$: $f(3x)+f(x) = 2f(x)+\underbrace{2f(2x)}_{8f(x)}$

$$f(3x) = 9f(x)$$

$\rightarrow$ $\boxed{f(nx) = n^2 f(x)}$ (la risolve su $\mathbb{Z}$)

• $f(1) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)$

• $f\left(2\cdot\frac{1}{n}\right) = 4f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$f\left(n\cdot\frac{1}{m}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n^2}{m^2}f(1)$$

---

(4) $x_{n+1} = 6x_n - 2\underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}$

Sappiamo x_0, trovare x_{2025}.

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n+1} x_i$$

$$x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 4x_{n+1} - 6x_n$$
$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$